CAPES externes de mathématiques de 1981 à 1998

Avec les corrections des compositions :

1981.2 / 1982.1.2 / 1982s.2 / 1984.2 / 1985.1.2 / 1986.1 / 1988.1.2 / 1989.1 / 1990.1.2
1991.1.2 / 1992.1.2 / 1993.1.2 / 1994.1.2 / 1995.1.2 / 1996.1.2 / 1997.2 / 1998.1.2

Rassemblés et présentés par Dany-Jack Mercier
(15 décembre 2023)

megamathsblog.blogspot.com/
facebook.com/avantimegamaths
amzn.to/2ZQA6CQ

Epreuve d'analyse CAPES

Dans tout le problème, a et b sont deux réels, a strictement inférieur à b, $I = [a, b]$ est un intervalle compact et toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

On dira que la fonction f définie sur I est *dérivable* sur I si elle est dérivable sur $]a, b[$, et dérivable à droite en a et à gauche en b. On notera $f'_d(a)$ et $f'_g(b)$ respectivement la dérivée à droite en a et la dérivée à gauche en b.

On notera:

$\mathcal{B}(I)$ l'ensemble des fonctions bornées sur I;

$\mathcal{C}(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I;

$\mathcal{D}(I)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I;

$\mathcal{D}^\star(I)$ l'ensemble des fonctions qui sont les dérivées des éléments de $\mathcal{D}(I)$.

On notera $\mathcal{R}(I)$ l'ensemble des fonctions qui sont Riemann-intégrables sur I. On rappel que cette notion ne concerne que les fonctions bornées, définies sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Pour tout fonction f de $\mathcal{R}(I)$, l'intégrale de Riemann de f sur I est désignée par la notation $\int_a^b f(t)dt$.

On dira qu'une fonction f définie sur I possède la propriété des valeurs intermédiaires, si l'image par f de tout intervalle fermé inclu dans I est un intervalle.

Dans tout le problème, J désigne l'intervalle $[0, 1]$.

Les fonctions étudiées dans la partie I pourront être utilisées, à divers stades du problème, commes exemples ou contre-exemples.

Partie I

Dans cette partie, r et s sont deux réels strictement positifs, et $f_{r,s}$ est la fonction définie sur J par:

$$\begin{cases} f_{r,s}(0) = 0 \\ f_{r,s}(x) = x^r \sin(\frac{1}{x^s}) \quad \text{pour } x \neq 0 \end{cases}$$

1.1. Montrer que la fonction $f_{r,s}$ appartient à $\mathcal{C}(J)$.

1.2. Déterminer l'ensemble E des couples (r, s) tels que $f_{r,s}$ appartienne à $\mathcal{D}(J)$.

1.3. Déterminer l'ensemble des couples (r, s) de E tels que $f'_{r,s}$ appartienne à $\mathcal{B}(J)$.

1.4. Déterminer l'ensemble des couples (r, s) de E tels que $f'_{r,s}$ appartienne à $\mathcal{C}(J)$.

1.5. Déterminer l'ensemble des couples (r, s) de E tels que $f'_{r,s}$ appartienne à $\mathcal{R}(J)$.

Partie II

2.1. Soit g une fonction de $\mathcal{D}(I)$ vérifiant $g'(a).g'(b) < 0$. Montrer l'existence d'une valeur c de $]a, b[$ telle que $g'(c) = 0$.

2.2. Soit f une fonction de $\mathcal{D}(I)$. Montrer que la fonction f' possède la propriété des valeurs intermédiaires (on pourra considérer, pour λ convenablement choisi, la fonction g définie par $g(x) = f(x) - \lambda x$).

2.3. Dans cette question, on définit deux fonctions, f et g, par:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \text{ et } g(0) = 1, \\ f(x) = g(x) = \cos(\frac{1}{x}) \quad \text{pour } x \in J \setminus \{0\} \end{cases}$$

2.3.a. Montrer que f et g possèdent la propriété des valeurs intermédiaires.

2.3.b. Montrer, en considérant $f_{2,1}$, que la fonction f appartient à $\mathcal{D}^\star(J)$ (on pourra d'abord établir que $\mathcal{C}(J)$ est inclu dans $\mathcal{D}^\star(J)$).

2.3.c. Montrer que $g - f$ n'est pas dans $\mathcal{D}^\star(J)$. En conclure qu'une fonction définie sur J peut posséder la propriété des valeurs intermédiaires sans être dans $\mathcal{D}^\star(J)$.

2.4. Dans cette question, on note h la fonction définie sur J par: $h(0) = 0$ et, pour tout x non nul et élément de J, $h(x) = \frac{1}{x}\cos(\frac{1}{x^2})$.

2.4.a. Montrer que h appartient à $\mathcal{D}^\star(J)$.

2.4.b. h appartient-elle à $\mathcal{R}(J)$?

Partie III.

On désigne par $\mathcal{P}(I)$ l'ensemble des fonctions définies sur I qui possèdent la propriété suivante: il existe au moins deux fonctions F et G de $\mathcal{D}(I)$ telles que, quelque soit x dans I, $G'(x) \leq f(x) \leq F'(x)$. Si f appartient à $\mathcal{P}(I)$, on note $S(f)$ l'ensemble des fonctions F de $\mathcal{D}(I)$ vérifiant $f(x) \leq F'(x)$ et $s(f)$ l'ensemble des fonctions G de $\mathcal{D}(I)$ vérifiant $G'(x) \leq f(x)$.

3.1.a. Montrer que $\mathcal{D}^\star(I) \subset \mathcal{P}(I)$ et que $\mathcal{B}(I) \subset \mathcal{P}(I)$.

3.1.b. Montrer que pour $I = J$, les inclusions précédentes sont strictes. Que peut-on en déduire pour un intervalle I quelconque?

3.2. On définit la fonction f sur J de la façon suivante:

$$f(0) = 0 \text{ et pour tout } n \geq 1, \text{ si } x \text{ appartient à }]\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}],\ f(x) = n$$

Montrer que, dans l'hypothèse de l'existence de la fonction $F \in S(f)$, on a, pour tout $n \geq 1$:

$$F(\frac{1}{n}) - F(\frac{1}{n+1}) \geq \frac{1}{n+1}$$

La fonction f est-elle dans $\mathcal{P}(J)$?

3.3. Soit f une fonction de $\mathcal{P}(I)$. Montrer que pour toute fonction F de $S(f)$ et pour toute fonction G de $s(f)$, on a l'inégalité: $F(b) - F(a) \geq G(b) - G(a)$.

En déduire que si f est dans $\mathcal{P}(I)$, on définit deux nombres réels $p_+(f)$ et $p_-(f)$ par les formules:

$$p_+(f) = inf\{F(b) - F(a)/F \in S(f)\} \quad \text{et} \quad p_-(f) = inf\{G(b) - G(a)/G \in s(f)\}$$

et que l'on a $p_-(f) \leq p_+(f)$.

3.4. f étant une fonction définie sur I, on dira que f est P-intégrable sur I si elle vérifie les deux propriétés suivantes:

i. f est dans $\mathcal{P}(I)$

ii. $p_-(f) = p_+(f)$.

On note alors $p(f)$ la valeur $p_-(f) = p_+(f)$ et on dit que $p(f)$ est la P-intégrale de f sur I.

3.4.a. Montrer que si f est dans $\mathcal{D}^\star(I)$, alors f est P-intégrable sur I.

3.4.b. Montrer que si f est continue sur I, alors f est P-intégrable sur I. Quelle est alors la valeur de $p(f)$?

3.5.a. Montrer que l'ensemble des fonctions P-intégrables sur I est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que l'application $f \mapsto p(f)$ est une forme linéaire sur cet espace.

3.5.b. Montrer que si f et g sont deux fonctions P-intégrables sur I vérifiant $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$, alors $p(f) \leq p(g)$.

3.6.a. Soient u et v deux éléments de I tels que $u < v$. Montrer que la fonction caractéristique de l'intervalle $[u, v[$ est P-intégrable et trouver sa P-intégrale. (On pourra considérer les fonctions continues et affines par morceaux, supérieures ou égales (respectivement inférieures ou égales) en tout point de I à cette fonction caractéristique). Que peut-on déduire pour une fonction en escalier sur I?

3.6.b. Montrer que si la fonction f est Riemann-intégrable sur I, alors f est P-intégrable sur I et trouver $p(f)$.

3.6.c. L'ensemble des fonctions P-intégrables sur I coincide-t-il avec $\mathcal{R}(I)$?

Partie IV.

4.1. Soit f une fonction P-intégrable sur I et $A = [u, v]$ un intervalle fermé non réduit à un point et inclu dans I. Montrer que la restriction de la fonction f à A est P-intégrable sur A. Dans la suite du problème, on notera $p(f, A)$ la P-intégrale sur A de la restriction de f à A.

4.2. Soit f une fonction P-intégrable sur I et $c \in]a, b[$. Montrer que $p([a, c], f) + p([c, b], f) = p([a, b], f)$.

4.3. Soit f une fonction P-intégrable sur I. On définit une fonction $T(f)$ sur I par:

$$\begin{cases} T(f)(a) = 0 \\ T(f)(x) = p([a, x], f) \quad \text{pour } x > a \end{cases}$$

Montrer qu'il existe deux suites de fonctions de $\mathcal{D}(I)$, F_n et G_n, telles que pour tout entier $n \geq 1$, on ait:

$$T(f)(b) + \frac{1}{n} \geq F_n(b) - F_n(a) \geq T(f)(b) \text{ et } T(f)(b) \geq G_n(b) - G_n(a) \geq T(f)(b) - \frac{1}{n}$$

Etudier la convergence des deux suites de fonctions $(F_n(x) - F_n(a))$ et $(G_n(x) - G_n(a))$ sur I. En déduire que la fonction $T(f)$ est continue sur I.

4.4. Soit f une fonction P-intégrable sur I et x_0 un élément de I. On suppose que la fonction f admet une limite finie ℓ quand x tend vers x_0. Montrer que la fonction $T(f)$ est dérivable au point x_0.

SESSION DE 1981

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(DURÉE : 5 heures)

On rappelle aux candidats que toutes les questions d'*applications* et de *représentations graphiques* sont *importantes.*

On se donne un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère cartésien orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Pour un point de coordonnées (x, y, z), on appelle x l'*abscisse*, y l'*ordonnée*, z la *cote* de ce point.

I

1.1. On considère des endomorphismes f et g de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dont le produit de composition $f \circ g$ est une homothétie h. Démontrer que si le rapport de h n'est pas nul $g \circ f = h$.

A-t-on toujours $g \circ f = h$ si le rapport de h est nul ?

1.2. On considère un réel l, strictement positif, une matrice carrée 3×3 à coefficients réels M et sa transposée M^T :

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} ; \qquad M^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que :

$$(1) \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = l^2 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0 \end{cases}$$

si, et seulement si :

$$(2) \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = l^2 \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = a_3 a_1 + b_3 b_1 + c_3 c_1 = 0. \end{cases}$$

1.3. On considère les points A, B, C de coordonnées respectives $(a_1, a_2, 0)$, $(b_1, b_2, 0)$ et $(c_1, c_2, 0)$. On introduit les nombres complexes :

$$a = a_1 + ia_2, \quad b = b_1 + ib_2, \quad c = c_1 + ic_2.$$

a. Démontrer que A, B, C sont les projections, sur le plan de cote nulle, des sommets d'un cube reliés à O par une arête de ce cube si, et seulement si :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0 \quad \text{et} \quad a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \neq 0.$$

b. Sous les conditions précédentes calculer l'arête l d'un tel cube et les cotes respectives a_3, b_3 et c_3 de ses sommets projetés en A, B, C en fonction de a_1, b_1, c_1 et de a_2, b_2, c_2.

Tournez la page S. V. P.

1.4. *Applications.*

a. Lorsque $a = 3i$, $b = 4i$, $c = 5$ et $a_3 > 0$ représenter la projection orthogonale du cube sur le plan de cote nulle, xOy, puis compléter le dessin par la projection orthogonale du cube sur le plan d'abscisse nulle, yOz. On présentera ce dessin, ainsi que le suivant, sur papier millimétré en prenant pour unité le demi-centimètre. On prendra les deux axes Oy parallèles et de même sens.

b. Pour $a = 3 + 2i$ et $b = 6 - 3i$ calculer c tel que :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0.$$

Dessiner la projection orthogonale sur le plan de cote nulle des cubes associés à (a, b, c) ainsi déterminés.

Calculer l'arête l de ces cubes.

Indiquer sur le dessin les cotes des sommets du cube dont le sommet projeté en C a une abscisse et une cote positives.

1.5. Soit φ un endomorphisme du plan euclidien $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

a. Démontrer qu'il existe un et un seul couple (u, v) de nombres complexes tel que :

$$\text{pour tout } z \text{ de } \mathbb{C}, \quad \varphi(z) = uz + v\bar{z}.$$

b. Démontrer que φ est bijectif si, et seulement si, $|u| \neq |v|$.

1.6. On suppose qu'il existe des nombres complexes a, b, c non tous nuls tels que :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0 \quad \text{et} \quad (\varphi(a))^2 + (\varphi(b))^2 + (\varphi(c))^2 = 0.$$

Démontrer que φ est une similitude.

1.7. Dans l'espace on appelle similitude de rapport $\lambda > 0$, la composée d'une homothétie de rapport λ et d'une isométrie.

Démontrer que la similitude du plan de cote nulle associée à φ se prolonge en une similitude de l'espace qui transforme un cube associé à (a, b, c) en un cube associé à $(\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c))$.

II

A

Soit G l'ensemble des nombres complexes de la forme $m + ni$ avec m et n entiers (relatifs).

A tout point z du plan complexe on associe le nombre $k(z)$ des points p de G tels que : $|z - p| < 1$.

2.A.1. Démontrer que si la partie réelle x et la partie imaginaire y de z sont des entiers alors $k(z) = 1$.

2.A.2. Démontrer que pour tout nombre complexe z on a :

$$k(z) = k(z+1) = k(z+i) = k(iz) = k(\bar{z}).$$

En déduire que pour tout nombre complexe z, il existe un nombre complexe $z' = x' + iy'$ vérifiant :

$$0 \leqslant y' \leqslant x' \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad k(z) = k(z').$$

2.A.3. *a.* Vérifier que $|z'| \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b. Démontrer que si p dans G est tel que $|z' - p| < 1$ alors p est l'un des nombres 0, 1, i ou $1 + i$.

c. Vérifier que $|z' - 1| < 1$ sauf pour $z' = 0$.

2.A.4. Démontrer que $1 \leqslant k(z) \leqslant 4$, avec $k(z) = 1$ si, et seulement si, la partie réelle et la partie imaginaire de z sont des entiers.

2.A.5. Calculer $k\left(\dfrac{1+i}{3}\right)$, $k\left(\dfrac{1+i}{4}\right)$ et $k\left(\dfrac{5+i}{12}\right)$.

B

2.B.1. Démontrer que l'ensemble G forme un anneau pour l'addition et la multiplication usuelles. Quels sont les éléments inversibles de cet anneau ?

2.B.2. *a*. Sachant que pour tout nombre complexe z il existe un élément q de G tel que $|z - q| < 1$, démontrer que pour tous a et b, éléments de G, $b \neq 0$, il existe q et r dans G tels que :

$$a = bq + r \quad \text{avec} \quad |r| < |b|.$$

Observer (d'après II.A.) qu'un tel couple (q, r) est unique si, et seulement si, le quotient $\frac{a}{b}$ est dans G; dans ce cas on dit que b est un diviseur de a (dans G).

b. Calculer tous les diviseurs de 2 dans G.

c. Démontrer que $1 + i$ est un diviseur de l'élément a dans G si, et seulement si, la partie réelle et la partie imaginaire de a ont la même parité.

2.B.3. *a*. Démontrer que si a, b, q, r, sont des éléments de G tels que $a = bq + r$ les éléments a et b ont les mêmes diviseurs communs dans G que les éléments b et r.

b. En déduire que si a et b sont deux éléments non nuls de G il existe un et un seul élément de G, que l'on notera $a \wedge b$, et qui possède les propriétés suivantes :

* $a \wedge b$ est un diviseur commun à a et b,
* tout diviseur commun à a et b divise $a \wedge b$,
* la partie réelle de $a \wedge b$ est strictement positive et sa partie imaginaire est positive ou nulle.

c. Calculer $(4 - 7i) \wedge (8 + i)$.

2.B.4. Soient a et b des éléments non nuls de G.

a. Démontrer qu'il existe des éléments u et v de G tels que $au + bv = 1$ si, et seulement si, $a \wedge b = 1$.

b. En déduire que $a \wedge b^2 = a^2 \wedge b^2 = 1$ dès que $a \wedge b = 1$.

c. Soit c un élément de G; démontrer que si $a \wedge b = 1$ et si a est un diviseur de bc alors a est un diviseur de c.

III

Les cubes associés, comme il a été vu dans la première partie, aux triplets (a, b, c) d'éléments de G non tous nuls et tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ sont appelés des G-cubes. Un G-cube pour lequel a, b, c ont un diviseur commun dans G autre que $1, -1, i$ ou $-i$ est dit réductible (relativement à sa projection sur le plan de cote nulle); tout autre G-cube sera dit irréductible.

3.1. Combien y a-t-il de G-cubes irréductibles associés aux triplets (a, b, c) vérifiant $abc = 0$?

On suppose dorénavant que a, b, c sont des éléments non nuls de G, *tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 0$, et tels que les seuls diviseurs communs à a, b, c dans* G *soient* $1, -1, i$ *et* $-i$.

3.2. *a*. Démontrer que $a \wedge b = b \wedge c = c \wedge a = 1$.

b. Démontrer que $1 + i$ divise un des trois éléments a, b ou c mais ne peut en diviser qu'un seul.

3.3. On suppose que $1 + i$ est un diviseur de c.

a. Démontrer que 2 est un diviseur de $(a + ib) \wedge c$.

b. On pose :

$$2d = (a + ib) \wedge c \; ; \qquad 2ds = a + ib \; ; \qquad 2dt = c.$$

Démontrer que :

$$s \wedge t = 1 \; ; \quad sa = d(s^2 - t^2) \; ; \quad isb = d(s^2 + t^2).$$

c. Démontrer que s n'est pas nul et que $\frac{d}{s}$ est égal à $1, -1, i$ ou $-i$.

Tournez la page S. V. P.

3.4. *a.* Démontrer que l'arête l du G-cube associé à (a, b, c) est un entier supérieur strictement à 1 en le calculant en fonction de s et t.

b. Démontrer que 2 est un diviseur dans G de $|s^2| - s^2$ et de $|t^2| - t^2$.

Démontrer que l est impair.

3.5. On se donne deux éléments s' et t' non nuls de G tels que :

$$s' \wedge t' = 1 \qquad \text{et} \qquad |s'^2| + |t'^2| \quad \text{soit impair.}$$

Démontrer qu'au triplet $(s'^2 - t'^2, \ -i(s'^2 + t'^2), \ 2s't')$ d'éléments de G est associé un G-cube irréductible.

3.6. *a.* Existe-t-il des G-cubes irréductibles d'arêtes 3, 5 et 7 ?

b. Dans chaque cas affirmatif dessiner la projection sur le plan de cote nulle d'un tel G-cube.

3.7. Démontrer qu'il existe deux G-cubes irréductibles d'arête 9 tels qu'on ne puisse passer de la projection de l'un à la projection de l'autre par une similitude du plan de cote nulle.

3.8. Démontrer qu'un G-cube est réductible si, et seulement si, il existe une similitude du plan de cote nulle, de rapport λ, $0 < \lambda < 1$, qui permet de passer de la projection de ce G-cube à celle d'un autre G-cube.

CAPES externe de Mathématiques session 1981 seconde composition

solution proposée par Dany-Jack Mercier

IUFM de Guadeloupe, Morne Ferret,
BP517, Abymes cedex 97178,
dany-jack.mercier@univ-ag.fr

NB : Le sujet de l'épreuve n'est pas joint à ce document. Il pourra être téléchargé sur le site Megamaths.

[0] [capesexterne1981comp2s] v1.00 AG2
Site web MégaMaths : http ://megamaths.perso.neuf.fr/

Fichier tex jusqu'à la partie I.4 incluse (ueae0025) puis scan de mon manuscrit.

1.a) Puisque h est bijective, l'égalité $f\circ g=h$ entraîne l'injectivité de g. En effet :

$$g(x)=g(x')\Rightarrow f[g(x)]=f[g(x')]\Rightarrow h(x)=h(x')\Rightarrow x=x'.$$

Comme g est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie $\overrightarrow{E}$, dire que g est injective équivaut à dire que g est bijective. Ainsi g^{-1} existe et l'on peut écrire $g\circ f=g\circ f\circ g\circ g^{-1}=g\circ h\circ g^{-1}=h$ puisqu'une homothétie commute avec tout endomorphisme de $\overrightarrow{E}$ ([1] Exercice 18).

1.b) On peut avoir $f\circ g=0$ et $g\circ f\neq 0$. Ecrire $f\circ g=0$ revient en effet à écrire l'inclusion $\operatorname{Im} g\subset \operatorname{Ker} f$. Par exemple, cette inclusion est vérifiée si f est la projection vectorielle sur $\operatorname{Vect}(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ parallèlement à $\operatorname{Vect}(\overrightarrow{k})$, et si g est définie par $g(\overrightarrow{i})=g(\overrightarrow{j})=g(\overrightarrow{k})=\overrightarrow{k}$. Et pourtant dans ce cas $g\circ f(\overrightarrow{i})=g(\overrightarrow{i})=\overrightarrow{k}$ n'est pas nul.

2) Soit I la matrice identité. Comme

$$\begin{cases}(1)\Leftrightarrow {}^tMM=l^2I\\ (2)\Leftrightarrow M^tM=l^2I,\end{cases}$$

il suffit d'appeler f (resp. g) l'endomorphisme de matrice ${}^tM$ (resp. M) dans la base $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ et d'appliquer la question précédente pour obtenir

$$(1)\ \Leftrightarrow\ f\circ g=l^2Id\ \Leftrightarrow\ g\circ f=l^2Id\ \Leftrightarrow\ (2).$$

Autre solution (qui n'utilise pas la question 1) : Notons $\mathrm{O}(3)$ le groupe des matrices orthogonales de taille 3. On sait que $N\in\mathrm{O}(3)$ si et seulement si N est inversible et ${}^tN=N^{-1}$. On sait aussi que cela revient à dire que les trois vecteurs-colonnes de N forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. On applique ces résultats :

$$(1)\quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{l}M\in\mathrm{O}(3)\ \Leftrightarrow {}^t\left(\frac{1}{l}M\right)=\left(\frac{1}{l}M\right)^{-1}\quad\Leftrightarrow\ \frac{1}{l}{}^tM=lM^{-1}\quad(1')$$

$$(2)\quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{l}{}^tM\in\mathrm{O}(3)\Leftrightarrow {}^t\left(\frac{1}{l}{}^tM\right)=\left(\frac{1}{l}{}^tM\right)^{-1}\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{l}M=l\,{}^tM^{-1}\quad(2')$$

et clairement $(1')\Leftrightarrow(2')$.

3.a) Les points $A(a_1,a_2,0)$, $B(b_1,b_2,0)$ et $C(c_1,c_2,0)$ sont les projetés des sommets A', B', C' d'un tel cube si et seulement si il existe trois réels a_3, b_3, c_3

[0] [ueae0025] v1.02 /cmon0008

et un réel strictement positif l tels que les points $A'(a_1, a_2, a_3)$, $B'(b_1, b_2, b_3)$ et $C'(c_1, c_2, c_3)$ vérifient

$$OA' = OB' = OC' = l \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OA'}.\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB'}.\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OC'}.\overrightarrow{OA'} = 0,$$

ce qui correspond aux conditions (1) (ou (2)) (FIG. 1).

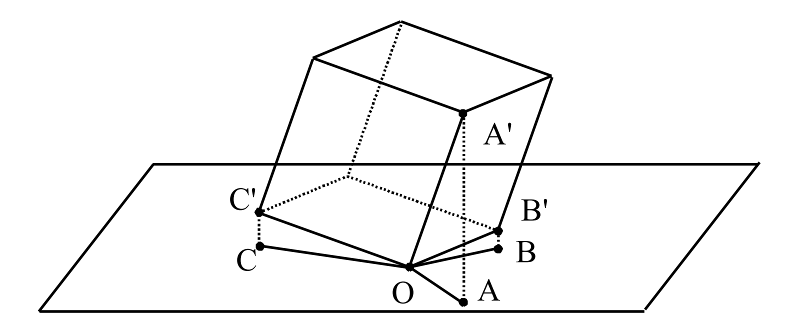


FIG. 1 – Représentation du cube et des projetés des arêtes issues de O

Tout revient donc à prouver que la condition

$$(C) \quad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 0 \\ a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \neq 0 \end{cases}$$

équivaut à l'existence de $(a_3, b_3, c_3, l) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*$ vérifiant (2). On a

$$\begin{aligned}(C) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2\right) - \left(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2\right) + 2i\,(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) = 0 \\ a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists l \in \mathbb{R}^* \quad \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = l^2 \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0. \end{cases} \qquad (C')\end{aligned}$$

Clairement (2) entraîne (C'). Réciproquement, si (C') a lieu, prouver (2) revient à trouver trois réels a_3, b_3, c_3 tels que

$$\begin{cases} a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 = 0 \\ a_3a_1 + b_3b_1 + c_3c_1 = 0 \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = l^2. \end{cases}$$

Les deux premières égalités définissent soit une droite, soit un plan, de sorte qu'il existe $(a_3', b_3', c_3') \neq (0,0,0)$ les vérifiant, et il suffit ensuite de choisir

$$(a_3, b_3, c_3) = \frac{l}{\sqrt{a_3'^2 + b_3'^2 + c_3'^2}} \left(a_3', b_3', c_3'\right)$$

pour que la troisième équation soit satisfaite. On vient de prouver l'implication $(C') \Rightarrow (2)$.

3.b) On a $l = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}$. D'après (2), la matrice $\frac{1}{l}\,{}^tM$ est orthogonale, donc

$$\frac{1}{l}\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{l}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \wedge \frac{1}{l}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

et l'on obtient

$$\begin{cases} a_3 = \pm\dfrac{1}{l}\left(b_1c_2 - c_1b_2\right) \\ b_3 = \pm\dfrac{1}{l}\left(c_1a_2 - a_1c_2\right) \\ c_3 = \pm\dfrac{1}{l}\left(a_1b_2 - b_1a_2\right). \end{cases}$$

4.a) Avec les notations de la question 3.a),

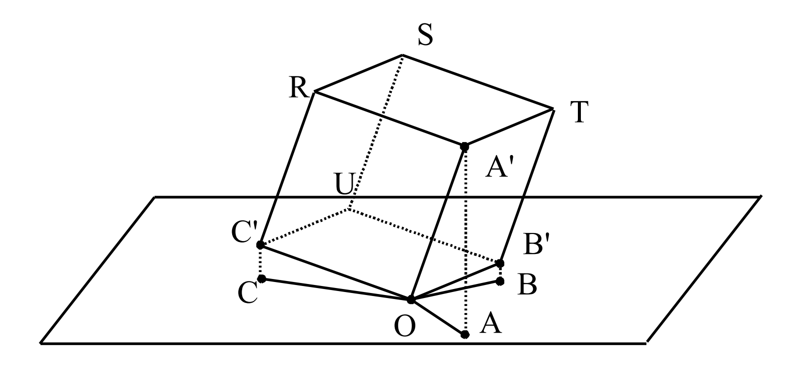


FIG. 2 – Notations

$$A'\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ a_3 \end{pmatrix},\quad B'\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ b_3 \end{pmatrix},\quad C'\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

La question précédente donne $l = 5$, $a_3 = 4 > 0$, $b_3 = -3$ et $c_3 = 0$, soit

$$A'\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},\quad B'\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix},\quad C'\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les autres sommets s'obtiennent en appliquant la règle du parallélogramme : $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OC'}$, ..., $\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$, avec les notations de la FIG. 2.

Finalement

$$R\begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix},\quad S\begin{pmatrix}5\\7\\1\end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix}0\\7\\1\end{pmatrix},\quad U\begin{pmatrix}5\\4\\-3\end{pmatrix}.$$

Les faces du cube se projettent suivant des parallélogrammes, ce qui explique les figures obtenues par projections sur xOy puis yOz (FIG. 3).

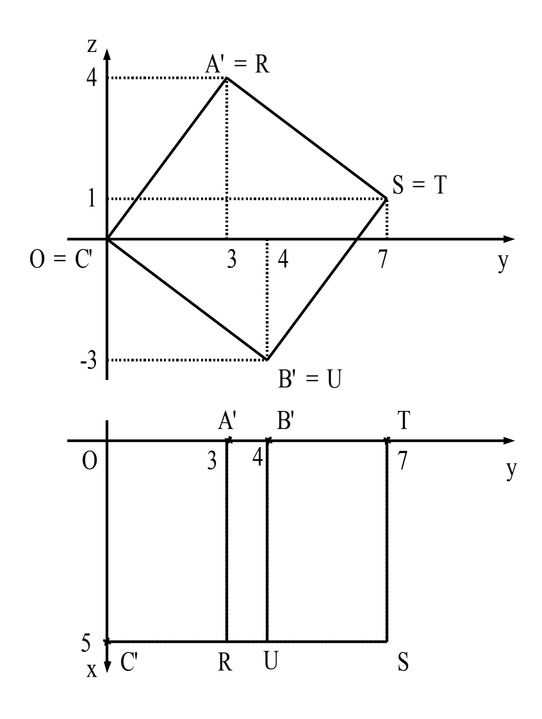


FIG. 3 – Projections du cube sur xOy et yOz

4.b) On a $c^2 = -a^2 - b^2 = -32 + 24i$. Posons $c = x + iy$. Alors

$$c^2 = -32 + 24i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -32 \\ xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -32 \\ x^2 \times \left(-y^2\right) = -144 \\ xy > 0. \end{cases}$$

Ainsi x^2 et $-y^2$ sont racines de l'équation $X^2 + 32X - 144 = 0$. On trouve $x^2 = 4$ et $-y^2 = -36$, d'où $x = \pm 2$ et $y = \pm 6$. La condition $xy > 0$ nous impose de choisir x et y de même signe, et d'obtenir $c = \pm(2 + 6i)$.

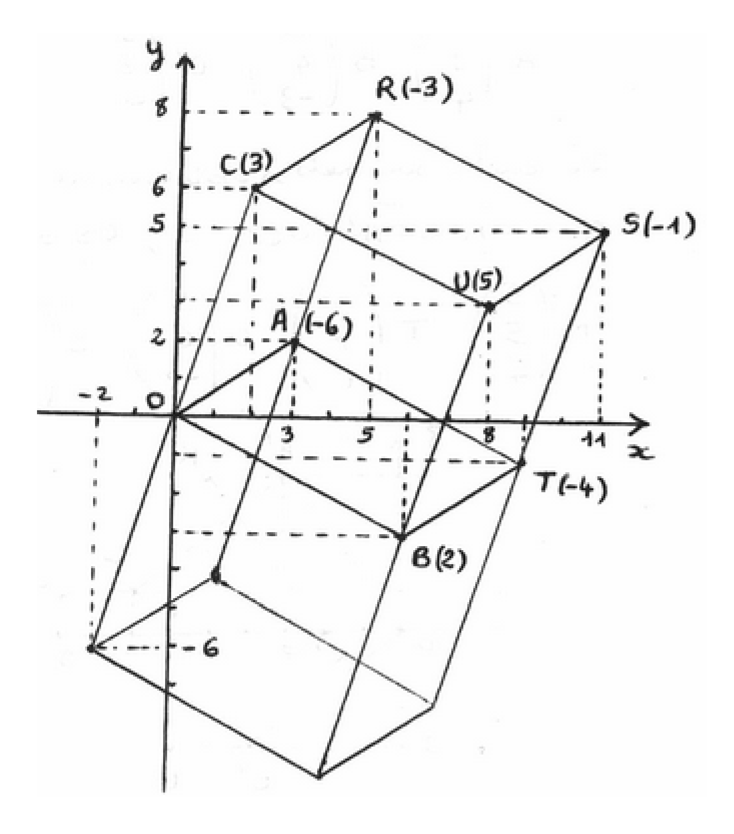


FIG. 4 – Projetés des 2 cubes dans le plan xOy

Dans la cas où $c = 2+6i$, l'énoncé nous demande de tout expliciter. On a alors

$$A' \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B' \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad C' \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

et $l = \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} = 7$. Puis

$$\begin{cases} a_3 = \pm\frac{1}{7}(36+6) = \pm 6 \\ b_3 = \pm\frac{1}{7}(4-18) = \mp 2 \\ c_3 = \pm\frac{1}{7}(-9-12) = \mp 3. \end{cases}$$

Pour le choix $c_3 = 3$ de l'énoncé, les autres sommets seront

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OC'} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dans la FIG. 4, on a noté abusivement R, S, T, U les projetés des points R, S, T, U sur le plan xOy.

Suite : voir mon manuscrit scanné pour pouvoir répondre à un mégamathien :)

Bibliographie

[1] D.-J. Mercier, Exercices pour le CAPES mathématiques (externe et interne) & l'agrégation interne, Algèbre, arithmétique et géométrie, Vol. I, Publibook, 2005.

I.1.5.a

Pour tout $z = x + iy$,

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \varphi(x+iy) = x\varphi(1) + y\varphi(i) = \frac{z+\overline{z}}{2}\varphi(1) + \frac{z-\overline{z}}{2i}\varphi(i) \\ &= \frac{\varphi(1) - i\varphi(i)}{2}z + \frac{\varphi(1)+i\varphi(i)}{2}\overline{z} = uz + v\overline{z}\end{aligned}$$

en posant $(u,v) = \left(\frac{\varphi(1)-i\varphi(i)}{2}, \frac{\varphi(1)+i\varphi(i)}{2}\right)$. L'existence du couple (u,v) est assurée. L'unicité se montre ainsi : si $\varphi(z) = uz + v\overline{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, nécessairement

$$\begin{cases} \varphi(1) = u + v \\ \varphi(i) = (u-v)\,i \end{cases}$$

donc $(u,v) = \left(\frac{\varphi(1)-i\varphi(i)}{2}, \frac{\varphi(1)+i\varphi(i)}{2}\right)$.

I.1.5.b Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matrice de φ dans la base $(1,i)$. On a

$$\begin{cases} u = \frac{\varphi(1)-i\varphi(i)}{2} = \frac{1}{2}(a+ib-i(c+id)) = \frac{1}{2}(a+d+i(b-c)) \\ v = \frac{\varphi(1)+i\varphi(i)}{2} = \frac{1}{2}(a+ib+i(c+id)) = \frac{1}{2}(a-d+i(b+c)) \end{cases}$$

de sorte que $|u| = |v|$ équivale à

$$(a+d)^2 + (b-c)^2 = (a-d)^2 + (b+c)^2$$

ou encore à $ad - bc = 0$. On reconnait le déterminant de M. Ainsi

$$|u| = |v| \Leftrightarrow \det M = 0 \Leftrightarrow \varphi \text{ non bijective.}$$

I.1.6 On a $(ua+v\overline{a})^2 + (ub+v\overline{b})^2 + (uc+v\overline{c})^2 = 0$, donc en développant :

$$uv(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2) = 0.$$

Comme $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, on obtient $uv = 0$, et $\varphi(z) = uz$ ou $\varphi(z) = u\overline{z}$. On reconnaît les expressions complexes de similitudes vectorielles laissant fixe le vecteur 0 de $\mathbb{C}$.

I.1.7

Soit φ la similitude vectorielle définie au I.1.6. Notons s la similitude affine du plan xOy dans lui-même, de centre O et de partie linéaire φ. Notons encore $\mathcal{C}$ = OA'B'C'RSTU un cube associé à ABC (cf fig 2)

S'il existe une similitude σ de l'espace prolongeant s, alors σ sera de rapport connu q (celui de φ) et en notant $\vec{\sigma}$ la partie linéaire de σ, on aura $\vec{\sigma}(\mathbb{R}\vec{k}) = \mathbb{R}\vec{k}$ (conservation de l'orthogonalité).

Donc $\vec{\sigma}(\vec{k}) = \pm q\,\vec{k}$.

Réciproquement, prenons par exemple $\vec{\sigma}(\vec{k}) = q\,\vec{k}$. $\vec{\sigma}$ est la similitude vectorielle définie par $\vec{\sigma}(\vec{k}) = q\vec{k}$ et $\vec{\sigma}|_{\mathrm{Vect}(\vec{\imath},\vec{\jmath})} = \varphi$. Soit σ l'application affine tq $\sigma(O) = O$ et de partie linéaire $\vec{\sigma}$. C'est une similitude, donc σ transformera le cube $\mathcal{C}$ en un cube

$$\sigma(\mathcal{C}) = O_1 A'_1 B'_1 C'_1 R_1 S_1 T_1 U_1$$

Si p désigne la projection orthogonale sur le plan xOy, on a :

$$(A'A) \perp (xOy) \Rightarrow \sigma(A')\underbrace{\sigma(A)}_{=\varphi(A)} \perp (xOy) \quad \text{car } xOy \text{ invariant par } \sigma$$

$$\Rightarrow p(\sigma(A')) = \varphi(A)$$

De même $\begin{cases} p(\sigma(B')) = \varphi(B) \\ p(\sigma(C')) = \varphi(C) \end{cases}$

de sorte que le cube $\sigma(\mathcal{C})$ soit "au dessus" des points $\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c)$ comme désiré.

<u>NB</u> : Sous l'hypothèse $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, les conditions

$$(C) : \begin{cases} a^2+b^2+c^2=0 \\ a_1^2+b_1^2+c_1^2 \neq 0 \end{cases} \quad \text{se réduisent à } a^2+b^2+c^2=0.$$

En effet, si $a^2+b^2+c^2=0$ et si $a_1^2+b_1^2+c_1^2=0$, alors $a_1=b_1=c_1=0$ donc $a = ia_2$, $b = ib_2$, $c = ic_2$ et $(ia_2)^2+(ib_2)^2+(ic_2)^2=0$ entraine $a_2=b_2=c_2$, d'où $a=b=c=0$, ce qui est absurde.

2.A.1 Si $z = x+iy \in G$ et $p = m+ni \in G$, alors

$$|z-p| < 1 \Leftrightarrow (x-m)^2+(y-n)^2 < 1 \Leftrightarrow x-m=0 \text{ et } y-n=0$$
$$\Leftrightarrow z = p$$

de sorte que $k(z) = 1$.

<u>NB</u> : G, encore noté $\mathbb{Z}[i]$, est l'anneau des entiers de Gauss.

I.2.A.2 Il est facile de voir que les applications ci-dessous sont bien définies, bijectives et conservent les éléments de G, et d'en déduire $k(z) = k(z+1) = k(z+i) = k(iz) = k(\bar{z})$.
On a posé $K(z) = \{p \in G \,/\, |z-p| < 1\}$.

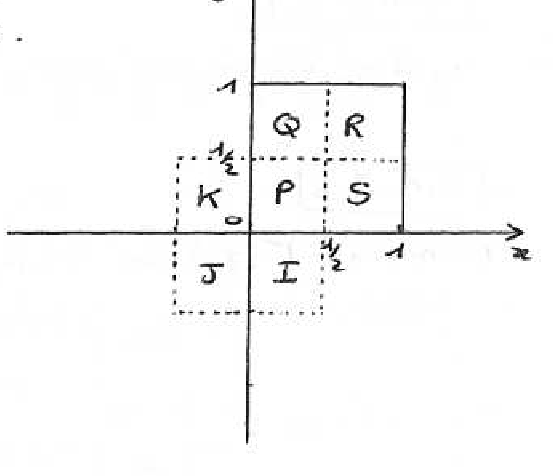
$$\begin{array}{rcl} K(z) & \longrightarrow & K(z+1) \\ p & \longmapsto & p+1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} K(z) & \longrightarrow & K(z+i) \\ p & \longmapsto & p+i \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} K(z) & \longrightarrow & K(iz) \\ p & \longmapsto & ip \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} K(z) & \longrightarrow & K(\bar{z}) \\ p & \longmapsto & \bar{p} \end{array}$$

On déduit par récurrence sur $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{k(z) = k(z+m+in)}$$

formule que l'on peut étendre à $m, n \in \mathbb{Z}$.



* Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$k(z) = k(z'')$ où $z'' = z - ([x] + i[y])$
$= x'' + iy''$

avec $\begin{cases} x'' = x - [x] \in [0,1[\\ y'' = y - [y] \in [0,1[\end{cases}$

z'' appartient donc à l'un des 4 carrés fermés P, Q, R, S de la figure ci-dessus. On peut en fait toujours obtenir un z' dans P :

a) Si $z'' \in P$, on prend $z' = z''$

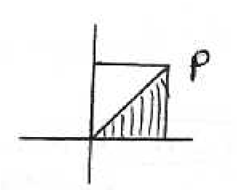
b) Si $z'' \in Q$, $k(z'') = k(z''-i)$ où $z''-i \in I$, puis par symétrie par rapport à Ox : $k(z''-i) = k(\overline{z''-i})$ avec $z' \doteq \overline{z''-i} \in P$.

c) Si $z'' \in R$, $k(z'') = k(z''')$ avec $z''' \doteq z'' - (1+i) \in J$, et grâce à la symétrie $z \mapsto i^2 z = -z$ par rapport à O :

$$k(z''') = k(i^2 z''')$$

Il suffit de prendre $z' = i^2 z''' \in P$

d) Si $z'' \in S$, $k(z'') = k(z''-1)$ où $z''-1 \in K$, et $z \mapsto i^3 z$ représentant la rotation de centre O et d'angle $\frac{3\pi}{2}$, $k(z''-1) = k(i^3(z''-1))$ avec $z' \doteq i^3(z''-1) \in P$.



On a montré : $\forall z \in \mathbb{C} \quad \exists z' \in P \quad k(z) = k(z')$

Posons $z' = x' + iy' \in P$. Si $x' \leq y'$, on a terminé. Si $x' \geq y'$, il suffit de prendre $z'_1 = y' + ix'$ pour avoir $\operatorname{Im} z'_1 \leq \operatorname{Re} z'_1$ et $k(z) = k(z') = k(z'_1)$.
En effet, $k(z') = k(z'_1)$ est assuré puisque la symétrie

$$s : x + iy \longmapsto y + ix$$

réalise une bijection de $K(z')$ sur $K(z'_1)$.

2.A.3.a

$|z'|^2 = x'^2 + y'^2 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ entraîne $|z'| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

2.A.3.b

$$p = m + in \in K(z') \iff (x'-m)^2 + (y'-n)^2 < 1$$

$$\iff \begin{cases} |x'-m| < 1 \\ |y'-n| < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x'-1 < m < x'+1 \\ y'-1 < n < y'+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < m < \frac{3}{2} \\ -1 < n < \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ ou } 1 \\ n = 0 \text{ ou } 1 \end{cases}$$

d'où $p \in \{0, i, 1, 1+i\}$.

2.A.3.c

$$|z'-1|^2 = (x'-1)^2 + y'^2 \leq (x'-1)^2 + x'^2 = 2x'^2 - 2x' + 1$$

$$\leq \underbrace{2x'}_{\geq 0}\underbrace{(x'-1)}_{< 0} + 1 \leq 1$$

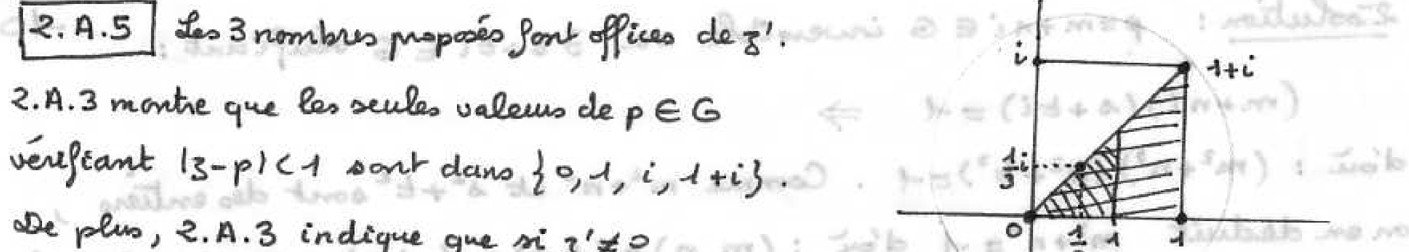
Donc $|z'-1|^2 \leq 1$ avec égalité ssi $2x'(x'-1) = 0$, ie $x' = 0$, ce qui entraîne $y' = 0$ et $z' = 0$.

2.A.4 * Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $k(z) = z'$ où z' défini en 2.A.2, $K(z') \subset \{0, 1, i, 1+i\}$ d'après 2.A.3, donc $0 \leq k(z') \leq 4$. En fait $k(z') \geq 1$ car $p = 0$ vérifie $|z' - 0| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$

* $z \in G \Rightarrow k(z) = 1$ d'après 2.A.1

$z \notin G \Rightarrow z' \neq 0 \Rightarrow |z'-1| < 1$ et $|z'| < 1$ (2.A.3.c) $\Rightarrow k(z') \geq 2$

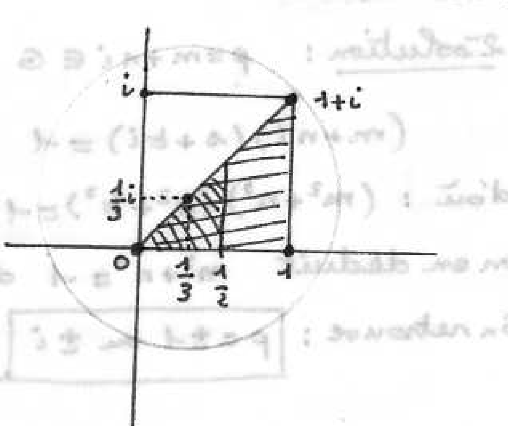
Finalement : $z \in G \iff k(z) = 1$



2.A.5 Les 3 nombres proposés sont affixes de z'.

2.A.3 montre que les seules valeurs de $p \in G$ vérifiant $|z-p|<1$ sont dans $\{0, 1, i, 1+i\}$.

De plus, 2.A.3 indique que si $z' \neq 0$, $|z'|<1$ et $|z'-1|<1$ donc $\boxed{\{0,1\} \subset K(z')}$



On détermine ensuite si i et $1+i$ sont dans $K(z')$ par le calcul :

1) Si $z' = \frac{1+i}{3}$ $\quad |z'-i|^2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9} < 1$

$|z'-1-i|^2 = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} < 1$ donc $\boxed{k\left(\frac{1+i}{3}\right) = 4}$

2) Si $z' = \frac{1+i}{4}$ $\quad |z'-i|^2 = \frac{1}{16} + \frac{9}{16} < 1$

$|z'-1-i|^2 = \frac{9}{16} + \frac{9}{16} > 1$ donc $\boxed{k\left(\frac{1+i}{4}\right) = 3}$

3) Si $z' = \frac{5+i}{12}$ $\quad |z'-i|^2 = \frac{25}{144} + \frac{121}{144} > 1$

$|z'-1-i|^2 = \frac{49}{144} + \frac{121}{144} > 1$ donc $\boxed{k\left(\frac{5+i}{12}\right) = 2}$

2.B.1 Clairement $G \neq \emptyset$ (car $0 \in G$) et :

$$\forall p, q \in G \quad p-q \in G \quad \text{et} \quad pq \in G$$

<u>G est donc un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$</u>

* <u>Éléments inversibles de G</u> :

$p = m+ni \in G$ est inversible dans G ssi il existe $s+ti \in G$ tel que

$$(m+ni)(s+ti) = 1$$

Ainsi $(m,n) \neq (0,0)$ et $s+ti = \frac{1}{m+ni} = \frac{m-ni}{m^2+n^2}$ doit appartenir à G.

- Si $m \neq 0$ et $n \neq 0$, $\left|\frac{m}{m^2+n^2}\right| \leq \frac{m^2}{m^2+n^2} < 1$, donc $\frac{m}{m^2+n^2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow m=0$ absurde.
- Si $m=0$, $s+ti = \frac{-ni}{n^2} = -\frac{1}{n} i \in G$ ssi $\frac{1}{n} \in \mathbb{Z}$ ie $n = \pm 1$
- Si $n=0$, $s+ti = \frac{m}{m^2} = \frac{1}{m} \in G$ ssi $\frac{1}{m} \in \mathbb{Z}$ ie $m = \pm 1$

<u>Les éléments inversibles de G sont donc : ± 1 et $\pm i$</u>

<u>2° solution</u> : $p = m+ni \in G$ inversible ssi $\exists\, s+ti \in G$ vérifiant :

$$(m+ni)(s+ti) = 1$$

d'où : $(m^2+n^2)(s^2+t^2) = 1$. Comme m^2+n^2 et s^2+t^2 sont des entiers, on en déduit $m^2+n^2 = 1$ d'où : $(m,n) = (1,0)$ ou $(-1,0)$ ou $(0,1)$ ou $(0,-1)$.

On retrouve : $\boxed{p = \pm 1 \text{ ou } \pm i}$. On vérifie qu'ils sont bien inversibles <u>dans G</u>.

2.B.2.a $\frac{a}{b} \in \mathbb{C} \Rightarrow \exists q \in G \quad \left|\frac{a}{b} - q\right| < 1 \Rightarrow |a - bq| < |b|$

Posons $r = a - bq \in G$. On aura $a = bq + r$ avec $|r| < |b|$.

(q, r) unique $\Leftrightarrow \exists! q \quad \left|\frac{a}{b} - q\right| < 1 \Leftrightarrow k\left(\frac{a}{b}\right) = 1 \underset{2.A.4}{\Leftrightarrow} \frac{a}{b} \in G$

2.B.2.b b est diviseur de 2 dans G ssi (b = m+ni) $\frac{2}{b} = \frac{2}{m+ni} = \frac{2(m-ni)}{m^2+n^2} \in G \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m}{m^2+n^2} \in \mathbb{Z} \\ \frac{-2n}{m^2+n^2} \in \mathbb{Z} \end{cases}$

ce qui entraîne : $\frac{4m^2}{(m^2+n^2)^2} + \frac{4n^2}{(m^2+n^2)^2} = \frac{4}{m^2+n^2} \in \mathbb{Z}$

d'où $m^2+n^2 \in \{1 ; 2 ; 4\}$

$m^2+n^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \text{ et } n = 0 \\ \text{ou} \\ n = \pm 1 \text{ et } m = 0 \end{cases}$

$m^2+n^2 = 2 \Rightarrow m, n \in \{-1, +1\}$

$m^2+n^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \text{ et } n = 0 \\ \text{ou} \\ n = \pm 2 \text{ et } m = 0 \end{cases}$

<u>Ccl</u> : <u>Les diviseurs de 2 dans G seront $1, -1, i, -i, 1+i, 1-i, -1+i, -1-i, 2, -2, 2i$ et $-2i$</u>

2.B.2.c $1+i$ est un diviseur de $a = m+ni$ ssi $\frac{a}{1+i} = \frac{m+ni}{1+i} = \frac{(m+ni)(1-i)}{2} \in G$

soit $\frac{m+n}{2} + i\,\frac{n-m}{2} \in G \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m+n}{2} \in \mathbb{Z} \\ \frac{m-n}{2} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow m - n \equiv 0\ [2]$

2.B.3.a $a = bq + r$

Si d est diviseur de a et b, $a = da'$ et $b = db'$ où $a', b' \in G$ d'où $da' = b'dq + r$

i.e. $r = d\underbrace{(a' - b'q)}_{\in G}$. Donc d sera diviseur de r (et de b).

Réc. si $\begin{cases} b = db' \\ r = dr' \end{cases}$ alors $a = d(b'q + r')$ et d sera div. de a et b.

2.B.3.b On pense à l'algorithme d'Euclide :

$a = bq + r \qquad |r| < |b| \qquad d|a$ et $d|b \Leftrightarrow d|b$ et $d|r$

$b = rq_1 + r_1 \qquad \Leftrightarrow d|r$ et $d|r_1$

$r = r_1q_2 + r_2 \qquad \Leftrightarrow d|r_1$ et $d|r_2$

$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$

$r_n = r_{n+1}q_{n+2} + r_{n+2} \qquad \Leftrightarrow d|r_{n+1}$ et $d|r_{n+2}$

Comme $|r_{n+2}| < |r_{n+1}| < \ldots < |r_1| < |r|$, la suite $(|r_n|)_n$ est décroissante strictement dans $\mathbb{N}$ tant qu'elle ne s'annule pas. Donc $r_n = 0$ à partir d'un certain rang. Disons $r_{n+2} = 0$. On a :

$r_n = r_{n+1}q_{n+2}$ et $\boxed{d|a \text{ et } d|b \Leftrightarrow d|r_{n+1}}$ (*)

r_{n+1} est diviseur commun à a et b et tout diviseur commun à a et b divise r_{n+1}

Les éléments inversibles de G sont $\pm i$, ± 1 et r_{n+1} vérifie (*) est parfaitement déterminé à une constante multiplicative inversible près (en effet, si α et β vérifient (*), on a $d|\alpha \Leftrightarrow d|\beta$ soit $\alpha|\beta$ et $\beta|\alpha$ d'où $\alpha = u\beta$ où u est inversible dans G).

Il suffit de constater que parmi les éléments $\pm r_{n+1}$, $\pm i r_{n+1}$ il y en a 1 et 1 seul vérifiant la condition "sa partie réelle est > 0 et sa partie imaginaire est ≥ 0" pour conclure à l'existence de $a \wedge b$.

2.B.3.c Calcul de $(4-7i)\wedge(8+i)$: On applique 2.B.2.a et l'algorithme précédent :

$$\frac{4-7i}{8+i} = \frac{7-12i}{13} \quad \text{donc} \quad \left|\frac{4-7i}{8+i} - (1-i)\right| < 1$$

$$|\underbrace{(4-7i)-(1-i)(8+i)}_{r=-5}| < |8+i|$$

soit $\underbrace{4-7i}_{a} = \underbrace{(1-i)}_{q}\underbrace{(8+i)}_{b} \underbrace{-5}_{r}$

Cherchons $(8+i)\wedge 5$:

$$\frac{8+i}{5} = \frac{8}{5}+\frac{1}{5}i \qquad \left|\frac{8+i}{5}-2\right|^2 = \frac{1}{5} < 1 \quad \text{d'où} \quad |8+i-10| < 5 \;\ldots$$

puis $\underbrace{8+i}_{a} = \underbrace{5}_{b}.\underbrace{2}_{q} + \underbrace{i-2}_{r}$

Cherchons $5\wedge(i-2)$:

$\frac{5}{i-2} = i+2 \in G$ donc $5 = (i-2)(i+2)+0$. Le reste est nul et le pgcd cherché sera $i-2$ à une cte inversible près. Vu le choix du 2.B.3.b, on prendra : $i(i-2) = -1-2i$ puis $-(-1-2i) = 1+2i$.

Soit :

$$\boxed{4-7i \wedge 8+i = 1+2i}$$

2.B.4.a * Si $a\wedge b = 1$, le dernier reste non nul de l'algorithme d'Euclide sera 1 (ou un él. inv. de G) donc :

$$a = bq+r$$
$$b = rq_1 + r_1$$
$$r = r_1 q_2 + r_2$$
$$\ldots$$
$$r_{n-1} = r_n q_{n+1} + \boxed{1}$$

De proche en proche, on constate que $r = a - bq$ appartient à l'idéal $(a)+(b)$ engendré par a et b, que $r_1 = b - rq_1 \in (a)+(b)$, ..., enfin que $1 = r_{n+1} \in (a)+(b)$ ie $1 = au+bv$ où u, v convenables.

* Réciproquement si $au+bv = 1$ et si $d|a$ et $d|b$, alors $d|1$ donc d est inversible. On a bien $a\wedge b = 1$ d'après 2.B.3.b.

2.B.4.b $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow au + bv = 1 \Rightarrow (au+bv)^2 = 1$

$$a(au^2 + 2buv) + b^2v^2 = 1$$

d'où $a \wedge b^2 = 1$

On applique à nouveau ce résultat : $a \wedge b^2 = 1 \Rightarrow a^2 \wedge b^2 = 1$

2.B.4.c On doit démontrer le Th. de Gauss :

$$\left.\begin{array}{l} a \mid bc \\ a \wedge b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a \mid c$$

$\exists q \quad bc = aq$ et $au + bv = 1$ entraîne $c = acu + \underline{bc}v$

$$= acu + aqv$$

$$= a(cu + qv) \text{ ie } a \mid c.$$

3.1 Une permutation de a, b, c donne le même G-cube (on change seulement le nom des sommets). Comme $abc = 0$, on peut supposer $a = 0$:

$b^2 + c^2 = 0 \Rightarrow c = \varepsilon i b$ où $\varepsilon = \pm 1$ d'où $(a,b,c) = (0, b, \varepsilon i b)$

b divise 0, b et $\varepsilon i b$. Comme le G-cube est irréductible, b sera un élément inversible de G soit ε' ou $\varepsilon' i$ (où $\varepsilon' = \pm 1$)

$$(a,b,c) = (0, \varepsilon', \varepsilon\varepsilon' i) \text{ ou } (0, \varepsilon' i, -\varepsilon\varepsilon')$$

Quitte à permuter b et c, on obtient les triplets $(a,b,c) = (0, \varepsilon, \varepsilon' i)$ où $\varepsilon = \pm 1$ et $\varepsilon' = \pm 1$, donc 4 triplets qui seront associés <u>à 8 G-cubes</u>.

<u>NB</u> : $(a,b,c) = (0, 1, i)$
$(0, -1, i)$
$(0, -1, -i)$
$(0, 1, -i)$

Ces 8 G-cubes sont obtenus à partir du cube formé sur le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par symétrie par rapport aux axes, aux plans de coordonnées et par rapport à O. (on le voit en calculant les coordonnées de A_0, B_0, C_0 correspondants à $(0,1,i)$, ... grâce à 1.3)

3.2.a Posons $\delta = a \wedge b$. Par hypothèse $a \wedge b \wedge c = 1$, soit $\delta \wedge c = 1$ et donc (2.B.4.b) $\delta \wedge c^2 = 1$.

Comme δ divise a, b et $c^2 = -a^2 - b^2$, δ divisera $\delta \wedge c^2 = 1$ soit $\delta = 1$.

3.2.b

D'après 2.B.2.c $1+i \mid a \Leftrightarrow \mathrm{Re}\, a \equiv \mathrm{Im}\, a$ [2]

$a^2+b^2+c^2=0 \Leftrightarrow a_1^2+b_1^2+c_1^2-(a_2^2+b_2^2+c_2^2)+2i(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)=0$

d'où $a_1^2+b_1^2+c_1^2 \equiv a_2^2+b_2^2+c_2^2$ [2]

(*) $\boxed{a_1+b_1+c_1 \equiv a_2+b_2+c_2 \quad [2]}$ (car $x^2 \equiv x$ [2])

On constate :

Si $a_1 \not\equiv a_2$, $b_1 \not\equiv b_2$ et $c_1 \not\equiv c_2$ alors (*) est en défaut. Il existe donc un élément a, b ou c, par ex. c, tel que $c_1 \equiv c_2$ [2].

On ne peut avoir $a_1 \not\equiv a_2$ et $b_2 \equiv b_2$ ((*) serait en défaut) ni $a_1 \equiv a_2$ et $b_1 \equiv b_2$ (autrement $1-i$ diviserait a, b et c en contradiction avec $a \wedge b \wedge c = 1$).

Ccl : 1+i divisera un et un seul des 3 éléments a, b, c.

3.3.a

* $1+i \mid c \Leftrightarrow c_1 \equiv c_2 \ [2]$ où $c = c_1 + i\, c_2$

On sait (3.2.b) que $\begin{cases} a_1 \not\equiv a_2 & [2] \\ b_1 \not\equiv b_2 & [2] \end{cases}$

$a^2+b^2+c^2=0 \Rightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$

$a_1(a_1+1) + b_1(b_1+1) + c_1^2 \equiv 0 \ [2]$

Comme $x^2 \equiv x \ [2]$, on déduit $c_1 \equiv 0 \ [2]$

Ainsi $c_1 \equiv c_2 \equiv 0 \ [2]$ et 2 divise c

* Montrons que 2 divise $a+ib$: $a+ib = a_1 + i a_2 + i(b_1 + i b_2) = a_1 - b_2 + i(a_2 + b_1)$

et tout revient à montrer que $a_1 - b_2 \equiv a_2 + b_1 \equiv 0 \ [2]$.

$a^2+b^2+c^2=0 \Rightarrow a_1 + b_1 + \underset{\equiv 0}{c_1} \equiv a_2 + b_2 + \underset{\equiv 0}{c_2} \ [2]$ (cf (*) du 3.2.b)

$\Rightarrow a_1 + b_1 \equiv a_2 + b_2 \Rightarrow \boxed{a_1 - b_2 \equiv a_2 + b_1 \ [2]}$ (1)

$a^2+b^2+c^2=0 \Rightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 + \underset{\equiv 0}{c_1 c_2} = 0 \Rightarrow \boxed{a_1 a_2 + b_1 b_2 \equiv 0 \ [2]}$ (2)

D'autre part, $2 \mid c \Rightarrow 4 \mid c^2 = -a^2 - b^2 \Rightarrow$ 4 divise $a^2+b^2 \Rightarrow 4 \mid a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2$

Notons $\begin{cases} a_1 - a_2 = 1 + 2u \\ b_1 - b_2 = 1 + 2v \end{cases}$. $a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2 \equiv 0 \ [4]$ s'écrira :

$(1+2u+a_2)^2 + (1+2v+b_2)^2 - a_2^2 - b_2^2 \equiv 0 \ [4]$

$2 + 2a_2 + 2b_2 \equiv 0 \ [4]$

$1 + a_2 + b_2 \equiv 0 \ [2]$

$\boxed{a_2 + b_2 \equiv 1 \ [2]}$

(1) entraine alors $\boxed{a_1 - b_1 \equiv a_2 + b_2 \equiv 1 \ [2]}$ que l'on injecte dans (2) :

$a_1 a_2 + b_1 b_2 \equiv 0 \ [2]$

$(b_1+1) a_2 + b_1(1-a_2) \equiv 0$

$\boxed{a_2 + b_1 \equiv 0}$ (3) → (1) et (3) entraînent bien :

$a_1 - b_2 \equiv a_2 + b_1 \equiv 0 \ [2]$

2° solution :

* $a^2+b^2+c^2=0 \Rightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

$a_1a_2+b_1b_2$ est pair car $a_1 \not\equiv a_2$ [2] et $b_1 \not\equiv b_2$ [2], donc c_1c_2 est pair

et comme $c_1 \equiv c_2$ [2], c_1 et c_2 seront pairs. Donc 2 divise c.

* On a $a_1 \not\equiv a_2$ [2] $\Rightarrow \exists a' \in G \quad a=2a'+1$ ou $a=2a'+i$

$b_1 \not\equiv b_2$ [2] $\Rightarrow \exists b' \in G \quad b=2b'+1$ ou $b=2b'+i$

$2|c \Rightarrow 4|c^2=-a^2-b^2 \Rightarrow$ 4 divise a^2+b^2. Ce n'est possible que dans les 2 cas suivants :

$$\begin{cases} a=2a'+1 \\ b=2b'+i \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a=2a'+i \\ b=2b'+1 \end{cases}$$

et alors 2 divise $a+ib$.

Ccl : 2 divisera $a+ib$ et c, donc $a+ib \wedge c \equiv 0$

3.3.b Posons $2d=(a+ib)\wedge c$, $2ds=a+ib$, $2dt=c$.

* $s\wedge t=1$?

2.B.4.a appliqué pour un pgcd quelconque $x\wedge y$ montre que $x\wedge y$ appartient à l'idéal $(x)+(y)$ de G engendré par x et y (utiliser l'algorithme d'Euclide).

Donc : $\exists u,v \in G \quad 2d=(a+ib)u+cv$

$$=2dsu+2dtv$$

d'où $1=su+tv \Rightarrow \boxed{s\wedge t=1}$ (2.B.4.c)

2° méthode : Si x divise s et t, 2dx divise $a+ib$ et c, donc divise $(a+ib)\wedge c=2d$. Par suite x divise 1 et $s\wedge t=1$.

* On a : $2ds^2=sa+isb$

$2dt=c \Rightarrow 4d^2t^2=c^2=-a^2-b^2 \Rightarrow (a^2+b^2)=-4d^2t^2$

$$(a-ib)\underbrace{(a+ib)}_{2ds}=-4d^2t^2$$

$$s(a-ib)=-2dt^2$$

$$sa-isb=-2dt^2$$

et pour finir : $\begin{cases} sa+isb=2ds^2 \\ sa-isb=-2dt^2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} sa=d(s^2-t^2) \\ isb=d(s^2+t^2) \end{cases}}$

3.3.c

* Si $s=0$, $\left.\begin{array}{l} 0\wedge t=1 \\ 0=-dt^2 \end{array}\right\} \Rightarrow t\neq 0$ et $d=0 \Rightarrow c=0$ absurde car $abc\neq 0$

* Les diviseurs de s et s^2-t^2 coïncident avec les diviseurs de s et t^2, et l'on a $s\wedge t^2 = s\wedge t = 1$, donc $s\wedge(s^2-t^2)=1$.

Le Th. de Gauss (2.B.4.c) montre que :

$$sa = d(s^2-t^2) \Rightarrow s\,|\,d \qquad \underline{\text{soit } d=\lambda s \text{ où } \lambda\in G}$$

alors : $\left\{\begin{array}{l} a=\lambda(s^2-t^2) \\ b=-i\lambda(s^2+t^2) \end{array}\right.$

λ divise a et b . Comme $a\wedge b=1$, on en déduit $\lambda=\frac{d}{s}\in\{\pm1\,;\,\pm i\}$

3.4.a $\ell^2=\frac{1}{2}\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2+a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)=\frac{1}{2}\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)$ (1.3.b)

or $|a|=\left|\frac{d}{s}(s^2-t^2)\right|=|s^2-t^2|$

$|b|=\left|\frac{d}{is}(s^2+t^2)\right|=|s^2+t^2|$

$|c|=|2dt|=2|dt|$

donc $\ell^2=\frac{1}{2}\left((s^2-t^2)(\bar{s}^2-\bar{t}^2)+(s^2+t^2)(\bar{s}^2+\bar{t}^2)+4|d|^2|t|^2\right)$

$=\frac{1}{2}\left(2|s|^4+2|t|^4+4|d|^2|t|^2\right)$

$=|s|^4+|t|^4+2|d|^2|t|^2$

$\ell^2=(|s|^2+|t|^2)^2$ puisque $|d|=|s|$

Donc $\boxed{\ell=|s|^2+|t|^2}$

Comme $s,t\in G\setminus\{0\}$, $|s|\geq 1$ et $|t|\geq 1$, et $\boxed{\ell\geq 2}$

3.4.b Soit $z=x+iy\in G$

$|z|^2-z^2=x^2+y^2-(x^2-y^2+2ixy)=2(y^2-ixy)$ est divisible par 2 pour tout $z\in G$.

$\ell=|s|^2+|t|^2=\underbrace{|s|^2-s^2+|t|^2-t^2}_{\text{divisible par 2}}+s^2+t^2$ montre que, si ℓ est pair,

s^2+t^2 sera divisible par 2 . $ib=\frac{d}{s}(s^2+t^2)$ le sera aussi car $\frac{d}{s}\in\{\pm1,\pm i\}$

donc $2|b$. Mais $2|c$ et $b\wedge c=1$ montrent que c'est absurde.

Donc ℓ est impair.

3.5 $\begin{cases} a = s'^2 - t'^2 \\ b = -i(s'^2 + t'^2) \\ c = 2s't' \end{cases}$ où $s' \wedge t' = 1$ et $|s'^2| + |t'^2|$ impair

$a^2+b^2+c^2 = (s'^2-t'^2)^2 - (s'^2+t'^2)^2 + 4s'^2t'^2 = 0$ donc (a,b,c) engendre bien un G-cube distinct de $(0,0,0)$ (car $s't' \neq 0$). Il faut prouver que ce G-cube est irréductible ie $a \wedge b \wedge c = 1$.

1er cas : Si a ou b est nul ($c \neq 0$ car $s't' \neq 0$). Par ex. $a = s'^2 - t'^2 = 0$. Alors $s' = \pm t'$ et $s' \wedge t' = 1 \Rightarrow t' \in \{\pm 1, \pm i\}$

d'où $(a,b,c) = (0, -2it'^2, \pm 2t'^2)$

et 2 divisera a, b et c. Le G-cube n'est pas irréductible !

2e cas : Si $abc \neq 0$, soit λ un diviseur commun à a, b et c.

$\lambda \mid ia + b = -2it'^2 \Rightarrow \lambda \mid 2t'^2$

$\lambda \mid ia - b = 2is'^2 \Rightarrow \lambda \mid 2s'^2$.

* Si $\lambda \wedge 2 = 1$, λ divisera t'^2 et s'^2, mais $s' \wedge t' = 1 \Rightarrow s'^2 \wedge t'^2 = 1$ donc $\lambda \in \{\pm 1, \pm i\}$ et $a \wedge b \wedge c = 1$

* Si $\lambda \wedge 2 \neq 1$, alors $\lambda \wedge 2 = \delta$ où $\delta = 1+i$ ou 2 (2.B.2.b) de sorte que $|\delta|^2 = 2$ ou 4

$$\underbrace{|s'^2| + |t'^2|}_{\text{impair}} = \underbrace{|s'^2| - s'^2 + |t'^2| - t'^2}_{\text{pair}} + s'^2 + t'^2 \Rightarrow s'^2 + t'^2 \text{ impair}$$

$$\Rightarrow |s'^2 + t'^2|^2 \text{ impair}$$

et $\lambda \mid b \Rightarrow \lambda \mid s'^2 + t'^2 \Rightarrow |\lambda|^2 \mid |s'^2 + t'^2|^2$

Comme $\delta \mid \lambda$ on aura $\underbrace{|\delta|^2}_{2\text{ ou }4}$ divise $|\lambda|^2$ divise $\underbrace{|s'^2+t'^2|^2}_{\text{impair}}$.

Ce qui est absurde.

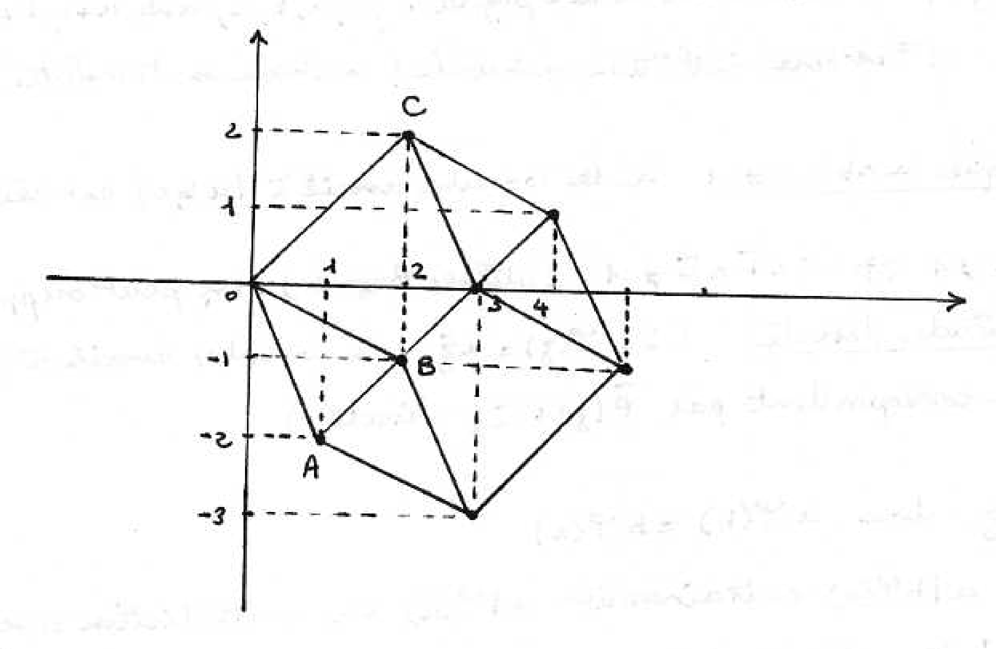
Finalement $a \wedge b \wedge c = 1$ et le G-cube est irréductible.

3.6.a Pour trouver des G-cubes irréductibles d'arête ℓ impair, on détermine $s', t' \in G$ tels que $s' \wedge t'$ et $|s'|^2+|t'|^2=\ell$ (3.4.a et 3.5)
puis on prend $(a,b,c) = (s'^2-t'^2, -i(s'^2+t'^2), 2s't')$

Si $\ell=3$, $3=|1|^2+|1+i|^2$ et $(a,b,c)=(1-2i, 2-i, 2+2i)$
Si $\ell=5$, $5=|1|^2+|2|^2$ et $(a,b,c)=(-3, -5i, 4)$
Si $\ell=7$, $7=|1+i|^2+|2+i|^2$ et $(a,b,c)=(-3-2i, 6-3i, 2-6i)$

3.6.b Pour $\ell=5$ et $\ell=7$, le dessin a déjà été donné en 1.4.

Pour $\ell=3$, $(a,b,c)=(1-2i, 2-i, 2+2i)$ et :



3.7 On obtient ces G-cubes comme en 3.6 :

$9=|2|^2+|1+2i|^2$ d'où $(a,b,c)=(5-4i, 4-3i, 4+8i)$
$9=|1|^2+|2+2i|^2$ d'où $(a,b,c)=(1-8i, 8-i, 4+4i)$

Ainsi $|1-8i|=|8-i|$. 2 arêtes projetées du 2-cube ont même longueur.
S'il existait une similitude transformant la projection du 2-cube en la proj du 1-cube, on devrait avoir 2 arêtes projetées du 1-cube de m longueur, ce qui est faux car les projections des sommets du 1-cube sont :

$a=5-4i$ $\quad a+b=9-7i$ $\quad 0$
$b=4-3i$ $\quad a+c=9+4i$ $\quad a+b+c=26+2i$ (sic)
$c=4+8i$ $\quad b+c=8+5i$

3.8

* Si (a,b,c) est associé à un G-cube réductible, il existe un diviseur d de a, b et c distinct de $\{\pm 1; \pm i\}$.

$$a^2+b^2+c^2=0 \Rightarrow \left(\frac{a}{d}\right)^2+\left(\frac{b}{d}\right)^2+\left(\frac{c}{d}\right)^2=0$$

donc $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}\right)$ détermine un G-cube et $\varphi : z \mapsto \frac{z}{d}$ est une similitude directe de rapport $\left|\frac{1}{d}\right| < 1$ répondant à la question ($d \in G \setminus \{0\}$ distinct de $\pm 1, \pm i$ entraîne, en effet, $|d| \geq 2$)

* Réciproquement, soit φ une similitude du plan de côte nulle transformant la projection d'un G-cube associé à (a', b', c') en la projection d'un G-cube associé à (a,b,c). Les sommets de la 1re projection : $\{0, a', b', c', a'+b', a'+c', b'+c', a'+b'+c'\}$ auront pour images par φ les sommets de la 2e projection : $\{0, a, b, c, a+b, a+c, b+c, a+b+c\}$
On a $\underline{\varphi(0)=0}$ (φ est une similitude vectorielle ! ou bien on translate)

<u>Il faut montrer que</u> $a \wedge b \wedge c \neq 1$ ie le G-cube associé à (a,b,c) est réductible :

Comme $a \wedge b \wedge c \neq 1 \Leftrightarrow \bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c} \neq 1$ (utiliser Bezout) on peut supposer que <u>φ est une similitude directe</u> (Si $\varphi(z) = u\bar{z}$, les G cubes associés à $(\bar{a}', \bar{b}', \bar{c}')$ et $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ se correspondent par $\bar{\varphi}(z) = \bar{u}z$ directe)

Alors $\varphi(z) = uz$ donc $a\varphi(b) = b\varphi(a)$
Si $a \wedge b = 1$, $a | b\varphi(a)$ entraînerait $a | \varphi(a)$ en contradiction avec "φ est de rapport < 1" donc $|\varphi(a)| < |a|$.

<u>Donc $a \wedge b = d \neq 1$</u>. δ^2 divise a^2 et b^2, donc $c^2 = -a^2 - b^2$ ce qui entraîne $a^2 \wedge b^2 \wedge c^2 \neq$ <u>donc $a \wedge b \wedge c \neq 1$</u> (puisque $a \wedge b \wedge c = 1 \Rightarrow a^2 \wedge b^2 \wedge c^2 = 1$ d'après 2.B.4.b)

FIN

Capes 1982

Le symbole Log désigne le logarithme népérien. $\prod_{n=1}^{+\infty} u_n$ est la limite, si elle existe, de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $p_n = u_1.u_2 \dots u_n$.

CAPES externe 1982 composition 1

I

I.1° a) Montrer l'existence, pour tout x réel strictement positif, de

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

Calculer $\Gamma(1)$.

I.1° b) Établir, pour tout x réel strictement positif, la relation :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

En déduire l'image par Γ de tout entier naturel non nul.

I.2° Dans ce paragraphe n est un entier naturel non nul donné.

I.2° a) Étudier les variations de l'application g définie par

$$g : \ [1, n] \to \mathbf{R}; \quad u \mapsto ue^{-u};$$

I.2° b) Étudier les variations de l'application h_n définie par

$$h_n : \ [0, n] \to \mathbf{R}; \quad t \mapsto e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.$$

Montrer que h_n atteint son maximum en un point t_n,

$$t_n \in [1, n] \quad \text{tel que} \quad h_n(t_n) = \frac{1}{n}\, t_n e^{-t_n}.$$

En déduire que, quel que soit t, $t \in [0, n]$, on a

$$0 \leqslant e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \frac{1}{ne}.$$

→ tapé jusqu'ici

I.3° Soit n un entier naturel non nul, x un réel strictement positif, et f_n l'application définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par

$$0 < t \leqslant n, \quad f_n(t) = t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad n < t, \quad f_n(t) = 0.$$

Montrer l'existence, pour tout x strictement positif, de

$$\mathrm{I}_n(x) = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt.$$

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} (\Gamma(x) - \mathrm{I}_n(x)) = 0.$$

(On pourra partager $\mathbf{R}_+$ en deux intervalles à l'aide d'un point a et majorer les deux intégrales obtenues sur les intervalles $[0, a]$ et $[a, +\infty[$).

I.4° a) n étant donné entier et k étant un entier naturel inférieur à n, on pose :

$$\mathrm{A}(k) = \int_0^1 u^{x+k-1}(1-u)^{n-k}\,du, \qquad x \in \mathbf{R}_+^*.$$

Déterminer une relation liant $\mathrm{A}(k)$ et $\mathrm{A}(k+1)$. En déduire la valeur de $\mathrm{I}_n(x)$. En conclure que

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(n!n^x \prod_{p=0}^{n} \frac{1}{x+p}\right).$$

I.4° b) Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \mathrm{Log}\, n$$

converge vers un nombre C compris entre 0 et 1.

I.4° c) Établir que pour tout x réel strictement positif on a

$$xe^{Cx} \prod_{n=1}^{+\infty}\left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right] = \frac{1}{\Gamma(x)}.$$

II.1° *a)* Montrer que si f est une application de classe C^1 (c'est-à-dire dérivable et de dérivée continue) définie sur un intervalle fermé $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, alors

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b (\sin \lambda t) f(t)\, dt = 0 \qquad (\lambda \in \mathbf{R}).$$

II.1° *b)* Montrer que l'application α définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$t = 0, \ \alpha(0) = 0, \qquad 0 < t \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \alpha(t) = \frac{\sin^2 at}{\sin t}$$

a réel fixé $0 < a < 1$ est de classe C^1.

II.1° *c)* Soit p un entier naturel et a un réel de l'intervalle ouvert $]0, 1[$, on pose

$$\theta_p(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin (2p + 1)t . \alpha(t) . dt.$$

Montrer que $\lim_{p \to +\infty} \theta_p(a) = 0$, que

$$\theta_p(a) - \theta_{p-1}(a) = \frac{(-1)^p a \sin a\pi}{2(p^2 - a^2)}, \text{ pour } p \geqslant 1, \quad \text{et que} \quad \theta_0(a) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sin a\pi}{4a}.$$

II.2° *a)* Soit

$$u(a) = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t}\, dt \qquad \text{et} \qquad v(a) = \int_0^1 \frac{t^{-a}}{1+t}\, dt$$

où a est un réel de l'intervalle ouvert $]0, 1[$. Montrer que $u(a)$ et $v(a)$ existent et que

$$u(a) + v(a) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t}\, dt.$$

On se propose, dans ce paragraphe, de calculer $u(a) + v(a)$.

II.2° *b)* Pour p entier naturel on note u_p et v_p les applications définies sur $]0, 1[$ par

$$u_p(a) = \sum_{k=0}^{p} \int_0^1 (-1)^k t^{k+a-1}\, dt \text{ quel que soit } p$$

$$v_0(a) = 0 \quad \text{et} \quad v_p(a) = \sum_{k=1}^{p} \int_0^1 (-1)^{k+1} t^{k-a-1}\, dt \quad \text{pour} \quad p \geqslant 1:$$

Montrer que les suites $(u_p(a))_{p \in \mathbf{N}}$ et $(v_p(a))_{p \in \mathbf{N}}$ convergent respectivement vers $u(a)$ et $v(a)$.

II.2° *c)* On appelle w_p l'application définie sur $]0, 1[$ par

$$w_p(a) = u_p(a) + v_p(a) + 4\frac{\theta_p(a)}{\sin a\pi},$$

θ_p est l'application définie en **II.1.c.**

Pour $p \geqslant 1$ calculer $w_p(a) - w_{p-1}(a)$.

Montrer que $w_p(a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$. En déduire la valeur de $u(a) + v(a)$.

II.3° *a)* Soit r un réel de l'intervalle $]0, 1[$. On considère l'application D définie par

$$\mathrm{D}: \ \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*; \qquad (x, y) \mapsto \left(u = x + y, v = \frac{y}{x}\right)$$

Montrer que D est bijective et que

$$\mathrm{D(S)} \subset \mathrm{Q} \quad \text{et} \quad \mathrm{D}^{-1}(\mathrm{P}) \subset \mathrm{S}$$

sachant que

$$\mathrm{P} = \left\{(u, v) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*, \quad u \in \left[r + \sqrt{r}, \frac{1}{r} + \frac{1}{\sqrt{r}}\right], \quad v \in \left[\sqrt{r}, \frac{1}{\sqrt{r}}\right]\right\}$$

$$\mathrm{Q} = \left\{(u, v) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*, \quad u \in \left[2r, \frac{2}{r}\right], \quad v \in [r^2, r^{-2}]\right\}$$

$$\mathrm{S} = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*, \quad x \in \left[r, \frac{1}{r}\right], \quad y \in \left[r, \frac{1}{r}\right]\right\}.$$

II.3° *b)* Montrer que si P, Q, S sont les domaines plans définis ci-dessus et a un réel de l'intervalle $]0, 1[$, alors

$$\iint_{\mathrm{P}} e^{-u} \frac{v^{-a}}{1+v}\, du\, dv \leqslant \iint_{\mathrm{S}} x^{a-1} y^{-a} e^{-(x+y)}\, dx\, dy \leqslant \iint_{\mathrm{Q}} e^{-u} \frac{v^{-a}}{1+v}\, du\, dv$$

et

$$\Gamma(a) . \Gamma(1 - a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

III

III.1° x étant un réel strictement supérieur à -1 et n un entier naturel non nul, on note

$$u_n(x) = \frac{x}{n} - \text{Log}\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

Montrer que la série de terme général $u_n(x)$ converge ainsi que la série de terme général $u_n^{(p)}(x)$ ($u_n^{(p)}$ est la dérivée $p^{\text{ième}}$ de u_n).

On note

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

On admettra que la fonction Φ est dérivable à tout ordre sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ et que pour tout réel x de $]-1, +\infty[$

$$\Phi^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^{(p)}(x).$$

III.2° x étant un réel strictement positif et γ la fonction définie par $\gamma(x) = \text{Log}\,\Gamma(x)$, montrer que γ' est croissante.

Montrer que $\gamma'(1) = -C$ et $\gamma'(2) = 1 - C$. En déduire le signe de $\gamma'(x)$ et les variations de γ.

III.3° a) $x \in [-1, 1]$, on pose

$$\varphi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x) = \Phi(x) - x + \text{Log}(1 + x).$$

Montrer que pour $p \geqslant 2$, $|\varphi^{(p)}(x)| \leqslant (p-1)!\, S_p$, avec $S_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$.

Montrer que φ est développable en série entière.

III.3° b) Montrer que la fonction Φ est développable en série entière et déterminer les coefficients et le rayon de convergence de cette série.

III.3° c) Montrer que, quel que soit x appartenant à l'intervalle $]0, 1[$,

$$\gamma(x) = -\text{Log}\,x - Cx + \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p} S_p x^p.$$

Montrer la relation

$$C = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p} S_p.$$

CAPES externe 1982 composition 1

I.U.F.M. Antilles Guyane — CAPES BLANC (92-93)

P.L.C.1. Mathématiques

Le symbole Log désigne le logarithme népérien.

$\prod_{n=1}^{+\infty} u_n$ est la limite, si elle existe, de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$p_n = u_1.u_2\ldots u_n$.

PREMIÈRE PARTIE

1.1.a. Montrer l'existence, pour tout x réel strictement positif, de :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt.$$

Calculer $\Gamma(1)$.

1.1.b. Etablir, pour tout x réel strictement positif, la relation :

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x).$$

En déduire l'image par Γ de tout entier naturel non nul.

1.2. Dans ce paragraphe n est un entier naturel non nul donné.

1.2.a. Etudier les variations de l'application g définie par

$$g : [1,n] \longrightarrow \mathbb{R}\ ; \quad u \longmapsto u\,e^{-u}.$$

1.2.b. Etudier les variations de l'application h_n définie par

$$h_n : [0,n] \longrightarrow \mathbb{R}\ ; \quad t \longmapsto e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.$$

Montrer que h_n atteint son maximum en un point t_n,

$$t_n \in [1,n] \quad \text{tel que} \quad h_n(t_n) = \frac{1}{n}\, t_n\, e^{-t_n}.$$

En déduire que, quel que soit t, $t \in [0,n]$, on a :

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{1}{ne}.$$

1.3. Soit n un entier naturel non nul, x un réel strictement positif, et f_n l'application définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$0 < t \leq n \qquad f_n(t) = t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

$$n < t \qquad f_n(t) = 0.$$

Montrer l'existence, pour tout x strictement positif, de

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt.$$

Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} (\Gamma(x) - I_n(x)) = 0.$$

(On pourra partager $\mathbb{R}_+$ en deux intervalles à l'aide d'un point a et majorer les deux intégrales obtenues sur les intervalles $[0,a]$ et $[a,+\infty[$).

1.4.a. n étant donné entier et k étant un entier naturel inférieur à n, on pose :

$$A(k) = \int_0^1 u^{x+k-1}(1-u)^{n-k}\,du, \qquad x \in \mathbb{R}_+^* .$$

Déterminer une relation liant A(k) et A(k + 1). En déduire la valeur de $I_n(x)$. En conclure que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(n!\, n^x \prod_{p=o}^{n} \frac{1}{x+p} \right).$$

1.4.b. Montrer que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \mathrm{Log}\, n$$

converge vers un nombre C compris entre 0 et 1.

1.4.c. Etablir que pour tout x réel strictement positif on a

$$x e^{Cx} \prod_{n=1}^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \right] = \frac{1}{\Gamma(x)} .$$

DEUXIEME PARTIE

2.1.a. Montrer que si f est une application de classe C^1 (c'est-à-dire dérivable et de dérivée continue) définie sur un intervalle fermé [a,b] à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b (\sin \lambda t)\, f(t)dt = 0 \qquad (\lambda \in \mathbb{R}) .$$

2.1.b. Montrer que l'application α définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par

$t = 0 \quad x(0) = 0$

$0 < t \le \frac{\pi}{2} \quad \alpha(t) = \dfrac{\sin^2 at}{\sin t}$

a réel fixé 0 < a < 1 est de classe C^1.

2.1.c. Soit p un entier naturel et a un réel de l'intervalle ouvert]0,1[, on pose

$$\theta_p(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2p+1)t.\alpha(t).dt.$$

Montrer que

$$\lim_{p \to +\infty} \theta_p(a) = 0;$$

que

$$\theta_p(a) - \theta_{p-1}(a) = \frac{(-1)^p a \sin a\pi}{2(p^2 - a^2)} \qquad \text{pour } p \ge 1$$

et que

$$\theta_o(a) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sin a\pi}{4a} .$$

2.2.a. Soient

$$u(a) = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t}\,dt \quad \text{et} \quad v(a) = \int_0^1 \frac{t^{-a}}{1+t}\,dt$$

où a est un réel de l'intervalle ouvert]0,1[.

Montrer que u(a) et v(a) existent et que

$$u(a) + v(a) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t}\,dt.$$

On se propose, dans ce paragraphe, de calculer u(a) + v(a).

2.2.b. Pour p entier naturel on note u_p et v_p les applications définies sur]0,1[par

$$u_p(a) = \sum_{k=o}^{p} \int_0^1 (-1)^k\, t^{k+a-1}\,dt \text{ quel que soit } p$$

$$v_o(a) = 0 \quad \text{et} \quad v_p(a) = \sum_{k=1}^{p} \int_0^1 (-1)^{k+1}\, t^{k-a-1}\,dt \quad \text{pour} \quad p \geq 1.$$

Montrer que les suites $(u_p(a))_{p\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers u(a) et v(a).

2.2.c. On appelle w_p l'application définie sur]0,1[par

$$w_p(a) = u_p(a) + v_p(a) + 4\,\frac{\theta_p(a)}{\sin a\pi},$$

θ_p est l'application définie en 2.1.c.

Pour $p \geq 1$ calculer $w_p(a) - w_{p-1}(a)$.

Montrer que $w_p(a) = \dfrac{\pi}{\sin a\pi}$.

En déduire la valeur de u(a) + v(a).

2.3.a. Soit r un réel de l'intervalle]0,1[. On considère l'application D définie par

$$D : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*; \quad (x,y) \longmapsto \left(u = x + y,\ v = \frac{y}{x}\right).$$

Montrer que D est bijective et que

$$D(S) \subset Q \quad \text{et} \quad D^{-1}(P) \subset S$$

sachant que

$$P = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ u \in \left[r + \sqrt{r},\ \frac{1}{r} + \frac{1}{\sqrt{r}}\right],\ v \in \left[\sqrt{r},\ \frac{1}{\sqrt{r}}\right] \right\}$$

$$Q = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ u \in \left[2r,\ \frac{2}{r}\right],\ v \in [r^2,\ r^{-2}] \right\}$$

$$S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ x \in \left[r,\ \frac{1}{r}\right],\ y \in \left[r,\ \frac{1}{r}\right] \right\}.$$

2.3.b. Montrer que si P, Q, S sont les domaines plans définis ci-dessus et a un réel de l'intervalle]0,1[, alors

$$\iint_P e^{-u}\,\frac{v^{-a}}{1+v}\,du\,dv \leq \iint_S x^{a-1}\,y^{-a}\,e^{-(x+y)}\,dx\,dy \leq \iint_Q e^{-u}\,\frac{v^{-a}}{1+v}\,du\,dv$$

$$\Gamma(a).\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

TROISIEME PARTIE

3.1. x étant un réel strictement supérieur à -1 et n un entier naturel non nul, on note

$$u_n(x) = \frac{x}{n} - \text{Log}\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

Montrer que la série de terme général $u_n(x)$ converge ainsi que la série de terme général $u_n^{(p)}(x)$ ($u_n^{(p)}$ est la dérivée $p^{\text{ième}}$ de u_n).

On note

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

On admettra que la fonction Φ est dérivable à tout ordre sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ et que pour tout réel x de $]-1, +\infty[$

$$\Phi^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^{(p)}(x).$$

3.2. x étant un réel strictement positif et γ la fonction définie par $\gamma(x) = \text{Log}\,\Gamma(x)$, montrer que γ' est croissante.

Montrer que $\gamma'(1) = -C$ et $\gamma'(2) = 1 - C$. En déduire le signe de $\gamma'(x)$ et les variations de γ.

3.3.a. $x \in [-1, 1]$, on pose

$$\varphi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x) = \Phi(x) - x + \text{Log}\,(1 + x).$$

Montrer que pour $p \geq 2$, $|\varphi^{(p)}(x)| \leq (p-1)!\,S_p$, avec $S_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$.

Montrer que φ est développable en série entière.

3.3.b. Montrer que la fonction Φ est développable en série entière et déterminer les coefficients et le rayon de convergence de cette série.

3.3.c. Montrer que, quel que soit x appartenant à l'intervalle $]0,1]$,

$$\gamma(x) = -\text{Log}\,x - Cx + \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p} S_p\, x^p.$$

Montrer la relation

$$C = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p} S_p.$$

IUFM. Antilles Guyane

P.L.C. 1. Mathématiques

CORRIGE (CAPES BLANC)

CAPES 82, 1^e comp.
"Fct Γ(x) et constante d'Euler"

I.1.a

Quand $t \to 0$, $t^{x-1} e^{-t} \sim t^{x-1}$ dont l'intégrale est convergente $\Leftrightarrow x > 0$

quand $t \to \infty$, $\forall \alpha$, $t^{\alpha} t^{x-1} e^{-t} \to 0$ et $\alpha > 1$ montre la convergence de l'intégrale à cette borne. $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, dt = 1$.

I.1.b.

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x\, dt = -\, t^x e^{-t} \Big]_0^{\infty} + x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt = x \,.\, \Gamma(x).$$

$\Gamma(n) = (n-1)!$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

I.2.a. $g(u) = u\, e^{-u}$

$g'(u) = e^{-u}(1-u)$

u	1	n
g'(u)	0 ——	
g(u)	$\frac{1}{e}$ ↘	$n e^{-n}$

I.2.b. $h_n(t) = e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n$

$h'_n(t) = -e^{-t} + (1 - \frac{t}{n})^{n-1}$

$0 = h'_n(t_n) = (1 - \frac{t_n}{n})^{n-1} - e^{-t_n}$

t	0	1	t_n	n
$h'_n(t)$	0	+	0 ——	$-e^{-n}$
$h_n(t)$	0 ↗		↘	e^{-n}

d'où

$h_n(t_n) = e^{-t_n} - e^{-t_n}(1 - \frac{t_n}{n}) = \frac{t_n}{n} e^{-t_n}$ et $\forall\, t \in [0,n]$, $h_n(t) \geqslant 0 = h_n(0)$

et $h_n(t) \leqslant \frac{1}{n} \sup_{[1,n]} u\, e^{-u} = \frac{1}{ne}$.

I.3.

$I_n(x) = \int_0^n t^{x-1} (1 - \frac{t}{n})^n\, dt$ convergente à la borne 0 car $x > 0$.

Soit a fixé et $n > a$, alors

$$\Gamma(x) - I_n(x) = \int_0^a t^{x-1} (e^{-t} - f_n) + \int_0^{+\infty} t^{x-1} (e^{-t} - f_n 1_{[0,n]})\, dt$$

d'où

$$0 \leqslant \Gamma(x) - I_n(x) \leqslant \frac{a^x}{ne\, x} + \int_a^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt, \text{ car } f_n > 0.$$

Pour $\varepsilon > 0$, choisissons a tel que $\int_a^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt < \varepsilon/2$ puis N tel que $\frac{a^x}{ne\, x} < \varepsilon/2$ si $n > N$, ceci prouve que $\forall \varepsilon\, \exists N\, \forall n > N\;\; 0 < \Gamma - I_n < \varepsilon$.

I.4.a.

$$A(k) = \int_o^1 u^{x+k+1}(1-u)^{n-k}\,du = \frac{u^{x+k}}{x+k}(1-u)^{n-k}\Big]_o^1 + \frac{n-k}{x+k}\int_o^1 u^{x+k}(1-u)^{n-k-1}\,du$$

$$A(k) = \frac{n-k}{x+k}A(k+1) \Rightarrow A(u) = \frac{n!\,A(n)}{x(x+1)..(x+n-1)} = \frac{n!}{x(x+1)..(x+n)} \text{ car } A(n) = \frac{1}{x+n}$$

Posant $t = n\,u$, $I_n(x) = \int_o^n t^{x-1}(1-\frac{t}{n})^n dt = \int_o^1 n^{x-1}u^{x-1}(1-u)^n\,n\,du = n^x A(0)$

$$= n!\,n^x \prod_{p=o}^{n}\frac{1}{x+p} \quad \text{et} \quad \Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} I_n(x).$$

I.4.b.

De $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1}\frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$ on déduit que

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} \leqslant \ell n\, n \leqslant 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}.$$

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1} - \ell n(n-1) - \ell n\frac{n}{n-1} \leqslant 1+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n} - \ell n\, n$$

soit $c_{n-1} - \ell n\frac{n}{n-1} \leqslant c_n$ et $c_n - (c_{n-1} - \ell n\frac{1}{n-1}) = \frac{1}{n}$ montrent que les suites c_n et $(c_{n-1} - \ell n\frac{n}{n-1})$ sont adjacentes et convergent vers la même limite c, comme $\forall n \quad 0 < c_n < 1, \Rightarrow 0 \leqslant c \leqslant 1$.

I.4.c.

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to\infty} n^{-x}\prod_{p=o}^{n}\frac{x+p}{n!} = \lim x\,e^{-x\,\ell n\, n}\prod_{p=1}^{n}(1+\frac{x}{p})$$

$$= \lim_{n\to\infty} x\,e^{cx}\,e^{-x\lim(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ell n\, n)} - x\,\ell n\, n \prod_{p=1}^{n}(1+\frac{x}{p})$$

$$= x\,e^{cx}\lim_{n\to o}\prod_{p=1}^{n} e^{-\frac{x}{p}}\prod_{p=1}^{n}(1+\frac{x}{p}) = x\,e^{cx}\prod_{n=1}^{\infty}\left[(1+\frac{x}{n})\,e^{-\frac{x}{n}}\right]$$

on observera que la limite de $\prod_1^n (1 + {}^x/_p)$ n'existe pas alors que $\prod_1^\infty (1+\frac{x}{p})\,e^{-x/p}$ existe. (Prendre le logarithme et étudier la série correspondante ou voir III.2).

- II -

II.1.a.

$$\int_a^b \sin(\lambda t)\,f(t)\,dt = -\frac{1}{\lambda}f(t)\cos(\lambda t)\Big]_a^b + \frac{1}{\lambda}\int_a^b(\cos(\lambda t)f'(t)\,dt$$

comme $\left|\frac{1}{\lambda}\int_a^b(\cos\lambda t)f'(t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\int_a^b\left|f'(t)\right|dt = \frac{M}{|\lambda|}\to 0$ quand $\lambda\to\infty$ et que $\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}[f(b)\cos\lambda b - f(a)\cos\lambda a] = 0$, la propriété est établie.

II.1.b.

Le seul problème est en $t = 0$

. α est continue en 0 car $\alpha(t) = \frac{\sin^2 at}{\sin t} \sim \frac{a^2 t^2}{t} = a^2 t \to 0$ quand $t \to 0$.

. dérivabilité en 0 : $\frac{\alpha(t) - \alpha(0)}{t} = \frac{\sin^2 at}{t \sin t} \sim a^2$ donc la limite existe et $\alpha'(0) = a^2$.

. continuité de $\alpha'(t)$ en 0 :

$$\alpha'(t) = \frac{2a \sin at \cos at \sin t - \cos t \sin^2 at}{\sin^2 t} \sim a^2 = \alpha'(0) \text{ quand } t \to 0 .$$

II.1.c.

$\theta_p(a) \to 0$ quand $\lambda = 2p+1$ tend vers $+\infty$ d'après 1.a.

$$\theta_p(a) - \theta_{p-1}(a) = \int_o^{\pi/2} \left[\frac{\sin^2 at}{\sin t} \sin(2p+1)t - \sin(2p-1)t\right] dt$$

$$= 2 \int_o^{\pi/2} \sin^2 at \cos(2pt)\, dt$$

$$= \int_o^{\pi/2} (1 - \cos 2at) \cos 2pt\, dt = - \int_o^{\pi/2} \cos 2pt \cos 2at\, dt$$

$$= -\frac{1}{2} \int_o^{\pi/2} [\cos 2t(p+a) + \cos 2t(p-a)] dt$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2(p+a)} \sin \pi(p+a) + \frac{1}{2(p+a)} \sin \pi(p-a)\right] .$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{(-1)^p \sin a\Pi}{2(p+a)} - \frac{(-1)^p \sin a\Pi}{2(p-a)}\right] = \frac{(-1)^p a \sin a\Pi}{2(p^2 - a^2)} .$$

$$\theta_o(a) = \int_o^{\pi/2} \sin^2 at\, dt = \frac{1}{2} \int_o^{\pi/2} (1 - \cos 2at)\, dt = \frac{\Pi}{4} - \frac{\sin a\Pi}{4a} .$$

II.2.a.

Le seul problème de convergence des intégrales est en $t = 0$

. Pour $u(a)$, $\frac{t^{a-1}}{1+t} \sim \frac{1}{t^{1-a}}$ dont l'intégrale converge $\Leftrightarrow 1-a < 1$ soit $a > 0$.

. Pour $v(a)$, $\frac{t^{-a}}{1+t} \sim \frac{1}{t^a}$ dont l'intégrale converge $\Leftrightarrow a < 1$.

. $\int_o^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t} dt = u(a) + \int_1^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t} dt$; en posant $t = \frac{1}{u}$ on obtient

$$\int_1^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t} dt = \int_1^o \frac{u^{1-a}}{1+\frac{1}{u}} \left(-\frac{du}{u^2}\right) = \int_o^1 \frac{u^{-a}}{1+u} du = v(a) .$$

II.2.b.

$$u(a) = \int_o^1 t^{a-1} \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \int_o^1 \lim_{p\to\infty} \sum_{n=o}^{p} (-1)^n t^{n+a-1} dt = \lim_{p\to\infty} u_p(a)$$

En effet

$$\left|u(a) - u_n(a)\right| = \left|\int_o^1 \sum_{n+1}^{\infty} (-1)^k t^{k+a-1} dt\right| \leqslant \int_o^1 |t^{n+a} (-1)^{n+1} dt| = \frac{1}{n+a-1}$$

en majorant le reste de la série alternée par son premier terme.

Pour les mêmes raisons, $v(a) = \int_o^1 t^{-a} \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \int_o^1 \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n t^{n-a} dt$

est la limite de la suite $v_n(a) = \int_o^1 \sum_{k=1} (-1)^{n-1} t^{n-1-a} dt$.

II.2.c.

$\cdot\ w_p(a) - w_{p-1}(a) = u_p(a) - u_{p-1}(a) + v_p(a) - v_{p-1}(a) + \frac{4}{\sin a\pi}(\theta_p(a) - \theta_{p-1}(a))$

$$= \int_0^1 (-1)^p\, t^{p+a-1}\, dt + \int_0^1 (-1)^{p+1} t^{p-a-1} dt + \frac{2a(-1)^p}{p^2 - a^2}$$

$$= (-1)^p \left[\frac{1}{p+a} - \frac{1}{p-a} + \frac{2a}{p^2-a^2}\right] = 0 .$$

$\cdot\ w_p(a) = \sum_{k=1}^{p} (w_k(a) - w_{k-1}(a)) + w_o(a) = w_o(a) = u_o(a) + 4\,\frac{\theta_o(a)}{\sin a\pi}$

$$= \int_0^1 t^{a-1}\, dt + \frac{4}{\sin a\pi}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\sin a\pi}{4a}\right] = \frac{\pi}{\sin a\pi} = \lim_{p\to\infty} w_p(a)$$

Comme $\lim_{p\to\infty} \theta_p(a) = 0$ on en déduit que $u(a) + v(a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$

II.3.a.

D est bijective car la système $\begin{cases} x + y = u \\ \frac{y}{x} = v \end{cases}$

a une solution unique $x = \frac{u}{1+v}$ et $y = \frac{uv}{1+v}$ tels que $D(x,y) = (u,v)$.

Notons $M(x,y)$ et $D(M) = M'(u,v)$,

. si $M(x,y) \in S$, $\begin{cases} r < x < \frac{1}{r} \\ r < y < \frac{1}{r} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2r < x+y = u < \frac{2}{r} \\ r^2 < \frac{y}{x} = v < \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} \end{cases}$ donc $M'(u,v) \in Q$.

. si $M'(u,v) \in P$, $\begin{cases} r + \sqrt{r} < u < \frac{1}{r} + \frac{1}{\sqrt{r}} \\ \sqrt{r} < v < \frac{1}{\sqrt{r}} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{r+\sqrt{r}}{1+\frac{1}{\sqrt{r}}} = r < x = \frac{u}{1+v} < \frac{\frac{1}{r}+\frac{1}{\sqrt{r}}}{1+\sqrt{r}} = \frac{1}{r} \\ r < y < \frac{1}{r} \end{cases}$

donc $D^{-1}(M') = M(x,y) \in S$.

II.3.b.

$$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D(S)} f\circ D^{-1} \left|J_{D^{-1}}\right| du\,dv = \iint_{D(S)} f(u,v)\frac{u}{(1+v)^2}\,du\,dv$$

$$= \iint_{D(S)} \frac{e^{-u} v^{-a}}{1+v}\,du\,dv.$$

La double inégalité résulte alors des inclusions $P \subset D(S) \subset Q$.

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \lim_{r\to\infty} \iint_S x^{a-1}\, y^{-u}\, e^{-(x+y)} dx\,dy$$

$$\lim_{r\to\infty} \iint_Q e^{-u}\,\frac{v^{-a}}{1+v}\,du\,dv = \left(\int_0^\infty e^{-u}\,du\right)\left(\int_0^\infty \frac{v^{-a}}{1+v}\,dv\right) = u(a) + v(a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}$$

de même $\lim_{v\to\infty} \iint_P \frac{e^{-u} v^{-a}}{1+v}\,du\,dv = \frac{\pi}{\sin \pi a}$ donc $\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}$

AN9

III.1.

$$u_n(x) = \frac{x}{n} - \text{Log}\left(1+\frac{x}{n}\right) \sim \frac{x^2}{2n^2} \quad \text{terme général d'une série convergente.}$$

$$u'_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1/n}{1+\frac{x}{n}} = \frac{x}{n(x+n)} \sim \frac{x}{n^2}$$

$$u''_n(x) = \frac{1}{(x+n)^2} \sim \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad u^{(p)}{}_n(x) = \frac{(-1)^p\,(p-1)!}{(x+n)^p} \quad \text{si} \quad p \geqslant 2\ .$$

Comme $|u^{(p)}{}_n(x)| \sim \frac{(p-1)!}{n^p}$, la série converge absolument.

On peut remarquer que les séries des dérivées de tout ordre convergent normalement sur tout intervalle compact de $]-1,+\infty[$ ce qui justifie la propriété $\phi^{(p)}(x) = \sum_1^\infty u_n^{(p)}(x)$.

III.2.

$$\gamma(x) = \text{Log}\,\Gamma(x) = -\text{Log}\,x - C\,x + \sum_{n=1}^\infty u_n(x) \quad \text{d'après I.4.c.}$$

$$\gamma'(x) = \frac{1}{x} - c + \sum_1^\infty u'_n(x)$$

$$\gamma''(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_1^\infty u''_n(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_1^\infty \frac{1}{(x+n)^2} > 0 \quad \text{dans} \quad \gamma'(x) \quad \text{est croissante.}$$

x	0	1	α	2	+ ∞
γ'(x)	↗	−c	0	1−c	↗
γ(x)	↘			↗	

$$\gamma'(1) = -1 - c + \sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)} = -1 - c + 1 = -c < 0$$

$$\gamma'(2) = -\frac{1}{2} - c + \sum_1^\infty \frac{2}{n(n+2)} = -\frac{1}{2} - c + \sum_1^\infty \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right] = -\frac{1}{2} - c + \frac{3}{2} = 1 - c > 0$$

donc $\gamma'(x)$ s'annule pour une valeur α comprise entre 1 et 2 strictement.

III.3.a.

Si $\varphi(x) = \sum_2^\infty u_n(x)$, alors $\varphi^{(p)}(x) = \sum_2^\infty u_n^p(x) = \sum_2^\infty \frac{(-1)^p\,(p-1)!}{(x+n)^p}$

$$|\varphi^{(p)}(x)| \leqslant (p-1)! \sum_2^\infty \frac{1}{(x+n)^p} = (p-1)! \sum_1^\infty \frac{1}{(x+1+n)^p} \leqslant (p-1)! \sum_1^\infty \frac{1}{n^p}$$

si $x \in [-1,+1]$.

On en déduit que $\left|\frac{\varphi^{(p)}(x)}{p!}\right| \leqslant \frac{S_p}{p}$ et la série entière $\sum_{p=1}^\infty \frac{\varphi^{(p)}(0)}{p!} x^p$ est convergente dans $]-1,+1]$ et non dans $[-1,1]$ comme le texte l'annonce.

V

III.3.b.

$\phi(x) = \varphi(x) + x - \mathrm{Log}(1+x)$ est donc développable en série entière car $\varphi(x)$ et $\mathrm{Log}(1+x)$ le sont avec un rayon R supérieur au minimum de celui de φ et de $\mathrm{Log}(1+x)$, donc $R \geqslant 1$; et comme $\varphi(-1)$ existe mais que $\mathrm{Log}(1+x)$ n'existe pas pour $x = -1$, on a $R = 1$ et

$$\phi(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{S_n}{n} x^n .$$

III.3.c.

$$\phi(x) = \sum_{1}^{\infty} \left[\frac{x}{n} - \mathrm{Log}(1+\frac{x}{n})\right] = \sum_{1}^{\infty} \mathrm{Log}\left[(1+\frac{x}{n})\, e^{-\frac{x}{n}}\right]^{-1} = \mathrm{Log}\, \Pi\left(\frac{1}{(1+\frac{x}{n})\, e^{-\frac{x}{n}}}\right)$$

$$\phi(x) = \mathrm{Log}\, x\, e^{cx}\, \Gamma(x) = \mathrm{Log}\, x + cx + \mathrm{Log}\, \Gamma(x)$$

$$\gamma(x) = \mathrm{Log}\, \Gamma(x) = -\mathrm{Log}\, x - cx + \phi(x)$$

$$\gamma(1) = \mathrm{Log}\, \Gamma(1) = 0 = -c + \phi(1)$$

$$c = \phi(1) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} S_n .$$

CAPES externe 1982 composition 2

SESSION DE 1982

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 5 heures)

$(\mathcal{E}, d)$ désignant un espace métrique et $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathcal{E}$, on appellera « expansion de $(\mathcal{A}, d)$ » toute application f de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}$ telle que :

quels que soient M et M', éléments de $\mathcal{A}$, on ait la relation

$$d(M, M') \leqslant d(f(M), f(M')).$$

On appellera « isométrie de $(\mathcal{A}, d)$ » toute application *bijective* f de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}$ conservant la distance d, c'est-à-dire telle que :

quels que soient M et M', éléments de $\mathcal{A}$, on ait

$$d(M, M') = d(f(M), f(M')).$$

On notera Exp $(\mathcal{A}, d)$ l'ensemble des expansions de $(\mathcal{A}, d)$ et $\mathcal{I}(\mathcal{A}, d)$ l'ensemble des isométries de cet espace. Muni de la loi de composition des applications $\mathcal{I}(\mathcal{A}, d)$ est un groupe.

Questions préliminaires :

0.1. Prouver qu'une expansion de $(\mathcal{A}, d)$ est injective.

0.2. Prouver que Exp $(\mathcal{A}, d)$ est stable pour la loi de composition.

0.3. Soit f une expansion bijective de $(\mathcal{A}, d)$. Prouver que f est une isométrie de $(\mathcal{A}, d)$ si, et seulement si, $f^{-1} \in$ Exp $(\mathcal{A}, d)$.

Les quatre parties de ce problème sont indépendantes.

I

Dans cette partie $\mathcal{E}$ est un plan affine euclidien et d est la distance euclidienne sur $\mathcal{E}$.

1.1. Ici A et B sont deux points distincts de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A}$ est le segment [A, B].

1.1. *a.* Pour $f \in$ Exp $(\mathcal{A}, d)$ déterminer la paire $\{f(A), f(B)\}$.

1.1. *b.* En composant au besoin f avec une isométrie de $(\mathcal{A}, d)$ montrer que l'on peut se ramener au cas où $f(A) = A$ et $f(B) = B$. Déterminer alors f.

1.1. *c.* Déterminer Exp $(\mathcal{A}, d)$.

1.2. Ici $\mathcal{A}$ est une partie quelconque de $\mathcal{E}$ et $f \in$ Exp $(\mathcal{A}, d)$. On suppose que U et V sont deux points de $\mathcal{A}$ fixes par f et que C est un point de $\mathcal{A}$ tel que $f(C) \neq C$. Prouver que le segment [U, V] est inclus dans le demi-plan fermé contenant C bordé par la médiatrice du segment [C, f(C)].

Tournez la page S. V. P.

1.3. Ici $\mathcal{A}$ est le domaine compact bordé par une ellipse (E), c'est-à-dire : F et F' désignant les foyers de (E) et $2a$ la longueur du grand axe, $\mathcal{A}$ est l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ vérifiant $d(M, F) + d(M, F') \leqslant 2a$. On note A et A' (resp. B et B') les extrémités du grand axe (resp. du petit axe) de (E) : $d(B, B') < d(A, A') = 2a$.

1.3. *a.* Prouver que : $\forall (M, M') \in \mathcal{A}^2$, $d(M, M') \leqslant 2a$, l'égalité n'ayant lieu que pour $\{M, M'\} = \{A, A'\}$.

1.3. *b.* Soit $f \in \text{Exp}(\mathcal{A}, d)$. On suppose que $f(A) = A$ et $f(A') = A'$ et qu'il existe un point C de l'ellipse (E) tel que $f(C) \neq C$. Déduire de 1.2. que F et F' sont sur la médiatrice du segment $[C, f(C)]$.

1.3. *c.* Soit $f \in \text{Exp}(\mathcal{A}, d)$. On suppose que A, A', B, B' sont fixes par f. Déduire de 1.2. que tout point de (E) est fixe par f, puis que $f = Id_{\mathcal{A}}$ (identité sur $\mathcal{A}$).

1.3. *d.* Déterminer $\text{Exp}(\mathcal{A}, d)$.

1.4. Déterminer $\text{Exp}(\mathcal{A}, d)$ lorsque $\mathcal{A}$ est le domaine compact bordé par un cercle (C) non réduit à un point.

II

Dans cette partie $\mathcal{E}$ est l'espace affine attaché à $\mathbb{R}^2$. $M = (x, y)$ et $M' = (x', y')$ étant deux points de $\mathcal{E}$, on note δ la distance définie sur $\mathcal{E}$ par

$$\delta(M, M') = \text{Sup}\{|x - x'|, |y - y'|\}.$$

On note $\Gamma = \{M \in \mathcal{E} \,/\, \delta(O, M) \leqslant 1\}$ la boule fermée de centre $O = (0, 0)$ de rayon 1. On note $A = (1, 1)$, $B = (-1, 1)$, $C = (-1, -1)$ et $D = (1, -1)$ les quatre sommets de Γ.

2.1. *a.* Prouver qu'un élément g de $\mathfrak{I}(\Gamma, \delta)$ envoie une paire de points situés sur deux segments distincts parallèles du quadrilatère A, B, C, D sur une paire de points possédant la même propriété.

En déduire que g laisse globalement invariant $\{A, B, C, D\}$.

2.1. *b.* Montrer que si un élément g de $\mathfrak{I}(\Gamma, \delta)$ vérifie $g(A) = A$ alors $g(C) = C$.

2.1. *c.* Soit d_2 la distance euclidienne de $\mathcal{E}$ pour laquelle $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux et de norme 2. Soit G le sous-groupe de $\mathfrak{I}(\mathcal{E}, d_2)$ des isométries euclidiennes qui conservent Γ. Prouver que pour tout élément f de G, sa restriction à Γ notée f_Γ est élément de $\mathfrak{I}(\Gamma, \delta)$.

2.1. *d.* Prouver que, si g est élément de $\mathfrak{I}(\Gamma, \delta)$, il existe un élément f de G tel que $f \circ g$ laisse fixes A, B, C, D.

2.1. *e.* Déterminer $g \in \mathfrak{I}(\Gamma, \delta)$ lorsque g laisse fixes A, B, C, D.

2.1. *f.* Déterminer $\mathfrak{I}(\Gamma, \delta)$.

2.2. *a.* Prouver que $\{f \in \mathfrak{I}(\mathcal{E}, \delta) \,/\, f(O) = O\} = G$.

2.2. *b.* Décrire le groupe $\mathfrak{I}(\mathcal{E}, \delta)$: on précisera la forme réduite de chaque élément de ce groupe.

2.3. On note d_1 la distance définie sur $\mathcal{E}$ par :

$$d_1(M, M') = |x - x'| + |y - y'|,$$

pour tout couple ($M = (x, y)$, $M' = (x', y')$) de points de $\mathcal{E}$.

2.3. *a.* Soit σ l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ telle :

$$\sigma(x, y) = (x + y, -x + y).$$

Prouver que σ est une isométrie de $(\mathcal{E}, d_1)$ dans $(\mathcal{E}, \delta)$ c'est à dire que σ est bijective et pour tous points M et M' de $\mathcal{E}$, $d_1(M, M') = \delta(\sigma(M), \sigma(M'))$.

2.3. *b.* Soit σ^* l'application de $\mathfrak{I}(\mathcal{E}, \delta)$ dans $\mathfrak{I}(\mathcal{E}, d_1)$ telle que $\sigma^*(f) = \sigma^{-1} \circ f \circ \sigma$. Montrer que σ^* est bien définie et que c'est un isomorphisme de groupes.

En déduire que $\mathfrak{I}(\mathcal{E}, d_1) = \mathfrak{I}(\mathcal{E}, \delta)$.

III

3.1. Soit p un réel strictement supérieur à 1.

3.1. *a.* Soit $(a, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^3$, tel que $\alpha + \beta = 1$, et f l'application de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = (\alpha a + \beta x)^p - \alpha a^p - \beta x^p.$$

Étudier le signe de f.

3.1. *b.* Dans toute la suite du paragraphe 3.1. $\mathbb{R}^2$ est considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Montrer que si $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$|x|^p + |y|^p = |x'|^p + |y'|^p = 1$$

on a pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que $\alpha + \beta = 1$:

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = (x'', y'') \text{ avec } |x''|^p + |y''|^p \leqslant 1.$$

Quand a-t-on l'égalité ?

3.1. *c.* On considère l'application N_p de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que :

$$\vec{u} = (x, y) \longmapsto N_p(\vec{u}) = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}.$$

Prouver que N_p est une norme sur $\mathbb{R}^2$ (pour l'inégalité triangulaire on pourra, pour deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, se ramener au cas 3.1. *b.* en introduisant $\vec{U}$ et $\vec{V}$ tels que $N_p(\vec{u})\,\vec{U} = \vec{u}$ et $N_p(\vec{v})\,\vec{V} = \vec{v}$). Prouver que, dans l'inégalité triangulaire, on n'a l'égalité que dans la cas où les vecteurs sont positivement liés.

3.2. Dans la suite de la partie III on note $\mathcal{E}$ l'espace affine attaché à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, et d_p la distance attachée à la norme N_p : $d_p(M, M') = N_p(\overrightarrow{MM'})$. Montrer que $\mathcal{I}(\mathcal{E}, d_p)$ est un sous-groupe du groupe affine de $\mathcal{E}$ (on pourra utiliser, sans avoir à le démontrer, le théorème suivant : toute bijection de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ conservant l'alignement est une application affine).

3.3. Soit $f \in \mathcal{I}(\mathcal{E}, d_p)$ et $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matrice de la partie linéaire de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Prouver que :

$$|a|^p + |b|^p = |c|^p + |d|^p = 1 \,; \quad |\det \mathcal{M}| = 1 \,;$$
$$|a| = |d| \quad \text{et} \quad |b| = |c|.$$

En déduire que :

$$a^2 + b^2 = |a|^p + |b|^p = 1.$$

Prouver que tous les groupes $\mathcal{I}(\mathcal{E}, d_p)$, pour p réel supérieur ou égal à 1 et différent de 2, sont égaux au sous-groupe $\mathcal{I}(\mathcal{E}, \delta)$ de $\mathcal{I}(\mathcal{E}, d_2)$ étudié en II.

IV

Dans cette partie $\mathcal{E}$ est l'espace affine attaché à $\mathbb{R}^n$ (n entier naturel non nul) et D est une distance associée à une norme sur $\mathbb{R}^n$. On rappelle qu'alors les compacts de $(\mathcal{E}, D)$ en sont les fermés bornés.

4.1. Soit $\mathcal{A}$ une partie bornée de $\mathcal{E}$. Soit $f \in \text{Exp}(\mathcal{A}, D)$.

On définit par récurrence $f^{p+1} = f^p \circ f$ pour p entier naturel.

Tournez la page S. V. P.

4.1. *a.* Soit $A \in \mathcal{A}$. En appliquant le théorème de Bolzano-Weierstrass à la suite $(f^p(A))_{p \in \mathbb{N}^*}$ prouver que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists k \in \mathbb{N}^*, \ D(A, f^k(A)) < \varepsilon.$$

De même montrer que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2, \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists k \in \mathbb{N}^*, \ D(A, f^k(A)) < \varepsilon \text{ et } D(B, f^k(B)) < \varepsilon.$$

4.1. *b.* Déduire de 4.1. *a.* que : f conserve la distance de D.
f a une image dense dans $\mathcal{A}$.

Conclure que si $\mathcal{A}$ est compact $\mathrm{Exp}(\mathcal{A}, D) = \mathfrak{I}(\mathcal{A}, D)$.

4.2. $\mathcal{A}$ est toujours ici une partie bornée de $\mathcal{E}$.

4.2. *a.* Soit $f \in \mathrm{Exp}(\mathcal{A}, D)$. Montrer que f est prolongeable en une isométrie $\overline{f}$ de $(\overline{\mathcal{A}}, D)$, $\overline{\mathcal{A}}$ étant l'adhérence de $\mathcal{A}$.

4.2. *b.* Prouver que si $\mathcal{A}$ est un ouvert borné $\mathrm{Exp}(\mathcal{A}, D) = \mathfrak{I}(\mathcal{A}, D)$.

4.3. *a.* Donner un exemple d'expansion d'un ouvert qui ne soit pas une isométrie de cet ouvert mais qui cependant conserve la distance.

4.3. *b.* Donner un exemple d'expansion d'une partie bornée qui ne soit pas une isométrie de cette partie.

CAPES externe 1982 session spéciale composition 1

— Etude des solutions de l'équation différencielle $xY' + x = Y^2$.

1982

(concours de décembre)

ÉNONCÉ

Toutes les fonctions qui interviennent sont à valeurs réelles.

Les représentations graphiques dont il est fait mention seront établies dans un plan euclidien, par rapport à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Les parties 1 et 2 font étudier des solutions de l'équation différentielle

$$(\mathcal{L}) \qquad xy'' + y' - y = 0$$

sur des intervalles de R qui seront précisés dans chaque cas.

La partie 3 relie à l'étude de $(\mathcal{L})$ celle de l'équation différentielle

$$(S) \qquad xY' + x = Y^2.$$

On pourra, afin de traiter certaines questions, admettre les résultats de questions précédentes, et en particulier ceux des trois questions préliminaires.

QUESTIONS PRELIMINAIRES

P1. Etablir qu'une solution y de $(\mathcal{L})$ dans un intervalle J satisfait en tout point de J les relations suivantes :

$$\frac{d}{dx}[xy'(x)] = y(x)$$

$$\frac{d}{dx}[y^2(x) - xy'^2(x)] = y'^2(x).$$

P2. Soit U et V deux applications de $]0, +\infty[$ dans R, admettant des dérivées continues U' et V'.

On suppose que V et V' ne prennent pas la valeur 0, et que $\frac{U'(x)}{V'(x)}$ a, lorsque x tend vers $+\infty$, une limite de L.

Montrer que, si l'on fait en outre l'une ou l'autre des deux hypothèses suivantes :

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} V(x) = +\infty$

ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} U(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} V(x) = 0$,

alors on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{U(x)}{V(x)} = L$.

P3. Soit I un intervalle de R contenant 0, et Y une application deux fois continûment dérivable de I dans R, telle que Y(0) = 0.

Montrer que l'application w de I dans R définie par :

$$w(x) = \frac{Y(x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \ ; \quad w(0) = Y'(0)$$

est continûment dérivable.

PREMIERE PARTIE

1.1. 1.1.1. Montrer qu'il existe une unique série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence infini, dont la somme f vérifie f(0) = 1 et soit solution de ($\mathcal{L}$) sur R ; on explicitera a_n en fonction de n.

1.1.2. Déterminer le signe de f(-1) et le signe de f(-2).

Montrer que chacune des deux fonctions f' et f" garde un signe fixe sur $[-2, +\infty[$.

Etudier et représenter graphiquement la restriction de f à $[-2, +\infty[$.

On montrera que cette restriction a un unique zéro, que l'on notera α_0.

1.2. 1.2.1. Montrer, en se servant de la question P1, que, pour tout $x > 0$, $f'(x) < \frac{f(x)}{\sqrt{x}}$; puis, en appliquant les résultats de la question P2 aux fonctions qui à x associent respectivement $f^2(x) - xf'^2(x)$ et $f^2(x)$, établir que, lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{f'(x)}{f(x)} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$.

A l'aide encore de P2, établir qu'on a, lorsque x tend vers $+\infty$:

$$f^2(x) - xf'^2(x) \sim \frac{f^2(x)}{2\sqrt{x}} . \quad \text{En déduire : } \sqrt{x}\,\frac{f'(x)}{f(x)} - 1 \sim \frac{-1}{4\sqrt{x}} .$$

1.2.2. On pose, pour $x > 0$: $q(x) = f^2(x) - xf'^2(x) - \frac{f^2(x)}{2\sqrt{x}}$.

Etablir que q'(x) est négligeable devant $\frac{f^2(x)}{x^{\frac{3}{2}}}$ lorsque x tend vers $+\infty$ (c'est-à-dire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x^{\frac{3}{2}} \frac{q'(x)}{f^2(x)}\right] = 0$), et en déduire que q(x) est négligeable devant $\frac{f^2(x)}{x}$.

1.2.3. Montrer qu'il existe une constante β, que l'on donnera, telle que, lorsque x tend vers $+\infty$, on ait : $\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{4x} \sim \frac{\beta}{x^{\frac{3}{2}}}$.

Etablir l'existence d'une constante C, que l'on ne cherchera pas à évaluer, telle que, lorsque x tend vers $+\infty$, on ait :

$$f(x) \sim C\, e^{2\sqrt{x}}\, x^{-\frac{1}{4}} .$$

DEUXIEME PARTIE

Soit J un intervalle de R sur lequel la fonction f introduite au 1.1 ne prend pas la valeur 0.

2.1. 2.1.1. A toute application deux fois dérivable y de J dans R on associe l'application $\tilde{y}$ de J dans R telle que :

$$\tilde{y}(x) = xf^2(x) \frac{d}{dx}\left[\frac{y(x)}{f(x)}\right]$$

Montrer que y est solution de $(\mathcal{L})$ sur J si, et seulement si, $\tilde{y}$ est constante.

2.1.2. Donner l'expression générale des solutions de $(\mathcal{L})$ sur J, en distinguant le cas où 0 appartient à J et celui où 0 n'appartient pas à J ; dans ce dernier cas, le calcul fait intervenir une fonction ψ définie par une intégrale.

2.2. Dans cette question on adopte $J =]0, +\infty[$.

2.2.1. Montrer que dans le calcul du 2.1.2 on peut adopter :

$$\psi(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{1}{tf^2(t)}\, dt, \quad x > 0 .$$

Pour cette fonction ψ :

- trouver un équivalent de $\psi(x)$ au voisinage de 0 ;
- montrer que $|\psi(x)| \leq \frac{1}{xf(x)}$ pour tout $x > 0$;
- trouver, en utilisant 1.2.3., un équivalent de $\psi(x)$ au voisinage de $+\infty$.

2.2.2. Parmi les solutions de $(\mathcal{L})$ sur J figurent les fonctions $h_\lambda = \lambda f + g$, où g désigne ψf et λ un paramètre réel.

En utilisant la fonction $\frac{h'_\lambda}{f'}$, dont on démontrera la monotonie, étudier le signe de h'_λ ; montrer que h'_λ a un zéro unique, ξ'_λ, si $\lambda < 0$ et n'a aucun zéro si $\lambda \geq 0$.

En utilisant la fonction $\frac{h''_\lambda}{f''}$, dont on admettra la monotonie, étudier le signe de h''_λ.

Donner le tableau de variation et l'allure de la représentation graphique de h_λ dans chacun des cas $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ et $\lambda > 0$. Lorsque $\lambda > 0$, on montrera que h_λ et h''_λ ont chacune un zéro unique, ξ_λ et ξ''_λ ; on placera ces deux zéros l'un par rapport à l'autre.

TROISIEME PARTIE

3.1. Soit I un intervalle de R, sur lequel on se propose de mettre en communication avec les solutions de l'équation ($\mathcal{L}$) celles de l'équation (S) donnée au préambule.

3.1.1. Si h est une solution de ($\mathcal{L}$) sur I qui en aucun point de I ne prend la valeur 0, montrer que la fonction H définie par :

$x \longmapsto -x\,\dfrac{h'(x)}{h(x)}$ est solution de (S) sur I.

3.1.2. Soit inversement Y une solution de (S) sur I. On envisagera le cas où I contient 0 (et dans ce cas on précisera $Y(0)$ et $Y'(0)$) et le cas où I ne contient pas 0.

Dans les deux cas on pose : pour $x \neq 0$, $w(x) = \dfrac{Y(x)}{x}$, et, si $0 \in I$, $w(0) = Y'(0)$. Montrer que Y est deux fois continûment dérivable, ce qui entraîne, d'après la question P3, que w est continûment dérivable.

Montrer que la fonction y définie par : $x \longmapsto \exp(-\int_{x_0}^{x} w(t)dt)$ ($x_0 \in I$ fixé) est solution de ($\mathcal{L}$) sur I.

3.2. 3.2.1. Reprenant la fonction f de 1.1 et son zéro α_0, montrer que (S) admet une solution unique F sur $]\alpha_0, +\infty[$.

L'étude de cette solution fait l'objet de la question 3.3.

3.2.2. Montrer que (S) admet sur $]0, +\infty[$ une unique solution positive G. L'étude de cette solution fait l'objet de la question 3.4.2.

3.3. 3.3.1. Prouver que chacune des fonctions F' et F'' garde un signe fixe sur $]\alpha_0, +\infty[$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} (F(x) + \sqrt{x})$.

Donner l'allure de la représentation graphique de la fonction F (courbe $\mathcal{F}$).

3.3.2. Montrer que la fonction F admet un développement en série entière :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n b_n x^n, \quad \text{avec } b_n > 0 \text{ pour tout } n,$$

dont le rayon de convergence sera noté r ; calculer b_1, b_2, b_3 et donner une formule de récurrence permettant, pour $n \geq 2$, d'obtenir b_n.

Prouver par récurrence, pour tout $n \geq 1$: $b_n \leq \frac{1}{n}$ et $b_{n+1} \leq b_n$.

Montrer qu'on a : $1 \leq r \leq |\alpha_o|$.

3.4. Poursuivant l'étude des solutions de (S) en se limitant à $x > 0$, on veut en dessiner sur une même figure (unité graphique 8 centimètres) l'ensemble des courbes représentatives dans la bande $0 < x < 2$.

3.4.1. Régionner le demi-plan $x > 0$ selon les signes, en chaque point, de $\frac{dY}{dx}$ et de $\frac{d^2Y}{dx^2}$ pour la solution Y de (S) intéressant ce point.

On déterminera et on tracera, à cet effet, pour la famille des courbes intégrales de (S), l'ensemble $\mathcal{P}$ des points de contact des tangentes parallèles à l'axe $(O;\vec{i})$ et l'ensemble $\mathcal{J}$ des points d'inflexion.

Donner, en divers points pris sur $\mathcal{P}$ et sur $\mathcal{J}$, le profil local des solutions de (S). Placer l'arc $x > 0$ de la courbe $\mathcal{F}$.

3.4.2. En s'inspirant des calculs déjà menés pour F, établir que chacune des fonctions G', G'' garde un signe fixe sur $]0, +\infty[$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} G(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{G(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (G(x) - \sqrt{x})$.

Tracer, sur la figure préparée, la courbe représentative de G (courbe $\mathcal{G}$).

3.4.3. Pour tout sous-intervalle I de $]0, +\infty[$, sont solutions de (S) sur I celles des fonctions H_λ : $x \longmapsto \frac{-xh'_\lambda(x)}{h_\lambda(x)}$ (h_λ apparue en 2.2.2) qui sont définies sur I.

Préciser tous les caractères de ces fonctions accessibles sans nouveaux calculs (limite en 0, comportement asymptotique,...). Disposer quelques-unes de leurs courbes représentatives sur la figure préparée relative à $I =]0,2[$.

CAPES externe 1982 session spéciale composition 2

CAPES EXTERNE DE MATHEMATIQUES

Session spéciale de 1982

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES
Durée: 5h.

L'épreuve est composée de deux problèmes indépendants.
Dans sa correction, il sera donné au premier problème une importance triple de celle accordée au second.

Premier problème

Notations: P est un plan affine euclidien rapporté, dans certaines questions à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ un point de P étant alors désigné par le couple de ses coordonnées.

Si A est un point de P, la symétrie centrale de centre A est notée s_A.

Si D est une droite de P, la symétrie axiale orthogonale d'axe D est notée σ_D.

Si F est une partie (non vide) de P, et si g est une isométrie de P, $g(F)$ désigne l'ensemble des images par g des points de F; on dit que g conserve F si $g(F) = F$. L'ensemble des déplacements de P conservant F est un groupe de transformations noté $\mathcal{I}^+(F)$. L'ensemble des isométries de P conservant F est un groupe de transformations noté $\mathcal{I}(F)$.

Définitions: Etant donné un vecteur $\vec{u}$ non nul du plan P, on dit que F est une frise de vecteur $\vec{u}$ si les translations conservant F sont les translations de vecteur $n\vec{u}$, $n \in \mathbb{Z}$, et aucune autre.

Soit L une droite orthogonale à $\vec{u}$, L' sa transformée par la translation de vecteur $\vec{u}$. L et L' délimitent une bande P_0 du plan (P_0 contenant ses bords L et L'); on dit alors que $F \cap P_0$ est un motif de la frise F. Le motif d'une frise peut être réduit à un point.

1

1.1. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ étant deux vecteurs non nuls distincts, une frise de vecteur $\overrightarrow{u}$ peut-elle être une frise de vecteur $\overrightarrow{u}'$?

1.2. Soit E l'ensemble des points (x, y) de P vérifiant la condition: $\tan y = |\tan x|$. (La notation tan désignant la fonction tangente.

On considère trois sous-ensembles de E:

E_1 formé des points (x, y) de E tels que $|y| \leq \frac{\pi}{3}$;
E_2 formé des points (x, y) de E tels que $|x| \leq \frac{\pi}{3}$;
E_3 formé des points (x, y) de E tels que $0 \leq x + y \leq \pi$.

Démontrer que chacun de ces sous-ensembles $E_1,\ E_2,\ E_3$ est une frise de vecteur à préciser et dont on dessinera un motif.

1.3. Soit F_1 l'ensemble des points (x, y) de P vérifiant la condition:

$$x + \sqrt{1 - 2|y|} \in \mathbb{Z}$$

Soit F_2 la réunion dans P des disques ouverts $W_{p,q},\ (p, q) \in \mathbb{Z}^2,\ W_{p,q}$ ayant pour centre (p, q) et pour rayon $\frac{1}{2+q^2}$.

Démontrer que F_1 et F_2 sont deux frises de vecteur $\vec{i}$, et dessiner un motif de chacune d'elles (partiellement pour F_2).

1.4. Existe-t-il des frises de vecteur non colinéaire à $\vec{i}$ contenues dans F_1? contenues dans F_2?

Dire, avec preuve à l'appui si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

- L'intersection de deux frises de vecteur $\overrightarrow{u}$ ayant un point commun est une frise.

- Si l'intersection de deux frises de vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ est une frise, alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ sont colinéaires.

2

2.1. Soit F une frise de vecteur $\vec{u}$, t la translation de vecteur $\vec{u}$ et g un élément de $\mathcal{I}(F)$. Montrer que $g \circ t \circ g^{-1}$ est une translation dont on précisera le vecteur.

En déduire que, si le groupe $\mathcal{I}^+(F)$ contient d'autres éléments que des translations, ceux-ci ne peuvent être que des symétries centrales.

S'il existe une symétrie centrale s_A conservant une frise F, on dit que F est centrée et que A en est un centre.

2.2. Soit F une frise centrée de vecteur $\vec{u}$, et A un de ses centres; quels sont tous les autres? Montrer que $\mathcal{I}^+(F)$ peut être engendré par deux symétries centrales.

Inversement, une partie f de P dont le groupe $\mathcal{I}^+(F)$ est engendré par deux symétries centrales est-elle une frise centrée?

2.3. Soit F une frise de vecteur $\vec{u}$, telle que $\mathcal{I}(F)$ ne se réduise pas à $\mathcal{I}^+(F)$.

Que peut-on dire de la direction d'une droite H si σ_H conserve F?

Que peut-on dire d'un antidéplacement conservant F, autre qu'une symétrie axiale? (On s'intéressera au composé de cet antidéplacement par lui-même).

3

On considère une droite D, deux points distincts A, B de D, le vecteur $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB}$, la médiatrice Δ de $[AB]$.

3.1. Soit F une frise centrée de vecteur $\vec{u}$, dont A est un centre.

Démontrer que F possède une et une seule des propriétés suivantes:
(I) F n'est conservée par aucun antidéplacement;
(II) la symétrie axiale orthogonale σ_Δ conserve F;
(III) la symétrie axiale orthogonale σ_D conserve F.

3.2. Donner, avec justification à l'appui, trois exemples de frises centrées de types respectifs (I),(II),(III).

3.3. Démontrer que, dans le cas (II), le groupe $\mathcal{I}(F)$ est engendré par $s_A,\ \sigma_\Delta$; préciser les éléments de ce groupe.

Inversement, démontrer que toute partie F du plan dont le groupe $\mathcal{I}(F)$ est engendré par $s_A,\ \sigma_\Delta$ est une frise de vecteur $\vec{u}$.

3.4. Démontrer que, dans le cas (III), le groupe $\mathcal{I}(F)$ est engendré par trois de ses éléments à préciser, mais que deux quelconques des éléments de $\mathcal{I}(F)$ n'engendrent pas ce groupe.

3.5. Soient F_I et F_{II} deux figures vérifiant respectivement les propriétés (I) et (II), les groupes $\mathcal{I}(F_I)$ et $\mathcal{I}(F_{II})$ sont-ils isomorphes ?

4

Cette partie (sauf dans la question 4.5) est indépendante de la précédente.

4.1. Soit F une frise non centrée de vecteur $\vec{u}$.

Démontrer que F possède une et une seule des propriétés suivantes:

(IV) F n'est conservée par aucun antidéplacement;
(V) F admet un axe de symétrie orthogonale dirigé par $\vec{u}$;
(VI) F admet un axe de symétrie orthogonale normal à $\vec{u}$;
(VII) F est conservée par la composée d'une symétrie axiale orthogonale d'axe dirigé par $\vec{u}$ et de la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$.

4.2. Donner, avec justification à l'appui, quatre exemples de frises non centrées de types respectifs (IV), (V), (VI), (VII).

4.3. Quelle structure remarquable ont les groupes $\mathcal{I}(F)$ des types (IV) et (VII)?

Une partie F de P dont le groupe $\mathcal{I}(F)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ est-elle une frise?

4.4. Démontrer que, dans les cas (V) et (VI), les groupes $\mathcal{I}(F)$ sont engendrés par deux éléments à préciser. Les groupes $\mathcal{I}(F)$ de l'un et l'autre de ces cas sont-ils isomorphes?

4.5. Parmi les groupes $\mathcal{I}(F)$ des cas (I) à (VII), préciser ceux qui sont isomorphes.

Deuxième problème

P est un plan affine euclidien. Un cercle C, de centre O et de rayon R, est donné dans P.

Question préliminaires :

On désigne par $\mathcal{S}$ l'ensemble des symétries centrales du plan P dont le centre appartient au cercle C.

Etablir que toute translation du plan P est la composée d'un nombre pair d'éléments de l'ensemble $\mathcal{S}$.

Etablir que toute symétrie centrale du plan P est la composée d'un nombre impair d'éléments de l'ensemble $\mathcal{S}$.

Problème:

On considère deux points A et B du plan P; on désigne par B' le symétrique du point B par rapport au point O, par d la distance des points A et B, par d' la distance des points A et B'.

Soit $\mathcal{U}$ la partie de l'ensemble $\mathbb{N}^*$ constituée des entiers naturels non nuls n qui possèdent la propriété suivante:

Il existe une application φ de l'ensemble $\{0, 1 \ldots, n\}$ dans P telle que

$$\left|\begin{array}{c} \varphi(0) = A; \\ \varphi(n) = B; \\ \text{pour tout } p \text{ tel que } 1 \leq p \leq n, \text{ le milieu du bipoint } (\varphi(p-1), \varphi(p)) \quad \text{appartient au cercle } C. \end{array}\right.$$

1– Montrer que $\mathcal{U}$ n'est pas vide.

Dans ce qui suit, on note m le plus petit élément de l'ensemble $\mathcal{U}$.

2– Etablir successivement

- $(m = 1) \Leftrightarrow (d' = 2R)$;
- $(m = 2) \Leftrightarrow (d \leq 4R \quad \text{et} \quad d' \neq 2R)$;
- $(d > 4R \quad \text{et} \quad d' < 2R) \Rightarrow (m = 3)$.

3– Pour $k \in \mathbb{N}^*$ donné, énoncer une condition nécessaire et suffisante, portant sur $\frac{d}{2R}$, pour que le plus petit élément pair de l'ensemble $\mathcal{U}$ soit $2k$.
On suppose $d' > 2R$. Pour $k' \in \mathbb{N}$ donné, énoncer une condition nécessaire et suffisante, portant sur $\frac{d'}{2R}$, pour que le plus petit élément impair de l'ensemble $\mathcal{U}$ soit $2k' + 1$.

4– Déterminer en fonction du couple (d, d') le plus petit élément m de l'ensemble $\mathcal{U}$. Illustrer graphiquement cette détermination en portant, dans des axes auxilliaires, la distance d en abscisse et la distance d' en ordonnée.

CAPES EXTERNE DE MATHEMATIQUES

Session spéciale de 1982

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée: 5h.

(Corrigé par Monique Decauwert)

Premier problème

1

1.1 Soit F une frise de vecteur $\vec{u}$ qui est aussi une frise de vecteur $\vec{u}'$. L'ensemble des translations conservant F est

$$\{t_{m\vec{u}}\}_{m\in\mathbb{Z}} = \{t_{n\vec{u}'}\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

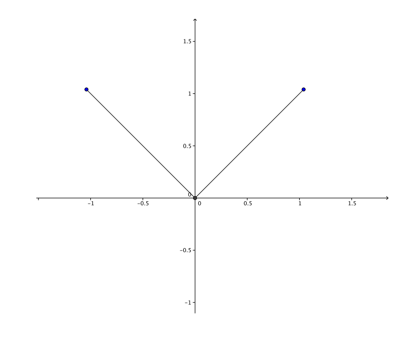
Il existe donc $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $\vec{u}' = n\vec{u}$, $\vec{u} = m\vec{u'}$, d'où $\vec{u} = mn\vec{u}$ et $mn = 1$ donc $m = n \in \{-1, +1\}$, i.e. $\vec{u}' = \vec{u}$ ou $\vec{u}' = -\vec{u}$.

1.2 On a :

$$\tan\, y = |\tan\, x| \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{c} \tan\, y = \ \tan\, x \text{ et } \tan\, x \geq 0 \\ \text{ou} \\ \tan\, y = -\ \tan\, x = \ \tan\, (-x) \text{ et } \tan\, x \leq 0 \end{array} \right.$$

$$\text{équivalent à} \left| \begin{array}{c} y = x + k\pi \text{ et } \tan\, x \geq 0 \\ \text{ou} \\ y = -x + k\pi \text{ et } \tan\, x \leq 0 \end{array} \right. \qquad k \text{ désignant un entier quelconque.}$$

Considérons $E_1 = \{(x, y) \in E \mid \quad |y| \leq \frac{\pi}{3}\}$.
Si $(x, y) \in E$, on doit avoir $\tan\, y \geq 0$ et $-\frac{\pi}{3} \leq y \leq +\frac{\pi}{3}$ d'où $0 \leq y \leq \frac{\pi}{3}$ et soit $x = y + k\,\pi$ soit $x = -y + k\,\pi$.



L'ensemble E_1 est invariant par translation de vecteur $\pi\vec{i}$.
Inversement tout vecteur $\vec{u}$ tel que $t_{\vec{u}}(E_1) = E_1$ vérifie aussi $t_{k\,\vec{u}}(E_1) = E_1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On en déduit que, pour tout $A \in E_1$, la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ rencontre E_1 en une suite de points tendant vers l'infini : les points $A + k\,\vec{u}$, ce qui implique que cette droite est entièrement incluse dans le demi-plan $\{(x, y) \mid y \geq 0\}$

et dans le demi-plan $\{(x,y) \mid y \leq \frac{\pi}{3}\}$, donc dans la bande : $\{(x,y) \mid 0 \leq y \leq \frac{\pi}{3}\}$. Or toutes les droites entièrement incluses dans cette bande sont parallèles à $\vec{i}$, ce qui implique que $\vec{u} = \lambda \vec{i}$.
Déterminons l'intersection de E_1 et de l'axe des abscisses:

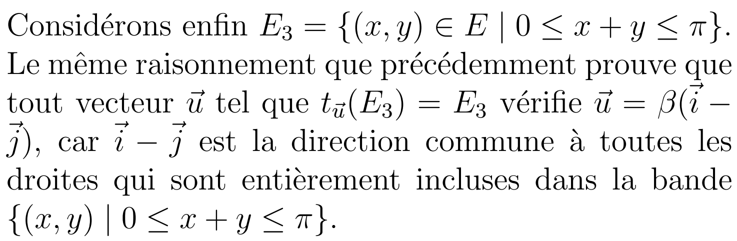
$$(y = 0) \Rightarrow \ \tan y = 0 \Rightarrow y = k\pi$$

L'intersection est donc $\{(k\pi, 0)\}_{k \in \mathbf{Z}}$, donc $\vec{u} = \lambda \vec{i}$, où λ est un multiple entier de π; par conséquent E_1 est une frise de vecteur $\pi \vec{i}$.

Considérons
$E_2 = \{(x,y) \in E \ / \ |x| \leq \frac{\pi}{3}\}$.
Le même raisonnement que précédemment prouve que tout vecteur $\vec{u}$ tel que $t_{\vec{u}}(E_2) = E_2$ vérifie $\vec{u} = \alpha \vec{j}$.
Déterminons l'intersection de E_2 avec l'axe des ordonnées:

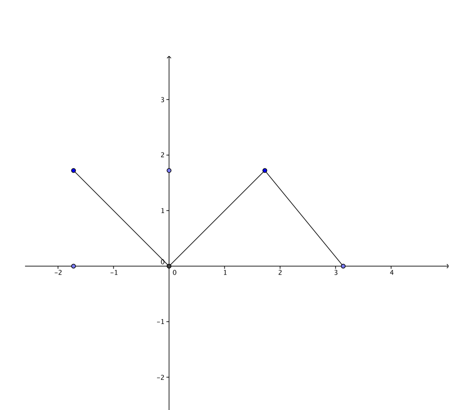
$(x = 0) \Rightarrow \ \tan y = 0 \Rightarrow y = k\pi$

C'est donc
$\{(0, k\,\pi)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, donc α est un multiple entier de π.
Réciproquement si $(x,y) \in E_2$, $(x, y + \pi) \in E_2$ et E_2 est invariant par la translation de vecteur $\pi \vec{j}$; E_2 est donc une frise de vecteur $\pi \vec{j}$.



Considérons enfin $E_3 = \{(x,y) \in E \mid 0 \leq x + y \leq \pi\}$.
Le même raisonnement que précédemment prouve que tout vecteur $\vec{u}$ tel que $t_{\vec{u}}(E_3) = E_3$ vérifie $\vec{u} = \beta(\vec{i} - \vec{j})$, car $\vec{i} - \vec{j}$ est la direction commune à toutes les droites qui sont entièrement incluses dans la bande $\{(x,y) \mid 0 \leq x + y \leq \pi\}$.
Déterminons l'intersection de E_3 avec la droite D d'équation $x + y = 0$.
Si $y = -x$, $|\tan x| = |\tan y|$. Donc, pour tout $(x,y) \in D$, on a

$$(x,y) \in E_3 \cap D, \text{ ce qui équivaut à } \tan y \geq 0 \text{ ou encore } y \in \cup_{k \in \mathbb{Z}}[k\pi, (k + \tfrac{1}{2})\pi[$$



Donc, si $t_{\vec{u}}$ laisse invariant E_3, $\vec{u}$ est un multiple entier de $\pi(\vec{i} - \vec{j})$.
Réciproquement si $(x,y) \in E_3$, $(x + \pi, y - \pi) \in E_3$ donc E_3 est une frise de vecteur $\pi(\vec{i} - \vec{j})$.

1.3 Soient

$$F_1 = \{(x,y) \mid x + \sqrt{1 - 2|y|} \in \mathbb{Z}\},$$
$$F_2 = \cup_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2} W_{(p,q)}$$

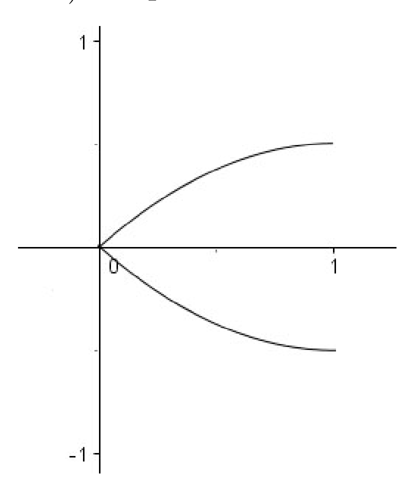
où $W_{(p,q)}$ est le disque de centre (p,q), de rayon $1/(2 + q^2)$.

Etude de F_1:

$\{(x,y)\,|\,x=-\sqrt{1-2|y|}+m \mid m\in\mathbb{Z}\}$ est l'ensemble des translatés par $t_{m\vec{i}}, , m\in\mathbb{Z}$ de $\{(x,y)\mid x+\sqrt{1-2|y|}=0\}$, c'est à dire de l'ensemble des couples $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ qui vérifient

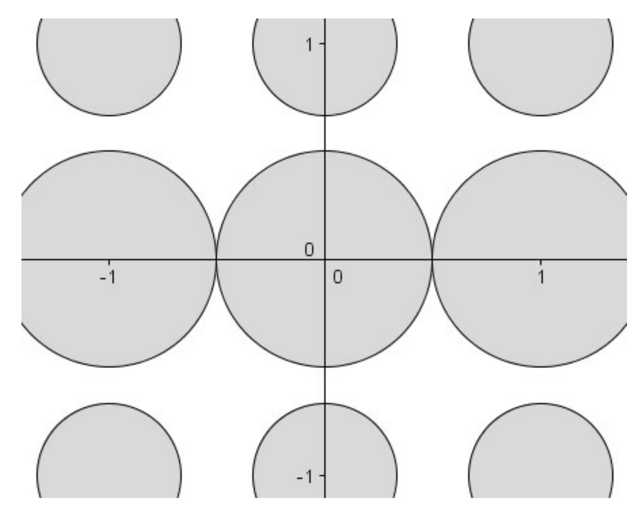
$$\left|\begin{array}{c} x^2=1-2|y| \\ x\leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} x\leq 0,\ y\geq 0,\ y=\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2} \\ \text{ou} \\ x\leq 0,\ y\leq 0,\ y=-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{2} \end{array}\right.$$

(réunion de deux arcs de parabole) et F_1 est une frise de vecteur $\vec{i}$.



Etude de F_2:

Soit $q\in\mathbb{Z}$. Les disques de rayon $1/(2+q^2)$ contenus dans F_2 sont de centre (p,q) ou $(p,-q)$, $p\in\mathbb{Z}$ donc F_2 est invariante par toute translation de vecteur $n\vec{i}$ et par celles-là seulement. Ainsi F_2 est elle aussi une frise de vecteur $\vec{i}$.



1.4 Si $(x,y)\in F_1$, on a $-\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}$.
S'il existait une frise de vecteur $\vec{u}=(\alpha,\beta)$ non colinéaire à $\vec{i}$ contenue dans F_1, les points de la forme $(x_0+n\alpha, y_0+n\beta)$ appartiendraient à F_1 quel que soit $n\in\mathbb{Z}$, ceci impliquerait $\beta=0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Par contre F_2 contient les points $(0,q)$ pour tout $q\in\mathbb{Z}$, ces derniers constituent une frise de vecteur $\vec{j}$.
Considérons la frise de vecteur $\vec{i}$:

$$F_3 := \mathbb{Z}^2 \cup \{(x, \tfrac{1}{2}) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

de vecteur $\vec{i}$, l'intersection $\mathbb{Z}^2$ des deux frises F_2 et F_3 contient un point mais n'est pas une frise, en effet toutes les translations de vecteurs $n\vec{i} + m\vec{j}$ où $m, n \in \mathbb{Z}$ conservent $F_2 \cap F_3$. Considérons maintenant

$$F_4 := \{(0, q) \mid q \in \mathbb{Z}\}$$

Les frises F_2 et F_4 sont respectivement de vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$, non colinéaires ce qui n'empêche pas leur intersection $F_2 \cup F_4 = F_4$ d'être une frise.

2

2.1 L'application $g \circ t \circ g^{-1}$ est une translation, car sa partie linéaire est l'identité, elle envoie $g(A)$ sur $g(t(A))$, son vecteur de translation est donc $\overrightarrow{g(A)\,g(t(A))} = \vec{g}\left(\overrightarrow{A\,t(A)}\right) = \vec{g}(\vec{u})$ et $\vec{g}(\vec{u}) = m\vec{u}$ pour un $m \in \mathbb{Z}$, et comme g est une isométrie, $\vec{g}(\vec{u}) = \vec{u}$ ou $\vec{g}(\vec{u}) = -\vec{u}$.
Si $g \in \mathcal{I}^+(F)$ et $\vec{g}(\vec{u}) = \vec{u}$, alors $\vec{g}$ est l'identité et g est une translation.
Si $g \in \mathcal{I}^+(F)$ n'est pas une translation, alors $\vec{g}(\vec{u}) = -\vec{u}$, donc $\vec{g} = -Id$ et g est une symétrie centrale.

2.2 Soit A tel que $s_A \in \mathcal{I}^+(F)$, on peut écrire $t_{\vec{u}} = s_A \circ s_{A'}$ où $A' = A - \frac{\vec{u}}{2}$ et
$s_A \circ t_{\vec{u}} = s_A \circ s_A \circ s_{A'} = s_{A'} \in \mathcal{I}^+(F)$.
Ainsi tous les translatés de A par les vecteurs $\frac{k\vec{u}}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ sont des centres de symétrie de F.
Réciproquement si $s_{A'} \in \mathcal{I}^+(F)$, $s_A \circ s_{A'} = t_{2\overrightarrow{A'A}} \in \mathcal{I}^+(F)$ donc $2\overrightarrow{AA'} = k\vec{u}$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.
Soient A_1 et A_2 tels que $A_1 = A$ et $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{u}/2$: alors $\{s_{A_1}, s_{A_2}\}$ engendre $\mathcal{I}^+(F)$.
Inversement si $\mathcal{I}^+(F)$ est engendré par s_{A_1} et s_{A_2}, $t_{2\overrightarrow{A_1A_2}} \in \mathcal{I}^+(F)$, et

$$\mathcal{I}^+(F) = \{t_{2k\overrightarrow{A_1A_2}} \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{s_{A_k} \mid A_k = A_1 + k\overrightarrow{A_1A_2},\ k \in \mathbb{Z}\}$$

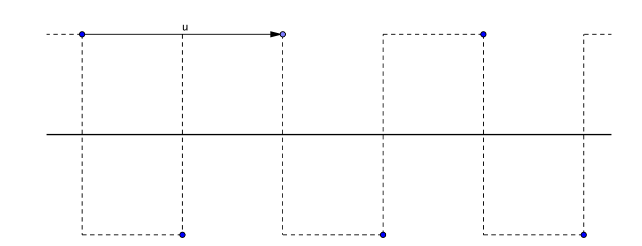
donc F est une frise centrée de vecteur $\vec{u}$.

2.3 Soit H une droite telle que $\sigma_H(F) = F$; alors $\sigma_H \circ t_{\vec{u}}(F) = F$. On a vu que $\sigma_H \circ t_{\vec{u}} \circ \sigma_H$ était la translation de vecteur $\vec{\sigma_H}(\vec{u})$. Elle conserve F , on en déduit
$\vec{\sigma}_H(\vec{u}) = \vec{u}$ ou $\vec{\sigma}_H(\vec{u}) = -\vec{u}$.
Donc

- soit H est de direction $\vec{u}$
- soit H est de direction orthogonale à $\vec{u}$.

Les deux cas sont possibles comme on peut le voir en prenant une frise dont le motif est réduit à un point.

Soit f un antidéplacement autre qu'une symétrie conservant F, alors f est une symétrie glissée, c'est à dire qu'il existe une droite H et un vecteur $\vec{v} \in \overrightarrow{H}$ tels que $f = t_{\vec{v}} \circ \sigma_H = \sigma_H \circ t_{\vec{v}}$ pour un $\vec{v} \in \vec{H}$. D'où $f^2 = t_{2\vec{v}} \in \mathcal{I}^+(F)$ donc $2\vec{v} = k\vec{u}$ et $\vec{v} = \frac{k}{2}\vec{u}$. Ainsi H admet $\vec{u}$ pour vecteur directeur et $2\vec{v}$ est un multiple entier de $\vec{u}$. Cet exemple se rencontre effectivement (cf. exemple précédent) ou, mieux, la figure ci-contre où $\vec{v} = \vec{u}/2$, H est le premier axe et $\sigma_H \circ t_{\vec{u}/2} \in \mathcal{I}(F)$ (on remarquera que $\sigma_H \notin \mathcal{I}(F)$).



3

3.1 On a

- soit $\mathcal{I}(F) = \mathcal{I}^+(F)$ i.e. F a la propriété (I)
- soit $\mathcal{I}(F) \neq \mathcal{I}^+(F)$ i.e. F a la propriété (II) ou la propriété (III)

et ces cas s'excluent.
Si $\mathcal{I}(F) \neq \mathcal{I}^+(F)$ et si F était conservée par σ_Δ et σ_D, on aurait $\sigma_\Delta \circ \sigma_D = s_I \in \mathcal{I}^+(F)$ si I désigne le milieu de AB donc $s_I \circ s_A = t_{\overrightarrow{AB}} \in \mathcal{I}^+(F)$, ce qui contredirait le fait que F est une frise de vecteur $\vec{u}$, puisque $\overrightarrow{AB} = \vec{u}/2$. Donc (II) et (III) s'excluent.
Supposons que $\mathcal{I}(F) \neq \mathcal{I}^+(F)$ et soit $f \in \mathcal{I}(F) \setminus \mathcal{I}^+(F)$

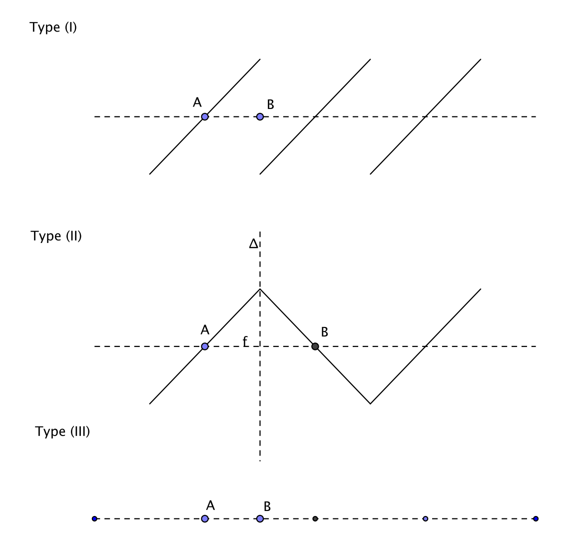
- si $f = \sigma_H$,
  - ou bien $H = D$, et nous sommes dans le cas (III),
  - ou bien H est (strictement) parallèle à D et $s_A \circ \sigma_H$ est un antidéplacement de $\mathcal{I}(F)$ qui n'est pas une réflexion, est donc une symétrie glissée dont l'axe est orthogonal à D, ce qui est impossible,
  - ou bien H est orthogonal à D et $\sigma_H \circ s_A \in \mathcal{I}(F)$ est de la forme $\sigma_D \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ \sigma_D$ avec $\vec{v} \in \vec{D}$. Or si $\{Q\} = H \cap D$, $\sigma_H \circ s_A(A) = A'$ avec $\overrightarrow{AA'} = 2\,\overrightarrow{AQ}$. Donc $\sigma_H \circ s_A = \sigma_D \circ t_{\overrightarrow{2AQ}}$, d'où, d'après la fin de la question 2.3, $4\,\overrightarrow{AP} = k\,\vec{u}$ et $\overrightarrow{AK} = (k/2)\,\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AI}$.

Si k est pair, Q est un centre de symétrie de F (d'après 2.2), donc $\sigma_D = s_Q \circ \sigma_H$ est un élément de $\mathcal{I}(F)$, et nous sommes dans le cas (III).
Si k est impair, on peut se ramener au cas $K = I$, i.e. $H = \Delta$: plus précisément, on a $\overrightarrow{AK} = (2k+1)\,\frac{\vec{u}}{4}$, donc $\overrightarrow{IK} = k\,\frac{\vec{u}}{2}$, ce qui implique que $\sigma_H \circ \sigma_\Delta = t_{2\overrightarrow{IK}} = t_{k\,\vec{u}}$, donc que $\sigma_\Delta \in \mathcal{I}(F)$.
Nous sommes alors dans le cas (II).

Ainsi, si $\mathcal{I}(F)$ contient une symétrie axiale, elle contient une symétrie axiale d'axe D ou Δ.

- Si maintenant f n'est pas une symétrie axiale, $f = \sigma_H \circ t_{\vec{v}}$ pour un $\vec{v} \in \vec{H}$, $\vec{v} = (k/2)\vec{u}$ et H est parallèle à D d'après 2.3. L'application $f \circ s_A \circ f^{-1}$ est une symétrie $s_{A'}$ pour un point $A' \notin D$ si $H \neq D$. On en déduit $s_A \circ s_{A'} = t_{2\overrightarrow{A'A}} \in \mathcal{I}(F)$ et $\overrightarrow{A'A} \in \vec{D}$ ce qui n'est pas possible. Donc $H = D$. On a alors $s_A \circ f = s_A \circ \sigma_D \circ t_{\vec{v}} = \sigma_{\Delta'} \circ t_{\vec{v}}$ où Δ' est la perpendiculaire à D en A, donc de la forme $\sigma_{\Delta''}$ où Δ'' est une perpendiculaire à D et nous sommes ramenés au cas où $\mathcal{I}(F)$ contient une symétrie axiale.

3.2



3.3 On sait, d'après 2.2 que , dans le cas (II), $\mathcal{I}^+(F)$ est engendré par s_A et s_B, or $s_B = \sigma_\Delta \circ s_A \circ \sigma_\Delta$ et par suite s_A et σ_Δ engendrent $\mathcal{I}(F)$.

Dans ce cas

- $\mathcal{I}^+(F)$ est constitué
  - de toutes les translations $t_{m\vec{u}},\ m \in \mathbb{Z}$
  - de toutes les symétries centrales de centre déduit de A par une translation de vecteur $k(\vec{u}/2),\ k \in \mathbb{Z}$
- $\mathcal{I}^-(F)$ est constitué
  - de toutes les symétries $\sigma_{\Delta'}$ d'axe Δ' déduit de Δ par une translation de vecteur $k(\vec{u}/2),\ k \in \mathbb{Z}$
  - des composées $\sigma_D \circ t_{m\vec{u}+\vec{u}/2},\ m \in \mathbb{Z}$

Inversement si $\mathcal{I}(F)$ est engendré par s_A et σ_Δ, $\mathcal{I}(F)$ est constitué des éléments qu'on vient de préciser, par conséquent l'ensemble des translations conservant F est $\{t_{m\vec{u}},\ m \in \mathbb{Z}\}$. Ainsi F est une frise de vecteur $\vec{u}$.

3.4 Dans le cas (III) $\mathcal{I}^+(F) = \{t_{m\vec{u}},\ m \in \mathbb{Z}\} \cup \{s_{A_k},\ k \in \mathbb{Z}\}$ où A_k est le point déduit de A par la translation de vecteur $k(\vec{u}/2)$ (On a alors $A_0 = A$ et $A_1 = B$).

$$\mathcal{I}^-(F) = \{\sigma_D \circ t_{m\vec{u}},\ m \in \mathbb{Z}\} \cup \{\sigma_D \circ s_{A_k},\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\sigma_D \circ t_{m\vec{u}},\ m \in \mathbb{Z}\} \cup \{\sigma_{L_k},\ k \in \mathbb{Z}\}$$

où L_k est la perpendiculaire en A_k à D.
$\mathcal{I}(F)$ peut être engendré par trois éléments: en effet s_A et s_B engendrent $\mathcal{I}^+(F)$, et f, s_A, s_B engendrent donc $\mathcal{I}(F)$ quel que soit l'élément f de $\mathcal{I}(F) \setminus \mathcal{I}^+(F)$ puisqu'alors $\mathcal{I}(F) = \mathcal{I}^+(F) \cup \mathcal{I}^+(F)$.
Supposons $\mathcal{I}(F)$ engendré par deux de ses éléments f et g, l'un au moins des deux , soit f, est un antidéplacement. Nous allons procéder cas par cas.

- $f = \sigma_{L_k},\ g = \sigma_{L_l}$
- $f = \sigma_{L_k},\ g = t_{m\vec{u}}$.

  Dans ces deux premiers cas $\mathcal{I}(F)$ n'est composé que de rélexions d' axes L_n et de translations, il ne peut contenir σ_D.
- $f = \sigma_{L_k},\ g = s_{A_l}$, alors $f^2 = I_d$ et $g^2 = I_d$.

  On pose $\vec{v} = (k-l)/2$. On a $g \circ f)^{2m} = t_{2m\vec{v}}$

  Les éléments de $\mathcal{I}^-(F)$ sont de la forme

  $(g \circ f)^{2m+1} = \sigma_D \circ t_{(2m+1)\vec{v}}$,

  $f \circ (g \circ f)^{2m} = \sigma_{L_k + m\vec{v}}$, $(g \circ f)^{2m+1} \circ g = \sigma_{L_k + (m+\frac{1}{2})\vec{v}}$

  On ne peut obtenir σ_D dans cette liste que si $l = k$, c'est à dire $\vec{v} = 0$, mais alors f et g n'engendrent qu'un groupe fini, il ne peut contenir des translations non triviales.
- $f = \sigma_{L_k},\ g = \sigma_D \circ t_{m\vec{u}}$

  $g^{2l+1} = \sigma_D \circ t_{ml\vec{u}}$,

  $f \circ g^{2l} = \sigma_{L_k + ml\frac{\vec{u}}{2}}$

  On ne peut obtenir σ_D dans cette liste que si $m = 0$ mais alors f et g n'engendrent pas $\mathcal{I}^-(F)$.

- $f = \sigma_{L_k}$, $g = s_{A_l}$, $\mathcal{I}^-(F)$ alors aussi engendré par $\sigma_{L_{k+m\frac{\vec{u}}{2}}}$ et $\sigma_D \circ t_{(l-k+m)\frac{\vec{u}}{2}}$ et on peut raisonner comme dans le cas précédent.

3.5 Dans le cas (I), $\mathcal{I}^+(F) = \mathcal{I}(F) = \{s_{A_k}\}_{k\in\mathbf{Z}} \cup \{t_{m\vec{u}}\}_{m\in\mathbf{Z}}$. On peut aussi le décrire comme

$$\mathcal{I}(F) = \{t^m\}_{m\in\mathbf{Z}} \cup \{st^m\}_{m\in\mathbf{Z}}$$

où $t = t_{\vec{u}},\ s = s_A$ avec les relations $st = t^{-1}s,\ s^2 = Id$.

Dans le cas (II),
$\mathcal{I}(F) = \{s_{A_k} \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \{t_{m\vec{u}} \mid m \in \mathbf{Z}\} \cup \{\sigma_D \circ t_{(2m+1)\frac{\vec{u}}{2}} \mid m \in \mathbf{Z}\} \cup \{\sigma_{\Delta_k} \mid k \in \mathbf{Z}\}$, où $\Delta_k = t_{k\frac{\vec{u}}{2}}(\Delta)$,
soit, si l'on pose $t' = \sigma_D \circ t_{\frac{\vec{u}}{2}},\ s' = \sigma_\Delta$,

$$\mathcal{I}(F) = \{t'^m\}_{m\in\mathbf{Z}} \cup \{s't'^m\}_{m\in\mathbf{Z}}$$

avec $s't' = t'^{-1}s',\ s'^2 = Id$.
Ces deux groupes sont donc isomorphes (explicitement on peut construire un isomorphisme θ de $\mathcal{I}(F_I)$ dans $\mathcal{I}(F_{II})$ qui envoie $t_{\vec{u}}$ sur $\sigma_D \circ t_{\vec{u}/2}$ et s_A sur σ_Δ).

4

4.1 Montrons que les quatre propriétés (IV) à (VII) s'excluent mutuellement:

- (IV) exclut visiblement (V), (VI) et (VII)
- (V) exclut (VI) car si F admettait deux axes de symétrie orthogonaux, elle admettrait pour centre de symétrie l'intersection de ces deux axes
- (V) exclut (VII) car si F admettait un axe de symétrie Δ dirigé par $\vec{u}$ et était conservée par la composée d'une symétrie $\sigma_{\Delta'}$ (Δ' dirigée par $\vec{u}$) et de la translation $t_{\frac{\vec{u}}{2}}$ alors F serait conservée par

  $$\sigma_\Delta \circ \sigma_{\Delta'} \circ t_{\frac{\vec{u}}{2}} = t_{\vec{v}+\frac{\vec{u}}{2}}$$

  où $\vec{v}$ est un vecteur orthogonal à $\vec{u}$, ce qui contredirait le fait que F est une frise de vecteur $\vec{u}$
- (VI) exclut (VII) car si on avait (VI) et (VII), F serait conservée par une application du type $\sigma_D \circ \sigma_{\Delta'} \circ t_{\frac{\vec{u}}{2}}$, qui est une symétrie centrale, car D et Δ' sont deux droites orthogonales.

Montrons maintenant qu'une de ces quatre propriétés est vraie: en effet

- soit $\mathcal{I}(F) = \mathcal{I}^+(F)$, c'est le cas (IV) ,

- soit F admet un axe de symétrie

  dirigé par $\vec{u}$, c'est le cas (V)

  ou

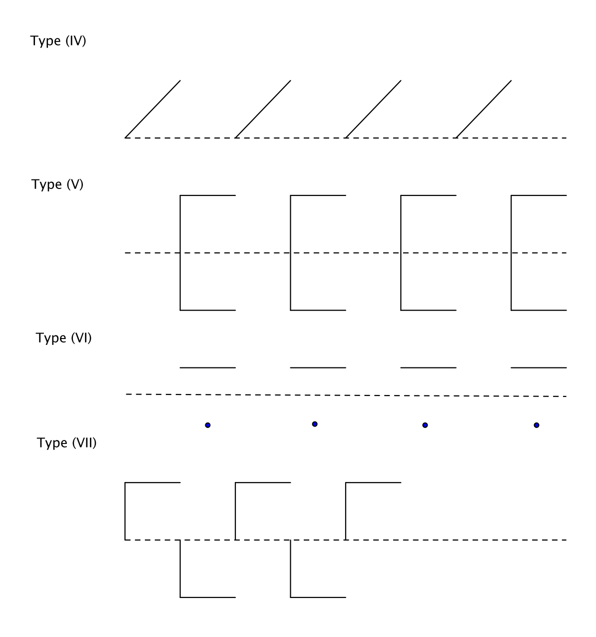
  orthogonal à $\vec{u}$, c'est le cas (VI),

- soit F est conservée par un antidéplacement autre qu'une symétrie axiale (symétrie glissée) qui s'écrit $\sigma_{D'} \circ t_{k\frac{\vec{u}}{2}}$ avec D' dirigée par $\vec{u}$, $k \in \mathbb{Z}$.

  S'il n'existe pas de tel antidéplacement avec k impair, F est invariante par σ_Δ car $\sigma_\Delta = (\sigma_\Delta \circ t_{2m\frac{\vec{u}}{2}}) \circ (t_{2m\vec{u}})$, c'est le cas (V),

  S'il en existe un avec k impair ($k = 2m+1$), alors F est conservée par $\sigma_\Delta \circ t_{(m+\frac{1}{2})\vec{u}} \circ t_{-m\vec{u}} = \sigma_\Delta \circ t_{\frac{\vec{u}}{2}}$, c'est le cas (VII).

4.2 Exemples:



4.3 Les groupes $\mathcal{I}(F)$ des types (IV) et (VII) sont isomorphes à $\mathbb{Z}$. En effet: dans le cas (IV)

$$\mathcal{I}(F) = \mathcal{I}^+(F) = \{t_{m\vec{u}} \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

est engendré par $t_{\vec{u}}$.
Dans le cas (VII): $\mathcal{I}(F)$ est engendré par $\sigma_\Delta \circ t_{\vec{u}/2} = f$.
Mais une partie F de P dont le groupe $\mathcal{I}(F)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ n'est pas nécessairement une frise. Soient par exemple $P = \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que$\alpha/\pi \notin \mathbb{Q}$ et $F = \{e^{i\pi/m} \mid m \in \mathbb{Z}\} \cup \{e^{i\alpha + ipi/m} \mid m \in \mathbb{Z}\}$. dans ce cas $\mathcal{I}(F)$ est le groupe des rotations de centre 0, d'angle m $(m \in \mathbb{Z})$.

4.4 Dans le cas (V), soit σ_D conserve F; alors σ_D et $t_{\vec{u}}$ engendrent $\mathcal{I}(F)$. Dans le cas (VI), soit σ_Δ une symétrie axiale conservant F, alors $\mathcal{I}(F)$ est engendré par σ_Δ et $t_{\vec{u}}$ (et aussi par σ_Δ et $\sigma_{\Delta'}$, où Δ' se déduit de Δ par la translation de vecteur $\vec{u}/2$).
4.5 On note $F_I, \dots, F_{VI}$ des figures respectant respectivement les propriétés $(I), \dots, (VII)$.
Les groupes $\mathcal{I}(F_{IV})$ et $\mathcal{I}(F_{VII})$ sont isomorphes. Ce sont des groupes à un générateur, sans relation (d'après 4.3)
Le groupe $\mathcal{I}(F_V)$ est engendré par deux générateurs s, t qui commutent entre eux ($st = ts$).
Les groupes $\mathcal{I}(F_I)$ et $\mathcal{I}(F_{II}$ sont isomorphes (cf.3.5). Ce sont tous deux des groupes définis par deux générateurs s, t et les relations $st = t^{-1}, s^2 = e$ où e désigne l'élément neutre du groupe. C'est aussi le cas de $\mathcal{I}(F_{VI})$ (d'après 4.4).
Le groupe $\mathcal{I}(F_{III})$ ne peut être engendré par moins de trois éléments (cf.3.4)
En résumé, il y a 7 types de frises et il y a 4 groupes d'isométries, à isomorphisme près, qui les conservent.
Remarque: En fait pour les types (IV) et (VII), les groupes sont isomorphes à $\mathbb{Z}$, pour les types (I),(II),(VI), les groupes à $\mathbb{D}_\infty$, le groupe diédral (produit semi-direct de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$), pour le type(VI), au produit direct de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et pour le type (III) au produit direct de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{D}_\infty$.

Deuxième problème

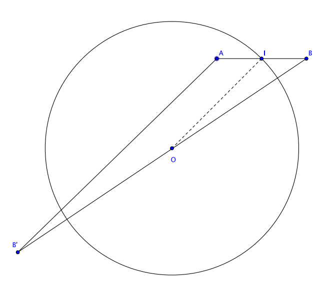
Questions préliminaires:
Remarquons tout d'abord que si une translation est composée de m réflexions, m est pair, qu'une transformation affine t est une translation si et seulement si sa partie linéaire est l'identité et qu'une transformation affine s est une réflexion si et seulement sa partie linéaire est l'homothétie vectorielle de rapport -1.
Soient A, $B \in C$, alors $s_A \circ s_B = t_{2\overrightarrow{BA}}$. Soit $\mathcal{G}$ le groupe engendré par $\{s_A\} \mid A \in C\}$; alors $\mathcal{G}$ contient toutes les translations de vecteur $2\,\overrightarrow{BA}$, $B, A \in \mathcal{C}$. En choisissant la corde $[A, B]$ parallèle à $\vec{i}$, on montre que $\mathcal{G}$ contient toutes les translations de vecteur $\lambda\,\vec{i}$ (où $-4\,R \leq \lambda \leq 4\,R$), donc (en mettant à une puissance ad hoc) toutes les translations de vecteur $x\,\vec{i}$ (où $x \in \mathbb{R}$). En choisissant la corde $[A, B]$ parallèle à $\vec{j}$, on montre de même que $\mathcal{G}$ contient toutes les translations de vecteur $y\,\vec{j}$ (où $y \in \mathbb{R}$), donc toutes les translations de vecteur $x\,\vec{i} + y\vec{j}$ et par suite toutes les translations du plan.
Fixons $s \in \mathcal{S}$ et soit s' une symétrie centrale (de centre quelconque); alors $t = s' \circ s$ est une translation, donc composée d'un nombre pair d'éléments de $\mathcal{S}$. On en déduit que $s' = t \circ s$ est composée d'un nombre impair d'éléments de $\mathcal{S}$.

Problème:

1. On peut reformuler ainsi les propriétés de φ:
$\varphi(0) = A,\ \varphi(n) = B$ et $\forall p \in [1, n],\ \exists s_p \in \mathcal{S}$ tel que $s_p(\varphi(p-1)) = \varphi(p)$.
On a donc
$B = \varphi(n) = s_n \circ s_{n-1} \circ \ldots \circ s_1(\varphi(0)) = s_n \circ \ldots \circ s_1(A)$, d'où $n \in \mathcal{U}$ si et seulement s'il existe $(s_1 , \ldots , s_n) \in \mathcal{S}^n$ tel que $s_n \circ \ldots \circ s_1(A) = B$.
Or la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est composée d'un nombre pair d'éléments de $\mathcal{S}$: $t_{\overrightarrow{AB}} = s_{2k} \circ \ldots \circ s_1$. Il est donc possible de prendre
$\varphi(0) = A,\ \varphi(1) = s_1(A), \ldots, \varphi(p) = s_p(\varphi(p-1))$ pour $1 \leq p \leq 2\,k$ et on a bien $\varphi(2\,k) = s_{2k} \circ \ldots \circ s_1(A) = B$. On aurait pu faire la même chose avec la symétrie ayant pour centre le milieu de AB, ce qui montre que $\mathcal{U}$ contient à la fois des entiers pairs et des entiers impairs.

2. On a $m = 1$ si et seulement si le milieu I de $[AB]$ appartient à $\mathcal{C}$. Or O étant le milieu de $[BB']$, on a:
$\overrightarrow{AB'} = 2\,\overrightarrow{IO}$. Donc

$$m = 1 \Leftrightarrow OI = R \Leftrightarrow AB' = 2R.$$



On a $m = 2$ si et seulement s'il existe D tel que le milieu J de $[AD]$ et le milieu K de $[DB]$ soient sur le cercle $\mathcal{C}$. Donc si $m = 2,\ AB = 2\,JK$ et $JK \leq 2\,R$ d'où $d = AB \leq 4\,R$. De plus $d' \neq 2\,R$ sinon on aurait $m = 1$.
Réciproquement si $d' \neq 2\,R$, on a $m \geq 2$. Si $d = AB \leq 4\,R$, il existe une corde $[JK]$ du cercle $\mathcal{C}$ telle que $2\,\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AB}$; soit D le symétrique de A par rapport à J : l'homothétie de centre D, de rapport 2 transforme J en A, K en B, donc K est le milieu de $[DB]$ et on peut prendre $\varphi(0) = A$, $\varphi(1) = D$, $\varphi(2) = B$ d'où $m = 2$.
Supposons $d > 4\,R$ et $d' < 2\,R$; alors $d' \neq 2\,R \Rightarrow m \geq 2$ et $d > 4\,R \Rightarrow m \geq 3$. Pour la fin de la démonstration, voir le cas général (question suivante).

3. On a $2\,n \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \exists\ s_1, \ldots, s_{2n} \in \mathcal{S}$ tels que $s_{2n} \circ \ldots \circ s_1(A) = B \Leftrightarrow s_{2n} \circ \ldots \circ s_1 = t_{\overrightarrow{AB}} \Leftrightarrow (s_{2n} \circ s_{2n-1}) \ldots (s_2 \circ s_1) = t_{\overrightarrow{AB}} \Leftrightarrow$ il existe n vecteurs $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}$ de normes $\leq 4\,R$ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u_1} + \ldots + \vec{u_n}$.
En effet, si s et s' sont deux éléments de $\mathcal{S}$ de centres ω et ω', $s \circ s'$ est la translation de vecteur $2\,\overrightarrow{\omega'\omega}$ et $\omega\omega' \leq 2\,R$ et réciproquement toute translation de vecteur de norme $\leq 4\,R$ peut se décomposer ainsi. On a donc

$$AB \leq \| \overrightarrow{u_1} \| + \ldots + \| \overrightarrow{u_n} \| \leq 4\,n\,R.$$

Réciproquement si $AB \leq 4\,n\,R$, on peut décomposer $\overrightarrow{AB} = n\,(\overrightarrow{AB}/n)$.
On en déduit que $2\,k$ est le plus petit élément pair de $\mathcal{U}$ si et seulement si on a
$4\,(k-1)\,R < d \leq 4\,k\,R$ ou ce qui est équivalent

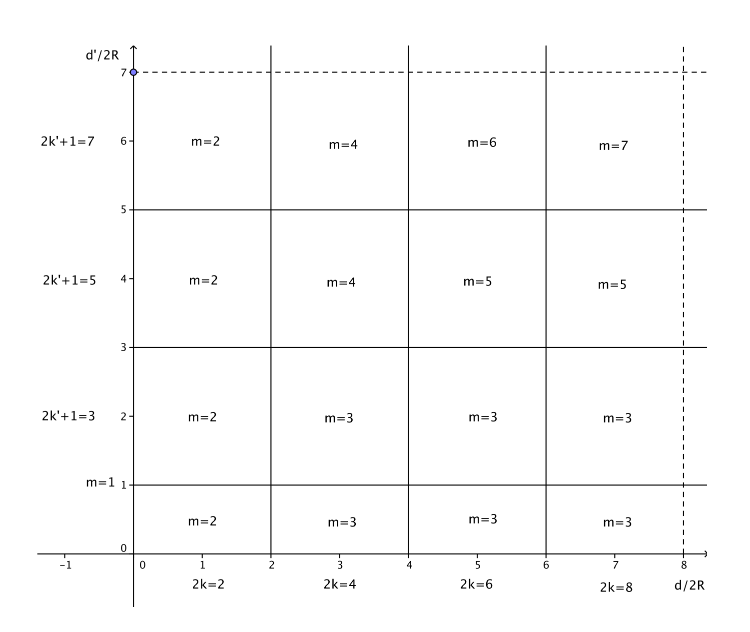
$$2\,k-2<\frac{d}{2\,R}\leq 2\,k$$

Par ailleurs, on a
$2n+1\in\mathcal{U}\Leftrightarrow \exists s_1,\ldots,s_{2n+1}\in\mathcal{S}$ tels que $s_{2n+1}\circ\ldots\circ s_1(A)=B$
$\Leftrightarrow \exists s_1,\ldots,s_{2n+1}\in\mathcal{S}$ tels que $s_O\circ s_{2n+1}\circ\ldots\circ\ldots\circ s_1(A)=s_O(B)=B'$.
$\Leftrightarrow$ il existe n vecteurs $\vec{u_1},\ldots,\vec{u_n}$ de normes $\leq$ $4\,R$ et un vecteur $\vec{u_0}$ de norme $=$ $2\,R$ tels que $\overrightarrow{AB'}=\vec{u_0}+\vec{u_1}+\ldots+\vec{u_n}$, d'où $d'\leq 4\,n\,R+2\,R=2(2n+1)\,R$.

– Si $d'>2\,R$, on en déduit que $2k'+1$ est le plus petit élément impair de $\mathcal{U}$ si et seulement si $2(2k'-1)\,R<d'\leq 2(2k'+1)\,R$, donc si et seulement si $2k'-1<\frac{d'}{2\,R}\leq 2k'+1$

– Si $d'<2\,R$, on a : $\overrightarrow{AB'}=\vec{u_0}+\vec{u_1}$, où $\vec{u_0}=\frac{2\,R}{\|\overrightarrow{AB'}\|}\,\overrightarrow{AB'}$ et $\vec{u_1}=\left(1-\frac{2\,R}{\|\overrightarrow{AB'}\|}\right)\overrightarrow{AB'}$, où l'on vérifie aisément que $\|\vec{u_0}\|=2\,R$ et que $\|\vec{u_1}\|\leq 4\,R$. On déduit alors de ce qui précède que ceci implique que $3\in\mathcal{U}$, ce qui achève de prouver que
$(d>4\,R$ et $d'<2\,R)\Rightarrow(m=3)$

4. Le plus petit élément pair de $\mathcal{U}$ est donc $2\,k=-2\,E(-\frac{d}{4R})$.
Le plus petit élément impair de $\mathcal{U}$ est :
$2\,k'+1=1-2\,E(\frac{2\,R-d'}{4R})$, si $d'>2\,R$,
$2\,k'+1=3$, si $d'<2\,R$,
$2\,k'+1=1$, si $d'=2\,R$.
On calcule $m=\inf(\mathcal{U})$ par la formule : $m=\inf(2k,2k'+1)$.
Illustration graphique:



Capes 1983, épreuve I

Ce travail fait à partir d'une photocopie peut présenter quelques erreurs, me les signaler à l'adresse suivante : `jeaneric.richard(a)wanadoo.fr` (changer (a) en @). Bon courage ! Version du 25 octobre 2008 à 14h25.

---

1. Donner les variations de $g : t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Justifier les inégalités

$$\frac{2}{\pi} \leqslant \int_0^{\pi} \frac{2}{t^2}\sin^2\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

2. Justifier l'égalité, pour $x > 0$,

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1-\cos x}{x} + \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et que

$$\frac{2}{\pi} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}.$$

3. Pour tout réel t et tout entier $n \geqslant 1$, on pose $\mathrm{D}_n(t) = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos kt$. Vérifier que

$$2\left(\sin\frac{t}{2}\right)\mathrm{D}_n(t) = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t.$$

En déduire la valeur de

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

4. a) Démontrer que la fonction f définie sur $[0\,;\pi]$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(t) = \dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \dfrac{1}{t} \quad \text{pour } 0 < t \leqslant \pi \end{cases}$$

est continue et dérivable. Étudier les limites de sa dérivée f' en 0 et π.

b) Développer en série entière $\dfrac{2-\sin^2 x}{2}$ et $\dfrac{\sin^3}{x^2}$ en précisant les valeurs numériques des quatre premiers coefficients non nuls. Démontrer que

$$2(2-\sin^2 x) - 4\frac{\sin^3 x}{x^2} \geqslant (21-8x^2)\frac{x^4}{90} \qquad \text{pour} \qquad 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

En déduire que f' est croissante.

5. Justifier l'égalité :

$$\int_0^{\pi} f(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{2n+1}\int_0^{\pi} f'(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t.$$

En déduire que

$$\left|\int_0^{\pi} f(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{2}{(2n+1)^2}.$$

Qu'en déduire quand n tend vers $+\infty$?

6. Justifier l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$, puis l'égalité

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

7. a) Démontrer que la fonction

$$h : t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ \sin^2 \frac{1}{t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

est intégrable au sens de Riemann sur $\left[0\,;\frac{2}{\pi}\right]$.

b) Soit $p(x)$ la partie entière de $\dfrac{2x}{\pi}$, justifier l'égalité :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{p(x)} \sin^2\frac{x}{n} = \int_0^{\frac{2}{\pi}} \sin^2\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

8. En utilisant que $\sin^2\dfrac{x}{t}$ est une fonction décroissante de t pour $t > \dfrac{2x}{\pi}$, justifier l'inégalité

$$\left|\sum_{n=p(x)+1}^{+\infty} \sin^2\frac{x}{n} - \int_{\frac{2x}{\pi}}^{+\infty} \sin^2\frac{x}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad x > 0.$$

9. Justifier l'égalité $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \sin^2\frac{x}{n} = \frac{\pi}{2}$.

10. a) Démontrer que pour tout réel x la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}$ converge et que le reste, pour p entier $\geqslant 1$,

$$\mathrm{R}_p(x) = \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}$$

a une valeur absolue inférieure ou égale à $\dfrac{|x|}{p}$.

b) On pose $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}$. Déduire de la majoration de $\mathrm{R}_p(x)$ que φ est une fonction continue telle que

$$\int_0^{x} \varphi(u)\,\mathrm{d}u = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \sin^2\frac{x}{2n}.$$

En déduire que $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x \varphi(u)\,\mathrm{d}u$ admet une limite que l'on précisera quand x tend vers $+\infty$.

11. Démontrer que pour tout réel u la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\cos\frac{u}{n}$ converge, que le reste pour p entier $p \geqslant 1$

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\cos\frac{u}{n}$$

a une valeur absolue inférieure à $\dfrac{1}{p}$, et que la somme $\psi(u)$ de la série est telle que

$$\int_0^x \psi(u)\,\mathrm{d}u = \varphi(x), \qquad \text{pour tout } x.$$

12. Démontrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une réel l tel que, pour tout réel α, il existe T de $[\alpha\,;\alpha + l]$ pour lequel

$$\left|\psi(u+\mathrm{T}) - \psi(u)\right| < \epsilon, \quad \forall u.$$

13. On suppose dans cette question que la fonction φ est bornée de borne inférieure m et de borne supérieure M. On fixe un réel ϵ, $\epsilon > 0$, puis on considère des réels η, ϵ_1, ϵ_2 strictement positifs que l'on précisera dans le suite. On considère alors x_1, x_2 tels que

$$\varphi(x_1) < m + \eta, \qquad \varphi(x_2) > M - \eta$$

puis T_1, T_2 tels que, pour i égal à 1 ou 2, on ait

$$\left|\psi(u+\mathrm{T}_i) - \psi(u)\right| < \epsilon_i, \qquad \text{pour tout } u.$$

a) Démontrer que

$$|\varphi(x_2+\mathrm{T}_1) - \varphi(x_1+\mathrm{T}_1) - \varphi(x_2) + \varphi(x_1)| \leqslant \epsilon_1\,|x_1 - x_2|.$$

En déduire $\varphi(x+\mathrm{T}_1) \leqslant m + 2\eta + \epsilon_1\,|x_1 - x_2|$, puis :

$$\varphi(x+\mathrm{T}_1+\mathrm{T}_2) \leqslant m + 2\eta + (\epsilon_1+\epsilon_2)\,|x_1 - x_2|.$$

b) Vérifier que, pour tout x,

$$\int_x^{x+\mathrm{T}_2} \psi(u)\,\mathrm{d}u = \int_{x_1}^{x_1+\mathrm{T}_1+\mathrm{T}_2} \psi(u)\,\mathrm{d}u + \int_x^{x_1+\mathrm{T}_1} (\varphi(u) - \psi(u+\mathrm{T}_2))\,\mathrm{d}u.$$

En déduire qu'il existe un réel l_1, $l_1 > 0$ tel que

$$\left|\int_x^{x+\mathrm{T}_2} \psi(u)\,\mathrm{d}u\right| \leqslant l_1\epsilon_2 + 2\mu + (\epsilon_1+\epsilon_2)\,|x_1 + x_2|.$$

c) Démontrer qu'il existe une réel l_2, $l_2 > 0$ tel que, pour tout réel α, il existe T_2 de $[\alpha\,;\alpha + l_2]$ pour lequel

$$|\varphi(x+\mathrm{T}_2) - \varphi(x)| \leqslant \epsilon, \qquad \text{pour tout } x.$$

d) Vérifier que pour tout réel α,

$$\int_0^x \varphi(u)\,\mathrm{d}u - \int_\alpha^{\alpha+x} \varphi(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^x (\varphi(u) - \varphi(u+\mathrm{T}_2))\,\mathrm{d}u - \int_\alpha^{\mathrm{T}_2} \varphi(u)\,\mathrm{d}u - \int_{\alpha+x}^{\mathrm{T}_2+x} \varphi(u)\,\mathrm{d}u.$$

et montrer qu'il existe un réel K tel que pour tout réel α

$$\left|\int_0^x \varphi(u)\,\mathrm{d}u - \int_\alpha^{\alpha+x} \varphi(u)\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \epsilon x + K, \qquad \text{pour tout } x > 0.$$

14. En choisissant $\alpha = -\frac{n}{2}$, démontrer que la fonction $\varphi : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$ n'est pas bornée.

Capes 1983, épreuve II

Ce travail fait à partir d'une photocopie peut présenter quelques erreurs, me les signaler à l'adresse suivante : `jeaneric.richard(a)wanadoo.fr` (changer (a) en @). Bon courage ! Version du 12 juin 2008 à 14h29.

Tout le problème ce situe en géométrie plane, dans un plan affine euclidien. La produit scalaire de deux vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ est noté $\vec{a}.\vec{b}$; la distance euclidienne de deux points A, B est noté AB.
Le plan est muni de sa topologie usuelle. On rappelle que toute intersection de parties fermées est une partie fermé, et que toute application continue du plan dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels transforme une partie fermée bornée du plan en partie fermée bornée de $\mathbb{R}$.
Une partie E du plan est dite convexe si, pour tout couple de points A et B de E le segment d'extrémités A et B est inclus dans E. On remarque que l'image d'une partie convexe par projection sur une droite est convexe.
Le but du problème est l'étude des parties convexes fermées de largeur un dans toute direction. c'est-à-dire dont la projection orthogonale sur toute droite du plan et un segment de longueur un. Une telle partie sera appelée par abréviation, une roue de diamètre un.

Partie I

I.1. Approche expérimentale. Cinq points S, A, A', B, B' sont disposé dans le plan de la manière suivante : le triangle SAA' et isocèle rectangle (angle droit en S), son hypoténuse a pour longueur un ; les points B, B' sont dans le demi-plan limité par la droite AA' et qui ne contient pas S ; les quatre distances AB, SB, A'B', SB'sont égales à un.

L'unité de longueur étant 6 cm, dessiner une ligure répondant à cette description en indiquant brièvement comment on a procédé.

On considère l'intersection Ω_1 des cinq disques fermés de rayon un, centrés respectivement en S, A, A', B, B'. Représenter Ω_1 ; compléter le dessin en représentant la projection orthogonale de Ω_1 sur une droite non sécante. la projetante de A coupant par exemple le segment SA' en son milieu.

I.2. Soit Ω une roue de diamètre un. La frontière Δ d'un demi-plan fermé contenant Ω est dite droite d'appui de D si et seulement si l'intersection $\Delta \cap \Omega$ est non vide.

Montrer successivement que :

- Dans toute direction Ω possède exactement deux droite d'appui (parallèles) ;
- La distance de deux points de Ω est au plus égale à un ;
- Une droite d'appui de Ω rencontre Ω en un seul point ;
- La droite qui joint deux points de Ω situés sur deux droites d'appui parallèles est perpendiculaire à ces deux droites.

I.3. Démontrer que l'intérieur d'une roue de diamètre un est non vide.

Indication : En choisissant deux directions orthogonales, fermer un carré de côté un dont le contour a quatre points communs avec la roue ; en déduire que celle-ci contient un disque.

I.4 Soit Ω une roue de diamètre un, et Γ sa frontière, c'est-à-dire l'ensemble des points N tels que tout disque de centre N rencontre à la fois la partie Ω et la partie complémentaire.

En considérant un point A du plan, établir l'existence d'un point B de Ω tel que : $(\forall P \in \Omega),\ (AB > AP)$.

Démontrer que la droite perpendiculaire en B à la droite AB est une droite d'appui. Étudiant alors l'intersection avec Ω de la droite AB, démontrer que A est sur la frontière Γ si et seulement si A appartient à la fois à Ω et à une droite d'appui.

I.5 Pour chaque droite d'appui Δ d'une roue Ω de diamètre un, on considère le demi-plan fermé délimité par Δ et contenant Ω. Quelle est l'intersection de ces demi-plans ?

I.6. L'unité de longueur est encore 6 cm. Dessiner un triangle équilatéral T de côté un. On recherche une ruoe de diamètre un contenant T ; démontrer qu'il en existe une et une seule ; la représenter. Déterminer son périmètre.

Partie II.

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. l'expression générale d'un vecteur unitaire est :

$$\vec{u}(\theta) = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}, \qquad \text{on pose}\,\vec{v}(\theta) = \vec{u}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right).$$

Le paramètre θ décrit $\mathbb{R}$.
On désigne par p, de dérivées p', p'', une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (qu'on particularisera qu'à la question **II.4.**) satisfaisant aux conditions ci-après :

(i) $(\forall\theta \in \mathbb{R})(p(\theta) + p(\theta + \pi) = 1)$;

(ii) La dérivée p' est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et l'ensemble F est points de $[0\,;\,\pi]$ où elle n'est pas dérivable est fini, ou peut être vide;

(iii) $(\forall\theta \in [0\,;\,\pi])\,[(\theta \in \mathrm{F}) \Longrightarrow (0 \leqslant p(\theta) + p''(\theta) \leqslant 1)]$.

Au réel θ on associe :

- la droite D(θ) dont une équation dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$ est

$$x\cos\theta + y\sin\theta - p(\theta) = 0\ ;$$

- Le point M(θ) défini par $\overrightarrow{OM(\theta)} = p(\theta)\vec{u}(\theta) + p'(\theta)\vec{v}(\theta)$.

II.1. Pour θ fixé et k décrivant $\mathbb{Z}$, vérifier que les droites D $(\Theta + k\pi)$ n'occupent que deux positions distinctes; ces deux positions délimitent une bande H (θ) dont on précisera la largeur.

II.2. Soit θ_0 un réel fixé; en note en abrégé $\overrightarrow{u_0} = \vec{u}(\theta_0)$. Étudier les variations, quand θ décrit $\mathbb{R}$ de la fonction X définie par : X $(\theta) = \overrightarrow{u_0}.\overrightarrow{OM(\theta)}$. En déduire que M (θ) ne sort pas de la bande H (θ_0).

II.3. On pose $\Omega = \bigcap\limits_{\theta\in\mathbb{R}} \mathrm{H}(\theta)$.

Démontrer que Ω est une roue de diamètre un dont les D(θ) sont les droites d'appui, et dont la frontière Γ est décrite par M(θ).

II.4. Exemple : Avec les données ci-dessous il est demandé, à échelle libre,une représentation de p, puis le dessin (unité de longueur 8 cm) de Ω.

On donne la restriction de p à $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ $:\theta \longmapsto p(\theta) = \frac{2\theta}{\pi}$, et on suppose que, sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$, $p(\theta)$ s'exprime par une fonction polynôme du second degré.

Déterminer $p(\theta)$, d'abord sur $\left[\pi\,;\,\frac{3\pi}{2}\right]$ puis sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$ et sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$. Donner une représentation graphique de p.

Construire l'arc de frontière correspondant à $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$; mettre en place ensuite l'arc correspondant à $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{2}$.

0n établira qu'il existe une symétrie orthogonale échangeant ces deux arcs.

Achever la représentation sans étude approfondie des autres arcs.

Partie III

Pour guider la variation de D(θ) (cf. **II.**) lorsque θ parcourt $[0\,;\,\pi]$, on considère la demi-ellipse définie dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$ par :

$$\begin{cases} 4x^2 + 16y^2 = 1 \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

On note A, A' ses extrémités (sommets du grand axe).

III.1. Déterminer l'application continue q de $[0\,;\,\pi]$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout θ de $[0\,;\,\pi]$, la droite :

$$x\cos\theta + y\sin\theta - q(\theta) = 0$$

soit une tangente à la demi-ellipse.

Montrer que q admet un prolongement p à $\mathbb{R}$ satisfaisant aux conditions énoncées dans (). Il existe donc une roue de diamètre un, Σ, dont la frontière contient la demi-ellipse.

III.2 . Á partir d'un tracé de la demi-ellipse, représenter Σ (unité de longueur 8 cm).

III.3. Démontrer que Σ contient un demi-cercle d'extrémités A et A'.

III.4. On veut trouver les demi-cercles de diamètre un inclus dans une roue de diamètre un. Ω, donnée par ses droites d'appui comme dans la partie **II.**

Montrer que les extrémités d'un tel demi-cercle sont nécessairement un couple de points : M(θ), M($\theta + \pi$). On note C(θ) le milieu du segment M(θ), M($\theta + \pi$) et L(θ) la médiane de ce segment.

On suppose qu'une valeur θ_0 du paramètre réalise ta situation suivante : toutes les droites L(θ) sécantes à L (θ_0) coupent L (θ_0) sur une même demi-droite fermée δ d'origine C (θ_0). Montrer que le demi-cercle d'extrémités M (θ_0) , M ($\theta_0 + \pi$) qui coupe δ est inclus dans Ω. @

III.5. Montrer que si l'un des demi-cercles fermés d'extrémités $M(\theta),\ M(\theta+\pi)$ est contenu dans Ω, l'autre n'a aucun point à l'intérieur deΩ.

III.6. ***Application à la roue*** Σ On suppose $\dfrac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Z}$. Montrer que la frontière de Σ a même centre de courbure en $M(\theta)$ et $M(\theta + \pi)$.

Démontrer que le rayon de courbure de cette frontière en chaque extrémité autre que A et A' d'un demi-cercle de diamètre un contenu dans Σ et est égal à $\dfrac{1}{2}$.

Déterminer les demi-cercles de diamètre un contenus dans Σ.

CAPES externe 1984 composition 1

35-0

Mathématiques
Jeudi 3 mai

J. 1052

SESSION DE 1984

84

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

Si une application f est dérivable, on désigne par f' sa dérivée; on désigne par $f^{(k)}$ sa dérivée k-ième lorsque f est k fois dérivable.

On désigne par E l'espace vectoriel des applications de R dans lui-même indéfiniment dérivables.

Étant donné deux réels α et λ avec $|\lambda| \leqslant 1$, on désigne par $E_{\alpha,\lambda}$ l'ensemble des applications f de R dans lui-même, dérivables et telles que pour tout réel t :

$$f'(t) = e^{\alpha t} f(\lambda t).$$

Question préliminaire : démontrer que $E_{\alpha,\lambda}$ est un sous-espace vectoriel de E.

I

1. On suppose dans cette question que $\lambda = 1$ et que α est un paramètre réel quelconque.

a. Déterminer les éléments de $E_{\alpha,1}$.

On note f_α l'unique élément de $E_{\alpha,1}$ tel que $f_\alpha(0) = 1$ et C_α le graphe de f_α.

b. Étudier, selon la valeur de α, les variations de f_α et son comportement en $+\infty$ et en $-\infty$.

Déterminer le sens de la concavité et la position respective des graphes C_α.

c. Représenter graphiquement sur une même figure les fonctions f_1, f_0, $f_{-1/2}$, f_{-2} en marquant précisément les asymptotes, les points d'inflexion et la tangente au point (0,1) [on prendra pour unité 2 cm].

2. On suppose dans cette question que $\lambda = -1$ et que α est toujours un paramètre réel quelconque.

a. Soit f un élément arbitraire de $E_{\alpha,-1}$. Déterminer une équation différentielle (L_α) linéaire du second ordre à coefficients constants dont f est solution.

b. Déterminer les éléments de E solutions de (L_α).

Dans chacun des trois cas : $|\alpha| \neq 2$, $\alpha = 2$, $\alpha = -2$, préciser quelles sont parmi les solutions de (L_α) les applications f appartenant à $E_{\alpha,-1}$. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $E_{\alpha,-1}$?

Tournez la page S. V. P.

II

Dans toute cette partie, on donne un réel λ tel que $0 < \lambda < 1$.

1. Dans cette question α est un réel strictement positif fixé.

On considère une application f non nulle élément de $E_{\alpha,\lambda}$ (l'existence d'une telle application sera démontrée au III). On se propose de démontrer que f admet une limite finie en $-\infty$.

a. Démontrer que pour tous réels a et t :

$$f(t) = f(a) + \int_a^t e^{\alpha u} f(\lambda u)\, du$$

b. On suppose que f n'est pas bornée sur $]-\infty, 0]$.

Un réel A négatif étant donné, montrer qu'il existe un réel $B < A$ pour lequel $|f(B)| > 2|f(A)|$ et $|f(B)|$ est le maximum de $|f|$ sur le segment $[B, 0]$. En déduire que :

$$|f(B)| < \frac{2e^{\alpha A}}{\alpha} |f(B)|.$$

Démontrer que l'hypothèse « f non bornée sur $]-\infty, 0]$ » est contradictoire avec l'appartenance de f à $E_{\alpha,\lambda}$.

Donc f est bornée sur $]-\infty, 0]$.

c. Démontrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} |f'(t)|\, dt$ converge et en déduire que f a une limite finie en $-\infty$.

2. Dans cette question on donne un réel $\alpha \geqslant 1$.

On considère une application f élément de $E_{\alpha,\lambda}$ telle que $f(0) > 0$ (l'existence d'une telle fonction sera démontrée au III). On pourra utiliser dans les démonstrations l'égalité déduite du II.1.*a* :

$$f(t) = f(0) + \int_0^t e^{\alpha u} f(\lambda u)\, du.$$

a. Démontrer qu'il existe un réel β strictement positif tel que $f(t)$ soit strictement positif pour tout t de $[0, \beta]$, puis, qu'il en est encore ainsi pour tout t de $\left[0, \frac{\beta}{\lambda}\right]$. En déduire que $f(t)$ est strictement positif pour tout réel t positif.

b. Démontrer qu'il existe un réel γ strictement négatif pour lequel $0 < f(t) < f(0)$ pour tout t de $[\gamma, 0[$, puis, qu'il en est encore ainsi pour tout t de $\left[\frac{\gamma}{\lambda}, 0\right[$.

En déduire que pour tout réel t strictement négatif :

$$\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) f(0) < f(t) < f(0).$$

c. Donner les variations de f et de f'. Étudier le comportement de f en $+\infty$ (limite et direction asymptotique). Démontrer que f admet une limite strictement positive en $-\infty$, si $\alpha > 1$.

d. Comment les résultats du *c.* sont-ils modifiés dans le cas où $f(0)$ est strictement négatif ?

3. *a.* Soit f une application de R dans lui-même et g l'application de $]0, +\infty[$ dans R définie par $g(x) = f(\ln x)$.

Démontrer que f est un élément de $E_{\alpha,\lambda}$ si et seulement si g est dérivable et vérifie pour tout réel x strictement positif :

$$g'(x) = x^{\alpha-1} g(x^\lambda).$$

(1)

On suppose dorénavant $\alpha = 1$ et on étudie une fonction g vérifiant la condition précédente et telle que $g(1) = 1$.

b. Donner les variations et le signe de g, de sa dérivée, puis de la fonction u définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$u(x) = g(x) - x$$

Démontrer que g admet un prolongement continu en 0, par une valeur l strictement positive.

Étudier le signe de $(\lambda + 1)\, g(x) - x^{\lambda+1} - \lambda$ pour x positif; en déduire un majorant de l et la limite de $\frac{g(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c. On considère l'application h définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{g(x)}{x^{\frac{1}{1-\lambda}}}.$$

Démontrer que le signe de $h'\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)$ est celui de :

$$k(x) = (1-\lambda)\, x^{\frac{1}{\lambda}}\, g(x) - g\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right).$$

Établir une relation entre $k'(x)$ et $k(x^{\lambda})$; en déduire que h est décroissante, et étudier le signe de $g(x) - x^{\frac{1}{1-\lambda}}$, puis celui de :

$$g(x) - (1-\lambda)^{2}\, x^{\frac{1}{1-\lambda}} - \lambda x - \lambda(1-\lambda).$$

d. Dans le cas $\lambda = \frac{1}{2}$, représenter graphiquement les fonctions qui à x positif associent :

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\, x^{\frac{3}{2}}, \qquad \frac{1}{4}(x+1)^{2}, \qquad g(x)$$

(on prendra pour unité 10 cm).

Donner les développements limités à l'ordre deux au voisinage de 1 de g, puis des fonctions g_1 et g_2 définies sur $]1, +\infty[$ par :

$$g_1(x) = \frac{x^{2} - 1}{2 \ln x},$$

$$g_2(x) = \frac{x^{2}}{1 + \ln x}.$$

Montrer que, sur $]1, +\infty[$, on a $g_1'(x) < g_1(\sqrt{x})$ et $g_2'(x) > g_2(\sqrt{x})$, et démontrer que $g(x)$ est entre $g_1(x)$ et $g_2(x)$.

III

Dans toute cette partie on donne deux réels α et λ avec $|\lambda| < 1$.

1. *a.* On suppose qu'il existe une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ convergente sur R dont la somme f, définie pour tout réel t par :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

est un élément de $E_{\alpha,\lambda}$.

A l'aide du développement en série entière de la fonction $t \longmapsto e^{\alpha t}$, établir une relation de récurrence donnant a_n en fonction de $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ pour tout entier n strictement positif.

Tournez la page S. V. P.

b. Un réel y_0 est fixé arbitrairement. La relation de récurrence de la question précédente définit une unique suite de premier terme y_0; on note cette suite (a_n).

Démontrer que si pour un entier n strictement positif et pour un réel H_1 on a pour tout entier naturel $k \leqslant n - 1$:

$$|a_k| \leqslant |y_0| \frac{H_1^k}{k!}$$

alors on a aussi :

$$|a_n| \leqslant \frac{|y_0|}{n!} (|\alpha| + |\lambda|\, H_1)^{n-1}$$

En déduire qu'il existe un réel H tel que pour tout entier naturel n, on ait :

$$|a_n| \leqslant |y_0| \frac{H^n}{n!}$$

c. Démontrer qu'il existe une et une seule application f élément de $E_{\alpha,\lambda}$ développable en série entière convergente sur R et telle que $f(0)$ soit un réel y_0 donné.

2. Soit un élément f quelconque de $E_{\alpha,\lambda}$.

a. On considère un entier n strictement positif et un réel t. Calculer $f^{(n)}(t)$ en fonction des $f^{(k)}(\lambda t)$ pour les entiers naturels $k \leqslant n - 1$.

b. On considère un réel A strictement positif et on note M le maximum de $|f|$ sur $[-A, A]$. Par une méthode analogue à celle employée dans la question 1. *b.* précédente, démontrer qu'il existe un réel H tel que pour tout entier naturel n et pour tout réel t de $[-A, A]$ on ait :

$$|f^{(n)}(t)| \leqslant M\, H^n.$$

c. Justifier l'égalité pour tout réel t :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, t^n.$$

Capes 1984, épreuve II

Ce travail fait à partir d'une photocopie peut présenter quelques erreurs, me les signaler à l'adresse suivante : `jeaneric.richard(a)wanadoo.fr` (changer (a) en @). Bon courage ! Version du 12 juin 2008 à 14h42.

Soit $\mathscr{V}$ un espace vectoriel euclidien orienté, de dimension 3 sur le corps de réels. On considère l'espace vectoriel produit $\mathbb{R}\times\mathscr{V}$, de dimension 4 sur $\mathbb{R}$, dont les éléments sont des couples $(x,\vec{U})$ où x est un réel et $\vec{U}$ un vecteur de $\mathscr{V}$. On définit sur $\mathbb{R}\times\mathscr{V}$ une multiplication par :

$$(x,\vec{U})(y,\vec{V}) = (xy-\vec{U}.\vec{V}, x\vec{V}+y\vec{U}+\vec{U}\wedge\vec{V})$$

pour tous réels x et y, pour tous vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ de $\mathscr{V}$, où $\vec{U}.\vec{V}$ et $\vec{U}\wedge\vec{V}$ désignent respectivement le produit scalaire et la produit vectoriel de $\vec{U}$ par $\vec{V}$.

Cette multiplication a pour élément neutre $e=(1,\vec{0})$; l'espace vectoriel $\mathbb{R}\times\mathscr{V}$ muni de la multiplication est noté $\mathbb{H}$ et ses éléments sont appelés *quaternions*.

Partie I

1. Déterminer les quaternions $q=(x,\vec{U})$ tels que $q^2=e$, puis ceux tels que $q^2=-e$.

2. Soit $\vec{I},\vec{J},\vec{K}$ trois vecteurs de $\mathscr{V}$.

   a) Montrer que $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ est une base orthonormale directe de $\mathscr{V}$ si et seulement si les trois quaternions $i=(0,\vec{I})$, $j=(0,\vec{J})$, $k=(0,\vec{K})$ vérifient :

   $$\begin{cases} i^2 = j^2 = -e \\ ij = k \end{cases}$$

   b) lorsqu'il en est ainsi, vérifier que $ji=-k$ et calculer k^2, jk, kj, ki, ik.
   Vérifier les cinq égalités :

   $$i^2i=ii^2,\ i^2j=i(ij),\ (ij)i=i(ji),\ (ij)j=ij^2,\ (ij)k=i(jk).$$

   c) En déduire sans autre calcul que la multiplication de $\mathbb{H}$ est associative. [On pourra utiliser le fait (évident) que la multiplication est une forme bilinéaire de $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$].

3. Étant donné un quaternion $q=(x,\vec{U})$, déterminer les quaternions $r=(y,\vec{V})$ tels que $rq=qr$.
   En déduire que les quaternions q tels que $rq=qr$ pour tout quaternion r ; ces quaternions sont dits *réels*.

4. Montrer que l'addition et la multiplication de $\mathbb{H}$ lui confère la structure de corps (non commutatif).

5. à tout quaternion $q=(x,\vec{U})$ on associe son *conjugué* $\overline{q}=(x,-\vec{U})$ et le réel $N(q)=x^2+\vec{U}.\vec{U}$. Ainsi les quaternions égaux à leur conjugué sont les quaternions réels. Les quaternions opposés à leur conjugué, c'est à dire de la forme $(0,\vec{U})$ sont dits *purs*.

   a) Exprimer les produits $q\overline{q}$ et $\overline{q}q$ en fonction de $N(q)$.

   b) Exprimer le conjugué $\overline{qr}$ du produit qr de deux quaternions q et r quelconques en fonction des conjuguées $\overline{q}$ et $\overline{r}$. En déduire $N(qr)$ en fonction de $N(q)$ et $N(r)$.

   c) Montrer que les quaternions q tels que $N(q)=1$ forment un groupe pour la multiplication des quaternions. Ce groupe sera noté S dans toute la suite.

   d) Montrer que pour tout quaternion q non nul il existe un unique couple (ρ,u) où ρ est un réel positif et u un quaternion de S tel que $q=\rho u$.

6. L'application $q \mapsto \sqrt{N(q)}$ de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{R}$ est une norme euclidienne. Ceci permet de considérer dorénavant $\mathbb{H}$ comme un espace vectoriel euclidien pour cette norme.

Soit $q = (0, \overrightarrow{U})$ et $r = (0, \overrightarrow{V})$ deux quaternions purs. Exprimer le produit scalaire de q et r (pour la structure euclidienne ci-dessus de $\mathbb{H}$) en fonction de $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$.

Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(i) q et r sont orthogonaux ;

(ii) le produit qr est un quaternion pur.

(iii) $qr + rq = 0$.

Partie II

1. a) Soit θ un nombre réel et $\overrightarrow{I}$ un vecteur unitaire de $\mathscr{V}$. On considère la quaternion $s = (\cos\theta, \sin\theta\,\overrightarrow{I})$ de S et l'application φ_s de $\mathbb{H}$ dans lui-même définie par $\varphi_s(q) = sqs^{-1}$ pour tout quaternion q.
Montrer que si $q = (x, \overrightarrow{U})$ et si $\varphi_s(q) = (x', \overrightarrow{U'})$ alors :

$$x = x' \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{U'} = R_s(\overrightarrow{U})$$

où R_s est une rotation de $\mathscr{V}$, ne dépendant pas de q, laissant $\overrightarrow{I}$ fixe, et dont on précisera l'angle.

b) Vérifier que par $s \mapsto R_s$ on établit un morphisme surjectif du groupe S sur le groupe O^+ des rotations de $\mathscr{V}$. Quel est le noyau de ce morphisme ?
En déduire un isomorphisme faisant intervenir S et O^+.

c) Montrer que si p et q sont deux quaternions purs de S, alors il existe un quaternion s de S tel que $q = sqs^{-1}$. Le quaternion s peut-il être choisi pur ?

2. On se propose de démontrer qu'il existe un seul morphisme de O^+ dans S. Pour cela on considère la partie Σ de O^+ formée des rotations d'angle π.

a) Soit ψ un morphisme de O^+ dans S. Montrer que pour tout σ de Σ on a $\psi(\sigma) = e$ ou $\psi(\sigma) = -e$.

b) Montrer que si σ et σ' dont deux éléments de Σ il existe un élément σ'' de Σ tel que $\sigma' = \sigma'' \circ \sigma \circ \sigma''$.
En déduire que $\psi(\sigma) = \psi(\sigma')$.

c) Montrer que $\psi(O^+) = \{e\}$.

3. Soit G un sous groupe distingué de S. On suppose que G contient un élément distinct de e te de $-e$. On se propose de montrer que $G = S$. On pourra utiliser le fait qu'un sous groupe G de S et distingué si et seulement si $\varphi_s(G) \subset G$ pour tout s de S.

a) Montrer à laide de la question II **2.** que, si G contient un quaternion pur alors $G = S$.

b) On considère deux quaternions purs i et j de S orthogonaux selon la définition I **6.** et $k = ij = -ji$. On suppose que G contient un quaternion $ae + bi$, où a et b sont deux réels non nuls avec $a^2 + b^2 = 1$.

Montrer que G contient $ae + bj$, puis $a^2 + ci$, avec $c = b\sqrt{1 + a^2}$. En déduire que G contient un quaternion $s = \alpha e + \beta i$ où α et β sont deux réels tels que $0 < \alpha \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Montrer que G contient un quaternion pur. (On le cherchera sous la forme $sqs^{-1}q^{-1}$, où $q = xe + yj$ avec x et y réels, est un élément de S).

c) Montrer que $G = S$.
En déduire que O^+ n'a pas de sous-groupes distingués non triviaux.

Partie III

1. Vérifier que l'application $\varphi_s : q \mapsto sqs^{-1}$ est un automorphisme du corps et de l'espace vectoriel $\mathbb{H}$.

2. Soit τ un morphisme du corps $\mathbb{R}$ dans lui-même (en particulier, on a $\tau(1) = 1$).

   a) Montrer que $\tau(r) = r$ pour tout rationnel r.

   b) Montrer que si x est un réel positif, il en est de même pour $\tau(x)$. En déduire que τ est croissant.

   c) Montrer que τ est l'identité.

3. Soit μ un automorphisme du corps $\mathbb{H}$.

   a) Montrer que μ laisse stable l'ensemble des quaternions réels, puis, laisse fixe tout quaternion réel.
   En déduire que μ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{R}$.

   b) Soit q et r deux quaternions purs, et orthogonaux de S. Montrer que $\mu(q)$ et $\mu(s)$ sont encore purs, orthogonaux et dans S.

   Soit q' et r' deux quaternions purs et orthogonaux de S. Démontrer qu'il existe un unique automorphisme du corps $\mathbb{H}$ transformant q en q' et r en r'.

   c) Montrer qu'il existe s dans S tel que $\mu = \varphi_s$.

Partie IV

1. On considère une base orthonormale (e, i, j, ij) de $\mathbb{H}$.

   a) Soit $r = ae + bi$ où a et b sont deux réels tels que $a^2 + b^2 = 1$. Démontrer que l'application δ_r de $\mathbb{H}$ dans lui-même défini par $\delta_r(q) = rq$ pour tout quaternion q est une transformation orthogonale directe de l'espace euclidien $\mathbb{H}$ en donnant sa matrice dans la base (e, i, j, ij).

   Montrer plus généralement qu'il en est de même pour l'application $\delta_{r,s}$ de $\mathbb{H}$ dans lui-même définie pour tout r et s de S par $\delta_{r,s}(q) = rqs^{-1}$ pour tout quaternion q.

   b) Vérifier que par $(r, s) \mapsto \delta_{r,s}$ on établit un morphisme surjectif du groupe produit $S \times S$ sur le groupe Ω des transformations orthogonales directes de l'espace euclidien $\mathbb{H}$ (on pourra vérifier le fait que, d'après le II 1. b) les éléments de Ω qui laissent e fixe sont les φ_s).
   Quel est le noyau de ce morphisme ?
   En déduire un isomorphisme faisant intervenir $S \times S$ et Ω.

2. a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les quaternions r et s de S pour que $\delta_{r,s}$ soit une involution distincte de $Id_{\mathbb{H}}$ (identité de $\mathbb{H}$) et de $-Id_{\mathbb{H}}$.

   b) Montrer que tout élément de Ω est produit de deux symétries orthogonales de $\mathbb{H}$ par rapport à des plans vectoriels.

   c) En déduire les morphismes de Ω dans $S \times S$.

3. a) Donner un exemple de groupe produit $G \times G$ possédant un sous groupe distingué qui n'est pas le produit $H_1 \times H_2$ de deux sous groupes distingués H_1 et H_2 de G.

   b) Dans toute la suite K est un sous groupe distingué du groupe produit $S \times S$. On note K_1 et K_2 les images respectives de K par les applications $(r, s) \mapsto r$ et $(r, s) \mapsto s$ de $S \times S$ dans S. Vérifier que K_1 et K_2 sont deux sous groupes distingués de S et que K est un sous groupe distingué de $K_1 \times K_2$.

   c) Déterminer K lorsque $K_1 = \{e\}$, puis lorsque $K_1 = K_2 = \{e, -e\}$.

   d) Montrer les résultats suivants :

   (i) s'il existe un quaternion pur p tel que (e, p) soit un élément de K, alors $\{e\} \times S$ est inclus dans K.
   En déduire qu'alors $K = K_1 \times K_2$.

   (ii) S'il existe un quaternion pur p tel que $(-e, p)$ soit dans K alors il existe un quaternion pur p' tel que (e, p') soit dans K.

(iii) S'il existe un quaternion non réel s tel que $(e, -s)$ soit dans K, alors il existe un quaternion pur p tel que (e, p) soit dans K.

(iv) Si $K_1 = K_2 = S$ alors il existe un quaternion non réel s tel que $(-e, s)$ soit dans K (on pourra considérer le carré d'un élément (p, r) de K, avec p pur).

e) Donner le nombre et la liste des sous-groupes distingués de $S \times S$, puis de Ω.

CAPES externe 1984 de Mathématiques seconde composition

solution proposée par Dany-Jack Mercier

IUFM de Guadeloupe, Morne Ferret,
BP399, Pointe-à-Pitre cedex 97159,
dany-jack.mercier@univ-ag.fr

NB : Le sujet de l'épreuve n'est pas joint à ce document. Il pourra être téléchargé au format pdf sur le site http://perso.wanadoo.fr/megamaths/

[0] [ag3] v1.00

(D'autres propriétés du corps des quaternions réels sont données dans "Les corps non commutatifs" de A. Blanchard. Coll. Sup aux PUF)

1.1 $q=(x,\vec{U})\in H$ $\qquad e=(1,\vec{0})$

$$q^2=(x^2-\|\vec{U}\|^2,\ 2x\vec{U})$$

Donc $q^2=e \iff \begin{cases} x^2-\|\vec{U}\|^2=1 \\ 2x\vec{U}=\vec{0}\end{cases}$

Si $x=0$, $-\vec{U}^2=1$ est absurde. Donc $\vec{U}=\vec{0}$ et $x^2=1$.

Ainsi : $\boxed{q^2=e \iff q=(\pm 1,\vec{0})}=\pm e$

De même $\boxed{q^2=-e \iff q=(0,\vec{U}) \text{ où } \|\vec{U}\|=1}$

1.2 a Si $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ est une b.o. directe, alors $i^2=j^2=-e$ d'après 1.1

et $ij=(0,\vec{I})(0,\vec{J})=(-\vec{I}.\vec{J},\ \vec{I}\wedge\vec{J})=(0,\vec{K})=k$

Réciproquement, si $\begin{cases} i^2=j^2=-e \\ ij=k\end{cases}$ alors 1.1 donne $\begin{cases} i=(0,\vec{I}) \text{ avec } \|\vec{I}\|=\|\vec{J}\|=1 \\ j=(0,\vec{J})\end{cases}$

et $ij=k \iff (-\vec{I}.\vec{J},\ \vec{I}\wedge\vec{J})=(0,\vec{K}) \iff \begin{cases}\vec{I}.\vec{J}=0 \\ \vec{I}\wedge\vec{J}=\vec{K}\end{cases} \Rightarrow (\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ b.o directe.

1.2.b

$ji=(0,\vec{J})(0,\vec{I})=(0,\vec{J}\wedge\vec{I})=(0,-\vec{K})=-k$

$k^2=-e \qquad (1.1)$

$jk=(0,\vec{J})(0,\vec{K})=(0,\vec{J}\wedge\vec{K})=(0,\vec{I})=i$

$kj=(0,\vec{K}\wedge\vec{J})=-i$

$ki=(0,\vec{K}\wedge\vec{I})=(0,\vec{J})=j$

$ik=-j$

et on vérifie les 5 égalités :

$\begin{cases} i^2i=(-e)i=-(ei)=-i \\ ii^2=i(-e)=(-i)e=-i\end{cases}$ car il est clair que $(-q)r=q(-r)=-qr$

$\begin{cases} i^2j=(-e)j=-j \\ i(ij)=ik=-j\end{cases}$

$\begin{cases} (ij)i=ki=j \\ i(ji)=i(-k)=-(ik)=-(-j)=j\end{cases}$

$\begin{cases} (ij)j=kj=-i \\ ij^2=i(-e)=-i\end{cases}$

$\{(ij)k=kk=-e$

1.2.c La multiplication $H \times H \to H$ est <u>bilinéaire</u> (en particulier : $\times$ est <u>distributive par rapport à l'addition</u>) et tout quaternion $(x, \vec{U})$ s'écrit :

$$(x, \vec{U}) = (x, \alpha \vec{I} + \beta \vec{J} + \gamma \vec{K}) = x(1, \vec{0}) + \alpha(0, \vec{I}) + \beta(0, \vec{J}) + \gamma(0, \vec{K})$$
$$= x e + \alpha i + \beta j + \gamma k$$

Tout revient donc à prouver l'associativité de la multiplication sur les vecteurs de base e, i, j, k, <u>en fait sur i, j, k</u> car e est l'unité de H.
Ce fut l'objet de 1.2.b (et des calculs identiques que l'on ferait en permutant les éléments i, j, k dans les 5 égalités du 1.2.b).

<u>NB</u> : La table de multiplication de i, j, k étant stable par permutation circulaire, on peut se contenter de vérifier les 5 égalités de 1.2.b puis celles obtenues en changeant j en k et k en j.

1.3 $q = (x, \vec{U}) \qquad r = (y, \vec{V})$

$$rq = qr \Leftrightarrow (xy - \vec{U}.\vec{V}, x\vec{V} + y\vec{U} + \vec{U} \wedge \vec{V}) = (yx - \vec{V}.\vec{U}, y\vec{U} + x\vec{V} + \vec{V} \wedge \vec{U})$$
$$\Leftrightarrow \vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{V} \wedge \vec{U} \Leftrightarrow \vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{U} \text{ et } \vec{V} \text{ colinéaires}$$

Si $rq = qr$ pour tout $r \in H$ signifiera que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ seront colinéaires quelque soit $\vec{V} \in \mathcal{V}$, ie $\vec{U} = \vec{0}$.
<u>Les quaternions réels sont donc les $(x, \vec{0})$</u>.

1.4 H est un anneau unitaire d'après 1.2.c, non commutatif. Il faut montrer que tout élément $q \in H^*$ possède un inverse q' ie $qq' = q'q = e$.
Soit $q = (x, \vec{U})$.
Si $\vec{U} = \vec{0}$, $(x, \vec{0}) = xe$ vérifie $(xe)\left(\frac{1}{x}e\right) = e$ (où $x \neq 0$).
Si $\vec{U} \neq \vec{0}$, on résout :

$$(x, \vec{U})(y, \vec{V}) = e$$
$$(xy - \vec{U}.\vec{V}, x\vec{V} + y\vec{U} + \vec{U} \wedge \vec{V}) = (1, \vec{0})$$
$$\begin{cases} xy - \vec{U}.\vec{V} = 1 \\ x\vec{V} + y\vec{U} + \vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{0} \end{cases} \quad (*)$$

Si $(\vec{U}, \vec{V})$ est un syst. libre, $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{U} \wedge \vec{V})$ est une base de $\mathcal{V}$ et $(*)$ est impossible. Donc $\vec{V} = \lambda \vec{U}$ et $(y, \vec{V})$ doit vérifier :

$$\begin{cases} xy - \lambda \vec{U}^2 = 1 \\ \lambda x \vec{U} + y\vec{U} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow y = -\lambda x$$

d'où $-\lambda x^2 - \lambda \vec{U}^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \dfrac{-1}{x^2+\vec{U}^2}$ et $y = \dfrac{x}{x^2+\vec{U}^2}$

Finalement $q' = (y, V) = \left(\dfrac{x}{x^2+\vec{U}^2} ; \dfrac{-1}{x^2+\vec{U}^2} . \vec{U} \right) = \dfrac{1}{x^2+\vec{U}^2} (x, -\vec{U})$

On vérifie que $q'q = e$.

Ccl : $\boxed{(x, \vec{U})^{-1} = \dfrac{1}{x^2+\vec{U}^2}(x, -\vec{U})}$ est valable dès que $(x, \vec{U}) \neq (0, \vec{0})$

1.5.a Avec ces notation, 1.4 donne $\boxed{q^{-1} = \dfrac{\overline{q}}{N(q)}}$

$q\overline{q} = (x, \vec{U})(x, -\vec{U}) = (x^2 + \vec{U}^2, -x\vec{U} + x\vec{U} + \vec{U} \wedge (-\vec{U})) = N(q)(1, \vec{0}) = N(q).e$

et de m̂ : $\boxed{\overline{q}q = q\overline{q} = N(q)e}$

1.5.b $q = (x, \vec{U})$ $r = (y, \vec{V})$

$\overline{qr} = (xy - \vec{U}.\vec{V}, -x\vec{V} - y\vec{U} - \vec{U}\wedge\vec{V})$

$\overline{r}\,\overline{q} = (y, -\vec{V})(x, -\vec{U}) = (xy - \vec{U}.\vec{V}, -y\vec{U} - x\vec{V} + \vec{V}\wedge\vec{U})$

d'où $\boxed{\overline{qr} = \overline{r}\,\overline{q}}$

D'où $\begin{cases} \overline{qr}\, qr = N(qr)e \\ \overline{qr}\, qr = \overline{r}\,\overline{q}\, q r = \overline{r}\, N(q) e\, r = N(q)\overline{r} r = N(q) N(r) e \end{cases}$

puis $\boxed{N(qr) = N(q) N(r)}$

1.5.c $S = \{ q \in H \ / \ N(q) = 1 \}$ est un sous-groupe multiplicatif de $(H \setminus \{0\}, \times)$ car $S \neq \emptyset$ et :

$\forall q, r \in S \quad N(qr^{-1}) = N\left(q . \dfrac{\overline{r}}{\underset{=1}{N(r)}}\right) = N(q\overline{r}) = \underbrace{N(q)}_{=1} \underbrace{N(\overline{r})}_{=1} = 1$

donc $qr^{-1} \in S$

1.5.d $\forall q \in H\setminus\{0\} \quad \exists! (\rho, u) \in \mathbb{R}\times S \quad q = \rho u$?

$q \doteq (x, \vec{U}) = \rho (x_0, \vec{U}_0)$ où $N((x_0,\vec{U}_0)) = x_0^2 + \vec{U}_0^2 = 1$ équivaut à :

$$\begin{cases} x = \rho x_0 \\ \vec{U} = \rho \vec{U}_0 \\ x_0^2 + \vec{U}_0^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + \vec{U}^2 = \rho^2 \Rightarrow \rho = \pm\sqrt{x^2+\vec{U}^2} = \pm\sqrt{N(q)}$$

donc $(\vec{x}_0, \vec{U}_0) = \frac{1}{\rho}(x, \vec{U}) = \frac{1}{\rho} q$ où $\rho = \pm\sqrt{N(q)}$

Il suffit de prendre $\rho = \sqrt{N(q)}$ pour avoir $\rho > 0$.

On retiendra : $\boxed{\forall q \in H\setminus\{0\} \qquad q = \sqrt{N(q)}\,.\,u \quad \text{où } u \in S}$

1.6 $q \mapsto \sqrt{N(q)}$ est une norme qui dérive du produit scalaire :

$((x,\vec{U}) \mid (y,\vec{V})) = x.y + \vec{U}.\vec{V}$ ie une norme euclidienne.

Si $q = (0, \vec{U})$ et $r = (0, \vec{V})$, $qr = (-\vec{U}.\vec{V}, \vec{U}\wedge\vec{V})$

et $qr = -rq \Leftrightarrow \begin{cases} -\vec{U}.\vec{V} = \vec{V}.\vec{U} \\ \vec{U}\wedge\vec{V} = -\vec{V}\wedge\vec{U} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{U}.\vec{V} = 0$

d'où :

$\boxed{(q|r) = 0 \Leftrightarrow \vec{U}.\vec{V} = 0 \Leftrightarrow qr \text{ quaternion pur} \Leftrightarrow qr + rq = 0}$

(lorsque q et r sont des quaternions réels)

2.1.b $\begin{array}{l} S \xrightarrow{R} \mathcal{O}^+ \\ s \mapsto R_s \end{array}$ est un morphisme car $\varphi_{ss'} = \varphi_s \circ \varphi_{s'}$ s'écrira :

$(x, R_{ss'}(\vec{U})) = (x, R_s \circ R_{s'}(\vec{U})) \Rightarrow R_{ss'} = R_s \circ R_{s'}$

surjectif car si $r \in \mathcal{O}^+$ est la rotation d'axe $\mathbb{R}\vec{I}$ et d'angle θ (dans le plan $(\mathbb{R}\vec{I})^\perp$ orienté par $\vec{I}$) et si $s = \left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}.\vec{I}\right)$, alors $R_s = r$ d'après 2.1.a.

Enfin : $s \in \operatorname{Ker} R \Leftrightarrow R_s = Id \Leftrightarrow 2\theta \equiv 0 \; [2\pi] \Leftrightarrow \theta \equiv 0 \; [\pi]$

donc $s = \pm e$. $\boxed{\operatorname{Ker} R = \{\pm e\}}$

Par décomposition canonique :

$$S/_{\{\pm e\}} \simeq \mathcal{O}^+$$

2.1.a $\varphi_s : H \longrightarrow H$

$q \longmapsto s q s^{-1}$ où $s = (\cos\theta, \sin\theta.\vec{I})$

$s^{-1} = (\cos\theta, -\sin\theta.\vec{I})$ d'après 1.4 et $N(s) = 1$.

$\varphi_s(q) = sqs^{-1} = (\cos\theta, \sin\theta.\vec{I})(x, \vec{U}).s^{-1}$

$= (x\cos\theta - \sin\theta\ \vec{I}.\vec{U}, \cos\theta.\vec{U} + x\sin\theta.\vec{I} + \sin\theta\ \vec{I}\wedge\vec{U}).s^{-1}$

$= \Big((x\cos\theta - \sin\theta.\vec{I}.\vec{U})\cos\theta + (\cos\theta.\vec{U} + x\sin\theta.\vec{I} + \sin\theta.\vec{I}\wedge\vec{U})\sin\theta.\vec{I},$

$(x\cos\theta - \sin\theta.\vec{I}.\vec{U})(-\sin\theta.\vec{I}) + \cos\theta(\cos\theta.\vec{U} + x\sin\theta.\vec{I} + \sin\theta.\vec{I}\wedge\vec{U}) +$

$(\cos\theta.\vec{U} + x\sin\theta.\vec{I} + \sin\theta.\vec{I}\wedge\vec{U})\wedge(-\sin\theta.\vec{I})\Big)$

En notant $\varphi_s(q) = (x', \vec{U}')$, on obtient :

$x' = x + \sin^2\theta\ (\vec{I}\wedge\vec{U}).\vec{I} = x$

$\vec{U}' = \cos^2\theta.\vec{U} + \sin^2\theta.(\vec{I}.\vec{U})\vec{I} + 2\sin\theta\cos\theta\ \vec{I}\wedge\vec{U} - \sin^2\theta.\underbrace{(\vec{I}\wedge\vec{U})\wedge\vec{I}}_{\vec{U} - (\vec{U}.\vec{I})\vec{I}}$

<u>lemme</u> : $(\vec{I}\wedge\vec{U})\wedge\vec{I} = \vec{U} - (\vec{U}.\vec{I}).\vec{I}$

preuve : on calcule $\vec{I}\wedge\vec{U} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-z\\y\end{pmatrix}$ d'où $(\vec{I}\wedge\vec{U})\wedge\vec{I} = \begin{pmatrix}0\\-z\\y\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix} = p_{(\mathbb{R}\vec{I})^\perp}(\vec{U})$ = "le projeté orthogonal de $\vec{U}$ sur $(\mathbb{R}\vec{I})^\perp$". Ce projeté $\vec{U}_0$ s'obtient facilement : $\vec{U} = \lambda\vec{I} + \vec{U}_0 \Rightarrow \vec{U}.\vec{I} = \lambda$ d'où $\vec{U}_0 = \vec{U} - (\vec{U}.\vec{I})\vec{I}$.

CQFD

Donc $\vec{U}' = (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\vec{U} + \sin^2\theta\ (\vec{I}.\vec{U})\vec{I} + \sin^2\theta\ (\vec{I}.\vec{U}).\vec{I} + 2\sin\theta.\cos\theta\ \vec{I}\wedge\vec{U}$

$\vec{U}' = \cos 2\theta.\vec{U} + 2\sin^2\theta.(\vec{I}.\vec{U}).\vec{I} + \sin 2\theta.\vec{I}\wedge\vec{U}$

L'application R_s définie par $R_s(\vec{U}) = \vec{U}'$ est linéaire et fixe $\vec{I}$ car :

$R_s(\vec{I}) = \cos 2\theta.\vec{I} + 2\sin^2\theta.\vec{I} = \vec{I}$.

Cherchons à définir sa restriction à $(\mathbb{R}\vec{I})^\perp$:

$\forall \vec{U} \in (\mathbb{R}\vec{I})^\perp \qquad R_s(\vec{U}) = \cos 2\theta.\vec{U} + \sin 2\theta.\vec{I}\wedge\vec{U}$

Soit $(\vec{J}, \vec{K})$ une base orthonormée de $(\mathbb{R}\vec{I})^\perp$ telle que $(\vec{J}, \vec{K}, \vec{I})$ soit directe. Orientons le plan $(\mathbb{R}\vec{I})^\perp$ grâce à cette b.o.

$R_s(\vec{J}) = \cos 2\theta.\vec{J} + \sin 2\theta.\vec{K}$

$R_s(\vec{K}) = \cos 2\theta.\vec{K} + \sin 2\theta.(-\vec{J})$

d'où $\mathrm{Mat}(R_s|_{(\mathbb{R}\vec{I})^\perp} ; (\vec{J}, \vec{K})) = \begin{pmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta\end{pmatrix}$

ce qui prouve bien que R_s est la rotation d'axe $\mathbb{R}\vec{I}$ et d'angle 2θ (pour l'orientation de $\mathbb{R}\vec{I}$ fournie par $\vec{I}$)

2.1.b voir avant le 2.1.a.

2.2.a

<u>Remarque</u> : $s \in S \Leftrightarrow s = (\cos\theta, \sin\theta . \vec{I})$ où $\theta \in \mathbb{R}$ et $\|\vec{I}\| = 1$

(($\Leftarrow$) trivial, ($\Rightarrow$) $s = (x, \vec{U}) \in S \Rightarrow x^2 + \vec{U}^2 = 1$ et il existe θ tq $x = \cos\theta$ et $\|\vec{U}\| = \sin\theta$. On prend $\vec{I} = \frac{\vec{U}}{\|\vec{U}\|}$ de sorte que $\vec{U} = \sin\theta . \vec{I}$)

* Si $p = (0, \vec{U})$, $q = (0, \vec{V})$, $\|\vec{U}\| = \|\vec{V}\| = 1$, $s = (\cos\theta, \sin\theta . \vec{I}) \in S$ on a :

$$q = sps^{-1} \Leftrightarrow \varphi_s(p) = q \Leftrightarrow (0, R_s(\vec{U})) = (0, \vec{V})$$

Il suffit de choisir une rotation $r \in \mathcal{O}^+$ telle que $r(\vec{U}) = \vec{V}$, puis $s \in S$ tel que $R_s = r$ (2.1.b) pour conclure. Ainsi :

|| $\forall p, q \in S$ p, q quaternions purs $\exists s \in S$ $q = sps^{-1}$

* Choisir s quaternion pur revient à choisir $\vec{I}$ (et donc l'axe de la rotation r) de sorte que $\cos\theta = 0$

ie $\theta \equiv \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$ $\Leftrightarrow$ $2\theta \equiv \pi$ $[2\pi]$ $\Leftrightarrow$ r = retournement ou l'identité.

Si $\vec{V} \neq -\vec{U}$, on choisira le retournement r d'axe $\vec{U} + \vec{V}$.

Si $\vec{V} = -\vec{U}$, on choisira un retournement d'axe orthogonal à $\mathbb{R}\vec{U}$.

<u>Ccl</u> : <u>On peut toujours s'arranger pour que s soit un quaternion pur</u>.

2.2.b $\forall s \in S$ $s = (\cos\theta, \sin\theta \vec{I}) = \underbrace{(0, \vec{U})(0, \vec{V})}_{(-\vec{U}.\vec{V}\ ,\ \vec{U} \wedge \vec{V})}$ ssi :

$$\begin{cases} \vec{U}.\vec{V} = -\cos\theta \\ \vec{U} \wedge \vec{V} = \sin\theta . \vec{I} \end{cases}$$

Supposons $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{I})$ base directe. Alors :

$$\begin{cases} \|\vec{U}\| . \|\vec{V}\| . \cos(\widehat{\vec{U}, \vec{V}}) = -\cos\theta \\ \|\vec{U}\| . \|\vec{V}\| . |\sin(\widehat{\vec{U}, \vec{V}})| = \sin\theta \end{cases}$$

On prend $\|\vec{U}\| = \|\vec{V}\| = 1$, $\begin{cases} \cos(\widehat{\vec{U}, \vec{V}}) = -\cos\theta = \cos(\pi - \theta) \\ |\sin(\widehat{\vec{U}, \vec{V}})| = \sin\theta = \sin(\pi - \theta) \end{cases}$ ce qui détermine les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans le plan $(\mathbb{R}\vec{I})^\perp$.

(si $\sin\theta < 0$, on prendra plutôt $(\vec{U}, \vec{V}, -\vec{I})$ directe)

2° solution :

On devait résoudre $\begin{cases} \vec{U}.\vec{V} = -x & (1) \\ \vec{U}\wedge\vec{V} = \vec{W} & (2) \end{cases}$ où $x^2+\vec{W}^2=1$ $(x, \vec{W})$ donné

(2) $\Rightarrow$ $\vec{U}.\vec{W} = 0 = \vec{V}.\vec{W}$. Choisissons $\vec{U}$ de norme 1 et orthogonal à $\vec{W}$.
Si $\vec{V}_0$ est orthogonal à $\mathbb{R}\vec{U}\oplus\mathbb{R}\vec{W}$ et solution de (2), $\vec{U}\wedge\vec{V}_0 = \vec{W}$ entraînera $\frac{\vec{W}}{\|\vec{W}\|}\wedge\vec{U} = \frac{\vec{V}_0}{\|\vec{V}_0\|}$ où $\|\vec{W}\| = \|\vec{V}_0\|$, donc $\vec{V}_0 = \vec{W}\wedge\vec{U}$.
Réciproquement, $\vec{V}_0 = \vec{W}\wedge\vec{U}$ est solution particulière de (2).
Alors :
$\vec{V}$ solution de (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{U}\wedge\vec{V} = \vec{W} \\ \vec{U}\wedge\vec{V}_0 = \vec{W} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{U}\wedge(\vec{V}-\vec{V}_0) = \vec{0} \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}\ \ \vec{V}-\vec{V}_0 = \lambda\vec{U}$

Les solutions de (2) sont donc les $V = \vec{W}\wedge\vec{U} + \lambda\vec{U}$ où $\lambda\in\mathbb{R}$.

Dans (1) : $\lambda = -x$.
A chaque choix de $\vec{U}$ correspondra 1 et 1 seule solution $\vec{V}$ du système, à savoir : $\vec{V} = \vec{W}\wedge\vec{U} - x\vec{U}$.

NB : $\vec{V}$ est unitaire puisque

$$\vec{V}^2 = \underbrace{(\vec{W}\wedge\vec{U})^2}_{\|W\|^2\|U\|^2} + x^2\underbrace{\vec{U}^2}_{1} - 2x\underbrace{\vec{W}\wedge\vec{U}.\vec{U}}_{0} = x^2 + \|W\|^2 = 1.$$

2.3.a $\Psi : \mathcal{O}^+ \to S$ et $\forall\sigma\in\Sigma$ $\sigma^2 = I \Rightarrow \Psi(\sigma^2) = \Psi(\sigma)^2 = \Psi(I) = e$
d'où $\Psi(\sigma) = \pm e$ (1.1)

2.3.b $\forall\sigma, \sigma'$ retournements d'axes D et D' $\exists\ \sigma''$ ret. d'axe Δ $\sigma' = \sigma''\sigma\sigma''$

Si σ'' existe, $\forall x'\in D'$ $x' = \sigma''\sigma\sigma''x' \Rightarrow \sigma''x' = \sigma\sigma''x' \Rightarrow \sigma''x'\in D$
donc σ'' transforme D' en D.

Soit Δ une bissectrice de $\widehat{D,D'}$ (ie Δ de vecteur directeur $\vec{u}+\vec{v}$ où $\vec{u}, \vec{v}$ sont des vect. dir. unitaires de D et D', si $D\neq D'$, et $\Delta = D = D'$ sinon).
Le retournement σ'' d'axe Δ transforme D' en D et $\sigma''\sigma\sigma'' = \sigma'$.

(En effet : $\sigma''\sigma\sigma''$ est une rotation d'axe D' (car $x'\in D' \Rightarrow \sigma''\sigma\underbrace{\sigma(x')}_{\in D} = \sigma''\sigma''(x') = x'$)
et d'angle $\widehat{y, \sigma''\sigma\sigma''y}$ où $y\in(D,D')^\perp$, soit :
$\widehat{y, \sigma''\sigma\sigma''y} = \widehat{y, \sigma''\sigma(-y)} = \widehat{y, \sigma''y} = \widehat{y, -y} = \pi$.)

* On en déduit $\Psi(\sigma') = \Psi(\sigma'')\Psi(\sigma)\Psi(\sigma'')$

$= \varepsilon'' e . \varepsilon e . \varepsilon'' e$ où $\varepsilon, \varepsilon' \in \{\pm 1\}$ (2.3.a)

$= \varepsilon e = \Psi(\sigma)$

2.3.c L'ensemble des retournements Σ engendre Θ^+ et on a vu en 2.3.b que : $\forall \sigma \in \Sigma \quad \Psi(\sigma) = \varepsilon e \qquad \varepsilon \in \{\pm 1\}$ fixé.

On en déduit $\forall s \in \Theta^+ \quad \Psi(s) = \varepsilon e$

De $\Psi(s s') = \Psi(s)\Psi(s')$ on déduit $\varepsilon e = \varepsilon e . \varepsilon e \Rightarrow \varepsilon = 1$.

On aura bien $\boxed{\Psi(\Theta^+) = \{e\}}$

2.4.a Soit $p = (0, \vec{v})$ un quaternion pur de G.

$\forall q$ quaternion pur de S $\quad \exists s \in S \quad q = \varphi_s(p) \in G$ (2.2.a)

Donc tous les quaternions purs sont dans G.

Si $p = (x, \vec{v}) \in S$, il existe $q, r \in S$ q, r quaternions purs / $p = qr$ (cf 2.2.b) et $q, r \in G$ d'après ce qui précède. Donc $p = qr \in G$ et $\boxed{G = S}$

2.4.b

Notons que $i = (0, \vec{I}) \quad j = (0, \vec{J}) \quad k = ij = (0, \vec{I} \wedge \vec{J}) = (0, \vec{K})$

De $i, j \in S$ on tire $\|\vec{I}\| = \|\vec{J}\| = 1$. $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ sera donc une b.o. directe.

Enfin $i^2 = (-\vec{I}^2, 0) = -e$ (comme en 1.1)

* 2.2.a $\Rightarrow \quad \exists s \in S \quad j = s i s^{-1}$

et $ae + bi \in G \Rightarrow s(ae + bi)s^{-1} = ae + bsis^{-1} = \boxed{ae + bj \in G}$

* Le produit $(ae+bi)(ae+bj) = a^2 e + ab(i+j) + b^2 k$ sera donc aussi dans G.

Cherchons la norme de $ab(i+j) + b^2 k$:

$ab(i+j) + b^2 k = (0, ab\vec{I} + ab\vec{J} + b^2\vec{K})$

$N(ab(i+j) + b^2 k) = \|ab\vec{I} + ab\vec{J} + b^2\vec{K}\|^2 = b^2 \|a\vec{I} + a\vec{J} + b\vec{K}\|^2$

$= b^2(2a^2 + b^2) = b^2(1 + a^2)$ car $a^2 + b^2 = 1$.

Donc $N\left(\dfrac{ab(i+j) + b^2 k}{b\sqrt{1+a^2}}\right) = 1 \Rightarrow \dfrac{ab(i+j) + b^2 k}{b\sqrt{1+a^2}} \in S$

On a : $a^2e + b\sqrt{1+a^2}\ \dfrac{ab(i+j)+b^2k}{b\sqrt{1+a^2}} \in G$

et 2.2.a donne l'existence de $u \in S$ tel que $u \cdot \dfrac{ab(i+j)+b^2k}{b\sqrt{1+a^2}} u^{-1} = i$

G étant distingué dans S, on en déduit :

$$u\left(a^2e + b\sqrt{1+a^2}\ \frac{ab(i+j)+b^2k}{b\sqrt{1+a^2}}\right)u^{-1} = a^2e + b\sqrt{1+a^2}.i \in G$$

ie $\boxed{a^2e + ci \in G}$

* Si $0 < a^2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, on prend $\alpha e + \beta i = a^2e + ci$. Sinon on recommence le travail précédent pour obtenir $a^{2^2}e + c_2 i \in G$, puis ..., puis $a^{2^n} + c_n i \in G$.

$a^2+b^2=1 \Rightarrow |a|<1 \Rightarrow 0<a^2<1$ donc il existera $n \in \mathbb{N}$ / $0 < a^{2^n} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

Finalement : $\exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\quad 0<\alpha \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\quad s = \alpha e + \beta i \in G$ ||

* <u>G contient un quaternion pur</u> : Cherchons le sous la forme $sqs^{-1}q^{-1}$ où $q = xe + yj \in S$ (en effet : G distingué donc $s \in G \Rightarrow qs^{-1}q^{-1} \in G$ d'où $s(qs^{-1}q^{-1}) \in G$).

$s = \alpha e + \beta i \in S$ donc $\alpha^2+\beta^2=1$ et $s^{-1} = \alpha e - \beta i$ (1.4)
$q = xe + yj \in S$ donc $x^2+y^2=1$ et $q^{-1} = xe - yj$

$$\begin{aligned} sqs^{-1}q^{-1} &= (\alpha e+\beta i)(xe+yj).(\alpha e-\beta i)(xe-yj) \\ &= (\alpha x e + \beta x i + \alpha y j + \beta y k)(\alpha x e - \beta x i - \alpha y j + \beta y k) \\ &= \alpha^2x^2e - \beta^2x^2i^2 - \alpha^2y^2j^2 + \beta^2y^2k^2 + \pi \end{aligned}$$

où π est un quaternion pur (en effet, $ij=k$ et les produits $jk, ik, kj, ki, ji, ei, ej, ek$ sont des quaternions purs, par contre $i^2=-e$ ...)

$$\begin{aligned} sqs^{-1}q^{-1} &= (\alpha^2x^2 + \beta^2x^2 + \alpha^2y^2 - \beta^2y^2)e + \pi \\ &= (\alpha^2 + \beta^2(x^2-y^2))e + \pi \quad \text{car } x^2+y^2=1 \end{aligned}$$

Il s'agit de trouver x et y tels que : $\begin{cases} \alpha^2+\beta^2(x^2-y^2)=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

d'où $\alpha^2+\beta^2(2x^2-1)=0$

$$x^2 = \frac{\beta^2-\alpha^2}{2\beta^2} \quad (*)$$

$\alpha e+\beta i \in S \Rightarrow \alpha^2+\beta^2=1$ et comme $0<\alpha\leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha^2\leq\frac{1}{2} \Rightarrow \beta^2\geq\alpha^2$.
(*) définit bien un $x\in\mathbb{R}$. CQFD

Ccl : G contiendra un quaternion pur , donc $G=S$ d'après 2.4.b.

2.4.c * Si G contient un élément q distinct de $\pm e$, il s'écrira :

$$q=(x,\vec{I})=xe+\|\vec{I}\|\left(0,\frac{\vec{I}}{\|\vec{I}\|}\right)$$

Si $x=0$, q est un quaternion pur , donc $G=S$ d'après 2.4.a
Si $x\neq 0$, $q=xe+bi$ où $b=\|\vec{I}\|$ et $i=\left(0,\frac{\vec{I}}{\|\vec{I}\|}\right)\in S$, et on peut appliquer 2.4.b : $G=S$ encore.

* On utilise 2.1 : $R: S\longrightarrow O^+$, $s\longmapsto R_s$ est un morphisme surjectif.

Si $\mathcal{G}\triangleleft O^+$, $R^{-1}(\mathcal{G})\triangleleft S \Rightarrow R^{-1}(\mathcal{G})=\{e\}$ ou $\{e,-e\}$ ou S
$\Rightarrow \mathcal{G}=\{Id\}$ ou $R(S)=O^+$ (R est surjective)

Ccl : <u>O^+ est un groupe simple.</u>

3.1 $\varphi_s(q+q')=s(q+q')s^{-1}=sqs^{-1}+sq's^{-1}=\varphi_s(q)+\varphi_s(q')$
$\varphi_s(\lambda q)=s(\lambda q)s^{-1}=\lambda\varphi_s(q)$
$\varphi_s(qq')=s\,qq's^{-1}=sqs^{-1}.sq's^{-1}=\varphi_s(q).\varphi_s(q')$

φ_s est donc linéaire, et c'est un morphisme de corps.

φ_s est surjective car : $\forall r\in H$ $r=sqs^{-1}\Leftrightarrow q=s^{-1}rs$. L'unicité de q / $\varphi_s(q)=r$ prouve en m̂ temps l'injectivité . Ccl : <u>φ_s est un automorphisme de corps et d'e.v.</u>

3.2.a $\tau(1)=1$ et $\tau(0)=0$ (car $\tau(0+0)=\tau(0)\Rightarrow\tau(0)+\tau(0)=\tau(0)\Rightarrow\tau(0)=0$)

* $\forall n\in\mathbb{N}$ $\tau(n)=n$ (récurrence sur n : $\tau(1)=1$ et si $\tau(n-1)=n-1$, alors $\tau(n)=\tau((n-1)+1)=\tau(n-1)+\tau(1)=(n-1)+1=n$)

* $\forall n\in\mathbb{N}$ $\tau(-n)+\tau(n)=\tau(-n+n)=\tau(0)=0 \Rightarrow \tau(-n)=-n$.

<u>Donc $\tau(n)=n$ $\forall n\in\mathbb{Z}$</u>

* $\forall r\in\mathbb{Q}$ $r=\frac{p}{q}$ où $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{Z}^*$ d'où $\tau\left(\frac{p}{q}\cdot q\right)=\tau(p)=p \Rightarrow \tau\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\tau(q)=p\Rightarrow$ <u>$\tau(r)=r$</u>

3.2.b Si $x \geqslant 0$, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $x = y^2$ et $\tau(x) = (\tau(y))^2 \geqslant 0$.

Si $x \leqslant x'$, $x' = x + r$ où $r \geqslant 0$ donc $\tau(x') = \tau(x) + \tau(r)$ avec $\tau(r) \geqslant 0$, ce qui signifie que $\tau(x) \leqslant \tau(x')$. <u>Donc τ est croissante</u>.

3.2.c $r_n \to x \leftarrow s_n$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe 2 suites de rationnels (r_n) et (s_n) tendant vers x et telles que : $r_n \leqslant x$ et $x \leqslant s_n$ pour tout n. (les suites des approximations décimales par ex.)

Donc : $r_n \leqslant x \leqslant s_n \Rightarrow \underbrace{\tau(r_n)}_{r_n} \leqslant \tau(x) \leqslant \underbrace{\tau(s_n)}_{s_n}$

Pour n tendant vers l'infini, on obtient $x \leqslant \tau(x) \leqslant x$ <u>ie $\tau(x) = x$</u>.

3.3.a $\mu : H \longrightarrow H$ automorphisme de corps.

D'après 1.3 : q quaternion réel $\Leftrightarrow \forall r \in H \quad rq = qr \Rightarrow \mu(r)\mu(q) = \mu(q)\mu(r) \quad \forall r \in H$

$\mu(r)$ décrit H quand r décrit H car μ est bijectif. La dernière égalité signifie donc que <u>$\mu(q)$ est un quaternion réel</u>.

Par suite : $\mu(x, \vec{0}) = (\tau(x), \vec{0})$ permet de définir un automorphisme τ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, donc $\tau(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ d'après 3.2.

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mu(x, \vec{0}) = (x, \vec{0})$$

<u>Montrons que μ est un isomorphisme d'espace vectoriel</u> : il suffit de vérifier que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \mu(\lambda q) = \lambda \mu(q)$$

on a : $\mu(\lambda q) = \mu(\lambda e . q) = \mu(\lambda e) . \mu(q) = \lambda e . \mu(q) = \lambda \mu(q)$ oui.

3.3.b

* Soit $q = (0, \vec{U})$ un quaternion pur de S :

$$q^2 = (0, \vec{U})(0, \vec{U}) = (-\vec{U}^2, \vec{0}) = -N(q)e = -e$$

d'où $\mu(q)^2 = -e \Leftrightarrow \mu(q) = (0, \vec{V})$ où $\|\vec{V}\| = 1$ (cf 1.1)

Ainsi :

<u>q quaternion pur de $S \Rightarrow \mu(q)$ quaternion pur de S</u>

* Si q et r sont purs et orthogonaux dans S, alors $\mu(q)$ et $\mu(r)$ seront purs et dans S. 1.6 s'applique :

q, r orthogonaux $\Leftrightarrow qr + rq = 0 \Leftrightarrow \mu(q)\mu(r) + \mu(r)\mu(q) = 0 \Leftrightarrow \mu(q), \mu(r)$ orthogonaux.

* Soient $\begin{cases} \mu(q) = q' \\ \mu(r) = r' \end{cases}$

qr sera orthogonal à q et r, et pur, car $qr = (0, \vec{Q})(0, \vec{R}) = (0, \vec{Q} \wedge \vec{R})$.

Par suite (e, q, r, qr) sera une base de H et μ étant un automorphisme de l'e.v. H, il sera parfaitement défini si l'on fixe les images de cette base, ie connaissant : $\mu(e) = e$, $\mu(q) = q'$, $\mu(r) = r'$ et $\mu(qr) = \mu(q)\mu(r) = q'r'$

3.3.c Soit (e, i, j, k) une base de H où (i, j, k) sont définis au 1.2.

Soit μ un automorphisme du corps H. Notons :

$$\begin{cases} \mu(e) = e \\ \mu(i) = i' \\ \mu(j) = j' \\ \mu(k) = k' = i'j' \end{cases}$$

$\vec{J}'$ $\vec{I}'$ $\vec{J}$ $\vec{I}$

Il existe une rotation $r \in \Theta^+$ transformant $\vec{I}, \vec{J}$ en $\vec{I}', \vec{J}'$ (il suffit de prendre celle transformant la b.o. directe $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{I} \wedge \vec{J})$ en la b.o. directe $(\vec{I}', \vec{J}', \vec{I}' \wedge \vec{J}')$) et on peut trouver $s \in S$ tel que $R_s = r$ (2.1.b).

Donc : $\varphi_s(i) = \varphi_s(0, \vec{I}) = (0, R_s(\vec{I})) = (0, \vec{I}') = i'$

de même $\varphi_s(j) = j'$

φ_s et μ sont 2 automorphismes du corps H coïncidant sur i et j. Ils seront donc égaux d'après 3.3.b.

__Ccl__ : Aut H = Int H

4.1.a * $\delta_r(q)=rq$ est manifestement linéaire. On a :

$\delta_r(e)=r=ae+bi$

$\delta_r(i)=ri=(ae+bi)i=-be+ai$

$\delta_r(j)=rj=(ae+bi)j=aj+bk$

$\delta_r(k)=rk=(ae+bi)k=ak+bi(ij)=-bj+ak$

d'où la matrice M_r de δ_r dans la b.o. (e,i,j,k) :

$$M_r=\begin{pmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

C'est la matrice d'une application orthogonale (les vecteurs colonnes définissent une b.o.) directe (car $\det M_r = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = (a^2+b^2)(a^2+b^2)=1$)

* $\delta_{s,s}=\varphi_s$ est une application orthogonale directe d'après 2.1.a, donc $\delta_{r,s}=\delta_{rs^{-1}}\circ\varphi_s$ sera la composée de 2 appl. orth. directes, donc orth. directe elle-même.

4.1.b * $\begin{array}{ccc} S\times S & \xrightarrow{\ \Sigma\ } & \Omega \doteq O^+(H) \\ (r,s) & \longmapsto & \delta_{r,s} \end{array}$ est un morphisme de groupe car :

$\Sigma\left((r,s)\times(r',s')\right)=\Sigma(rr',ss')=\delta_{rr',ss'}=\delta_{r,s}\circ\delta_{r',s'}$ d'après :

$\delta_{rr',ss'}(q)=rr'q(ss')^{-1}=r(r'qs'^{-1})s^{-1}=r\,\delta_{r',s'}\,s^{-1}=\delta_{r,s}\circ\delta_{r',s'}(q)$.

* Montrons que : $\boxed{\varphi\in\Omega \text{ laisse } e \text{ fixe} \iff \varphi=\varphi_s}$

2.1.b montre que φ_s laisse e fixe. Réciproquement, si $\varphi\in\Omega$ laisse e fixe, φ laissera $(\mathbb{R}e)^\perp=\mathbb{R}i\oplus\mathbb{R}j\oplus\mathbb{R}k$ invariant. La restriction de φ à $(\mathbb{R}e)^\perp$ sera une application orthogonale donc :

$$\varphi(x,\vec{U})=\varphi(xe+(0,\vec{U}))=xe+\underbrace{\varphi(0,\vec{U})}_{\in\mathbb{R}e^\perp}=(x,\underbrace{\varphi_0(\vec{U})}_{\in\mathcal{V}})\quad(*)$$

φ_0 sera une rotation de $\mathcal{V}$, donc il existera $s\in S$ tel que $\varphi_0=R_s$ (2.1.b)

D'où $\varphi=\varphi_s$.

CQFD

((*) NB : on a identifié $\mathbb{R}i\oplus\mathbb{R}j\oplus\mathbb{R}k$ à $\mathcal{V}$ en identifiant les bases (i,j,k) et $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$)

* Σ surjectif ?

$\forall f \in \Omega \quad s = f(e) \in S$ et $\delta_{s^{-1},e} \circ f \in \Omega$

De $\delta_{s^{-1},e} \circ f(e) = \delta_{s^{-1},e}(s) = s^{-1} s e^{-1} = e$ on déduit que $\delta_{s^{-1},e} \circ f$ laisse e fixe,

donc l'existence de $t \in S$ tel que $\delta_{s^{-1},e} \circ f = \varphi_t = \delta_{t,t}$

d'où : $f = (\delta_{s^{-1},e})^{-1} \circ \delta_{t,t} = \delta_{s,e} \circ \delta_{t,t} = \delta_{st,t} \in \mathrm{Im}\, \Sigma$.

* Ker Σ ?

$(r,s) \in \mathrm{Ker}\, \Sigma \iff \delta_{r,s} = Id \iff \forall q \in H \quad rqs^{-1} = q \iff \forall q \in H \quad rq = qs$

Si $q = e$, $r = s$. Ensuite $rq = qr \ \forall q$ équivaut à "r quaternion réel" (1.3)

Enfin $r \in S$ entraine $r = \pm e$.

Ccl : $\mathrm{Ker}\, \Sigma = \{(e,e), (-e,-e)\}$

et par décomposition canonique :

$$S \times S / \{(e,e),(e,-e)\} \simeq \Omega$$

4.2.a $\delta_{r,s}$ involutive $\iff \delta_{r,s}^2 = Id_H \iff \delta_{r^2,s^2} = Id \iff (r^2,s^2) \in \mathrm{Ker}\, \Sigma$

$\iff r^2 = s^2 = e$ ou $r^2 = s^2 = -e$

* Si $r^2 = s^2 = e$, 1.1 donne $r = \pm e$ et $s = \pm e$ d'où $\delta_{r,s} = \pm Id$ à exclure.
* Si $r^2 = s^2 = -e$, 1.1 montre que r et s sont des quaternions purs.

$\delta_{r,s} \in \mathcal{O}^+(H) = \Omega$ est involutive : c'est donc une symétrie orthogonale par rapport à un sev de dim 4 (ie $-Id$) ou 2 (ie un retournement de cet espace H de dim. 4)

Or a :

$\delta_{r,s} = -Id \iff \delta_{r,-s} = Id \iff (r,-s) \in \mathrm{Ker}\, \Sigma = \{(e,e),(-e,-e)\}$

$\iff r = -s = \pm e \implies r^2 = s^2 = e$ absurde !

Donc,

$\delta_{r,s}$ involutive distincte de $\pm Id \iff r, s$ quaternions purs

4.2.b

1-solution : Les retournements de H sont les symétries orthogonales par rapport à des plans. On sait que $O^+(H) = \Omega$ est engendré par ces retournements, et que toute application orthogonale positive s'écrit comme composée d'au plus 2 tels retournements.

2-solution : $\forall f \in \Omega \quad \exists r,s \in S \quad \delta_{r,s} = f$ (4.1.b)

2.2.b $\Rightarrow$ $\exists r_1, r_2, s_1, s_2$ quaternions purs de S $\quad r = r_1 r_2$ et $s = s_1 s_2$

d'où $f = \delta_{r_1 r_2, s_1 s_2} = \delta_{r_1, s_1} \circ \delta_{r_2, s_2}$ = composée de 2 symétries orthogonales par rapport à des plans (cf 4.2.a).

4.2.c Si $\mu : \Omega \to S \times S$ est un morphisme de groupe, et si σ est un retournement de H, $\sigma^2 = Id \Rightarrow \mu(\sigma)^2 = (e,e) \overset{1.1}{\Longrightarrow} \mu(\sigma) = (\varepsilon e, \varepsilon' e)$ où $\varepsilon, \varepsilon' \in \{\pm 1\}$.

Si nous montrons que : <u>$\forall \sigma, \sigma'$ retournements de H $\exists \sigma''$ ret. de H $\quad \sigma = \sigma'' \circ \sigma' \circ \sigma''$</u>,

on pourra écrire :

$$\mu(\sigma) = \mu(\sigma') . \mu(\sigma'')^2 = \mu(\sigma')$$

de sorte que $\mu(\sigma) = (\varepsilon e, \varepsilon' e)$ pour tout retournement σ.

Le 4.2.b a prouvé que tout $f \in \Omega$ est produit de 2 retournements :

$$f = \sigma_1 \sigma_2 \Rightarrow \mu(f) = \mu(\sigma_1)\mu(\sigma_2) = (\varepsilon e, \varepsilon' e)(\varepsilon e, \varepsilon' e) = (e,e)$$

Donc $\boxed{\mu(f) = (e,e) \quad \forall f \in \Omega}$

Vérifions :

lemme : $\forall \sigma, \sigma'$ retournements de H $\quad \exists \sigma''$ ret. de H $\quad \sigma = \sigma'' \circ \sigma' \circ \sigma''$

preuve : Utilisons 4.1.b et 4.2.a :

Tout retournement σ de Ω s'écrit $\sigma = \delta_{r,s}$ avec r, s quaternions purs

" σ' " $\sigma' = \delta_{r',s'}$ " r', s' "

Il s'agit de trouver $r'', s'' \in S$ tels que $\sigma'' = \delta_{r'',s''}$ et :

$$\sigma = \sigma'' \circ \sigma' \circ \sigma''$$

$$\delta_{r,s} = \delta_{r'',s''} \circ \delta_{r',s'} \circ \delta_{r'',s''}$$

$$\begin{cases} r = r'' r' r'' \\ s = s'' s' s'' \end{cases}$$

La solution est donnée par 2.2.a :

$\exists r'' \in S$ r'' pur $r = r''r'r''^{-1}$

$\exists s'' \in S$ s'' pur $s = s''s's''^{-1}$

d'où $\quad \sigma_{rs} = \sigma_{r'',s''} \circ \sigma_{r',s'} \circ \sigma_{r''^{-1},s''^{-1}}$

et r'' pur et dans $S \Rightarrow r''^{-1} = -r''$
s'' " " $\Rightarrow s''^{-1} = -s''$ $\Big\} \Rightarrow \sigma_{r''^{-1},s''^{-1}} = \sigma_{-r'',-s''} = \sigma_{r'',s''}$.

CQFD

4.3.a $\{(0,0),(1,1)\}$ est distingué dans le groupe commutatif $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

ou encore :

$\{(e,e),(-e,-e)\} = \operatorname{Ker} \Sigma \lhd S \times S$ d'après 4.1.b

4.3.b * $\underline{K_1 \lhd S}$: $\forall s \in S \ \forall k_1 \in K_1 \ \exists (k_1,k_2) \in K$ et

$(s,s)(k_1,k_2)(s,s)^{-1} \in K \Rightarrow (sk_1s^{-1}, sk_2s^{-1}) \in K$

puisque $K \lhd S \times S$. Donc $sk_1s^{-1} \in K_1$, ie $K_1 \lhd S$.

* $\underline{\text{De même } K_2 \lhd S}$.

* $\underline{K \lhd K_1 \times K_2}$ provient directement de $K \subset K_1 \times K_2 \subset S \times S$ et $K \lhd S \times S$.

4.3.c * $\underline{\text{Si } K_1 = \{e\}}$, $K = \{(e,k) / k \in K_2\}$ où $K_2 \lhd S$, donc (2.4) :

$$\begin{cases} K_2 = \{e\} \Rightarrow K = \{(e,e)\} \\ \text{ou} \\ K_2 = \{e,-e\} \Rightarrow K = \{(e,e);(e,-e)\} \\ \text{ou} \\ K_2 = S \Rightarrow K = \{(e,s) / s \in S\} = \{e\} \times S \end{cases}$$

* $\underline{\text{Si } K_1 = K_2 = \{e,-e\}}$, $K \lhd K_1 \times K_2 = \{e,-e\} \times \{e,-e\}$

K est un sous-groupe du groupe $K_1 \times K_2$ d'ordre 4. K sera d'ordre 4, 2 ou 1.
$\# K = 1$ est impossible car $K = \{(e,e)\} \Rightarrow K_1 = \{e\}$. Il reste 2 possibilités :

$$\begin{cases} \# K = 4 \Leftrightarrow K = \{e,-e\} \times \{e,-e\} \\ \text{ou} \\ \# K = 2 \Leftrightarrow K = \{(e,e),(-e,-e)\} \end{cases}$$
puisque $K_1 = \{e,-e\}$ et $K_2 = \{e,-e\}$.

4.3.d.i

* $\left.\begin{array}{l} p \text{ quaternion pur} \\ (e,p)\in K \end{array}\right\} \Rightarrow \{e\}\times S \subset K$?

$K \triangleleft S\times S$ donc $\forall s,s'\in S$ $\quad (s,s')(e,p)(s,s')^{-1}\in K$

$$(s,s')(e,p)(s,s')^{-1} = (ses^{-1}, s'ps'^{-1}) = (e, s'ps'^{-1})\in K$$

2.2.a montre que : $\forall q$ quat. pur de S $\exists s'\in S$ $\quad q = s'ps'^{-1}$

Donc : $\boxed{\{e\}\times S \subset K}$ et $\boxed{K_2 = S}$

* On a vu (2.4) que K_1 peut seulement être égal à $\{e\}$, $\{e,-e\}$ ou S :

1) Si $K_1 = \{e\}$, $\{e\}\times S\subset K \Rightarrow K_1\times S\subset K\subset K_1\times K_2 \Rightarrow K = K_1\times K_2$

2) Si $K_1 = \{e,-e\}$ alors $\{e\}\times S \subsetneq K \subset \{e,-e\}\times S$ et il existe un élément de K de la forme $(-e,s)$, donc : $(-e,e) = \underbrace{(-e,s)}_{\in K}\underbrace{(e,s^{-1})}_{\in K}\in K$

et $\forall r\in S$ $\quad (-e,r) = \underbrace{(-e,e)}_{\in K}\underbrace{(e,r)}_{\in K}\in K$

Donc $\{-e\}\times S\subset K \Rightarrow K = \{e,-e\}\times S = K_1\times K_2$.

3) Si $K_1 = S$, on a $\{e\}\times S \subsetneq K \subset S\times S$

$\forall s\in S$ $\exists q\in S$ $\quad (s,q)\in K$

Par suite : $(s,e) = \underbrace{(s,q)}_{\in K}\underbrace{(e,q^{-1})}_{\in K}\in K$

puis $\forall s,s'\in S$ $\quad (s,s') = \underbrace{(s,e)}_{\in K}\underbrace{(e,s')}_{\in K}\in K$ donc $K = S\times S = K_1\times K_2$.

Dans tous les cas $\boxed{K = K_1\times K_2}$.

4.3.d.ii Si p est un quaternion pur tel que $(-e,p)\in K$, alors :

$$(s,t)(-e,p)(s,t)^{-1}\in K \Leftrightarrow (-e,tpt^{-1})\in K$$

D'après 2.2.a, on aura $(-e,r)\in K \quad \forall r\in S$

D'où : $\underbrace{(-e,r)}_{\in K}\underbrace{(-e,e)}_{\in K}=(e,r) \in K$ pour tout quaternion pur r.

4.3.d.iii S'il existe un quaternion non réel s tel que $(-e,s)\in K$, alors

$s=ae+bi$ où $b\neq 0$, et on peut supposer $a\neq 0$ (sinon c'est fini : on applique ii))
On a : $(-e,ae+bi)\in K$.

Raisonnons comme en 2.4.b et avec les mêmes notations. Tout d'abord :

$(-e,ae+bj)\in K$ car $\exists u\in S \quad j=uiu^{-1}$ (2.2.a) donc

$$(e,u)(-e,ae+bi)(e,u)^{-1}=\underline{(-e,ae+bj)\in K}$$

donc $(-e,ae+bi)(-e,ae+bj)=\underline{(e,a^2e+ci)\in K}$

Notons $\tilde{s}=a^2e+ci$. On a $(e,\tilde{s})\in K$ et on a vu l'existence de $q\in S$ tel que $\tilde{s}q\tilde{s}^{-1}q^{-1}$ soit un quaternion pur de S (2.4.b), d'où :

$$(e,\tilde{s})\in K \Rightarrow \underbrace{(e,\tilde{s})}_{\in K}\cdot\underbrace{(e,q)(e,\tilde{s}^{-1})(e,q)^{-1}}_{\in K \text{ car } K\triangleleft S\times S}=(e,\underbrace{\tilde{s}q\tilde{s}^{-1}q^{-1}}_{\text{pur}})\in K$$

CQFD

4.3.d.iv Si $K_1=K_2=S$, prenons p pur. Il existe $r\in S$ tel que $(p,r)\in K$, d'où $(p,r)^2=(-e,r^2)\in K$ (car $p=bi$ $|b|=1 \Rightarrow p^2=-e$)

- Si r^2 n'est pas réel, on prend $s=r^2$.
- Si r^2 est réel, $r^2=(x,\vec{0})\in S \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow r^2=\pm e$

• Si $r^2=e \overset{1.1}{\Leftrightarrow} r=\pm e$ alors $(p,\pm e)\in K$ et on peut recommencer 4.3.d i) et ii) avec (p,e) ou $(p,-e)$ à la place de (e,p) ou $(-e,p)$ pour obtenir $K=K_1\times K_2$ (donc a fortiori $(-e,q)\in K$ où q non réel)

• Si $r^2=-e$, r sera pur (1.1). Ainsi $(p,r)\in K$ et p,r sont purs. Par conjugaison, (2.2.a) montre que :

$\forall s,t \in S$ s,t purs $\exists\, s_1,t_1 \in S$ $\begin{cases} s = s_1 p s_1^{-1} \\ t = t_1 r t_1^{-1} \end{cases}$

d'où $(s,t) = (s_1,t_1)(p,r)(s_1,t_1)^{-1} \in K$.

Tout couple (s,t) formé de quaternions purs de S sera dans K.

Prenons alors : $\underbrace{(i,i)}_{\in K}\underbrace{(i,j)}_{\in K} = (-e, k) \in K$ (notations du 1.2)

k : non réel

4.3.e Notons que $iv \Rightarrow iii \Rightarrow i \Rightarrow K = K_1 \times K_2$

$ii \Rightarrow$

K_1 et K_2 jouent des rôles symétriques. Quitte à permuter K_1 et K_2, nous avons envisagé tous les cas possibles en 4.3.c et 4.3.d :

K_1	K_2	K	
$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}\times\{e\}$	4.3.c
$\{e\}$	$\{e,-e\}$	$\{e\}\times\{e,-e\}$	4.3.c
$\{e\}$	S	$\{e\}\times S$	4.3.c
$\{e,-e\}$	$\{e,-e\}$	$\{e,-e\}\times\{e,-e\}$ ou $\{(e,e),(-e,-e)\}$	4.3.c
$\{e\}$	S	$K = \{e\}\times S$	cas i) du 4.3.d (ici $K = K_1\times K_2$)
$\{e,-e\}$	S	$K = \{e,-e\}\times S$	cas i) du 4.3.d (ici $K = K_1\times K_2$)
S	S	$K = S\times S$	cas i) du 4.3.d (ici $K = K_1\times K_2$)

Ccl : $S\times S$ possède 10 sous-groupes distingués :

$\{e\}\times\{e\}$ $\{e\}\times\{e,-e\}$ $\{e,-e\}\times\{e\}$ $\{e\}\times S$ $S\times\{e\}$

$\{e,-e\}\times\{e,-e\}$ $\{(e,e),(-e,-e)\}$ $\{e,-e\}\times S$ $S\times\{e,-e\}$ $S\times S$

* Le morphisme surjectif $\mathfrak{S}$ du 4.1.b :

$$\begin{array}{ccc} S\times S & \xrightarrow{\mathfrak{S}} & \Omega \doteq O^+(H) \\ (r,s) & \longmapsto & \delta_{r,s} \end{array}$$

permet d'associer à tout sous-groupe distingué G de Ω le sous-groupe distingué $\mathfrak{S}^{-1}(G)$ de $S\times S$, ie l'un des 10 sous-groupes K exhibés précédemment.

De $\mathfrak{S}^{-1}(G)=K \Rightarrow \mathfrak{S}(K)=\mathfrak{S}(\mathfrak{S}^{-1}(G)) = G$ (car $\mathfrak{S}$ surjectif), on déduit 5 groupes G possibles :

$\mathfrak{S}((e,e)) = \{Id\}$

$\mathfrak{S}(\{e\}\times\{e,-e\}) = \{\pm Id\}$

$\mathfrak{S}(\{e\}\times S)$

$\mathfrak{S}(S\times\{e\})$

$\mathfrak{S}(S\times S) = \Omega$

<u>NB</u> : On a utilisé $\mathfrak{S}(e,-e) = \mathfrak{S}(-e,e) = -Id$

$$\mathfrak{S}(\{e,-e\}\times\{e,-e\}) = \{\delta_{\pm e,\pm e}\} = \{\pm Id\}$$

$$\mathfrak{S}(\{e,-e\}\times S) = \{\delta_{\pm e,s} / s\in S\} = \{\delta_{e,s} / s\in S\}$$

car $\delta_{-e,s}(q) = -eq\bar{s}' = eq(-s)^{-1}$.

SESSION DE 1985

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème. L'emploi des instruments de calcul est autorisé pour cette épreuve.

Notations et objectif du problème

On désigne par I l'intervalle $[0, +\infty[$; on note C (I) l'espace vectoriel des fonctions continues sur I à valeurs complexes et C^1 (I) le sous-espace vectoriel de C (I) constitué des fonctions continûment dérivables sur I.

On considère l'équation différentielle

(1) $$y' + ay = f,$$

où a est un nombre réel non nul donné et où f est un élément de C (I). On note U l'application de C (I) dans lui-même qui, à tout élément f, associe l'unique solution g de l'équation (1) satisfaisant à la condition initiale $g(0) = 0$.

L'objectif de ce problème est d'étudier le comportement (global ou asymptotique) de g connaissant celui de f, ce qui revient à étudier l'opérateur U.

A titre d'information, il est indiqué que ce type de question intervient notamment dans la théorie du signal : la fonction $t \longmapsto f(t)$ *représente alors un signal d'entrée dans un certain appareil, la solution* $x \longmapsto g(x)$ *représente le signal de sortie associé à f et l'application* $f \longmapsto g$*, appelée opérateur de transfert, permet de décrire le comportement de l'appareil considéré. Le problème étudié ici est un exemple à la fois simple et fondamental de cette situation générale.*

I. Propriétés élémentaires de l'opérateur U

1. *Expression intégrale de* U.

a. Exprimer $g = U(f)$ en fonction de f; expliciter g lorsque $f = 1$.

b. On revient au cas général. L'expression obtenue pour g montre aussitôt que l'application U est linéaire; établir aussi ce résultat à partir du seul fait que g est l'unique solution de (1) telle que $g(0) = 0$.

Tournez la page S. V. P.

2. *Positivité de* U.

Soient φ un élément de C (I) à valeurs réelles positives et $\psi = U(\varphi)$.

a. Prouver que ψ est à valeurs réelles positives.

b. Prouver que, pour tout élément f de C (I), $|U(f)| \leqslant U(|f|)$.

c. On suppose $a > 0$. Lorsque φ est croissante, prouver que $a\psi \leqslant \varphi$ et en déduire que ψ est croissante.

3. *Commutation de* U *avec la dérivation.*

a. On note D l'opérateur de dérivation qui, à tout élément de C^1(I), associe sa dérivée. Soient f un élément de C^1(I) et $g = U(f)$. En dérivant la relation $g' + ag = f$, comparer D [U (f)] et U [D (f)] ; à quelle condition portant sur f ces deux fonctions sont-elles égales?

b. Retrouver les résultats de la question 2.c.

II. Comportement asymptotique des solutions au voisinage de $+\infty$

On traite ici quelques cas fondamentaux, en partant d'exemples de fonctions f pour lesquelles on dispose de formules explicites pour $g = U(f)$. Sauf mention explicite du contraire, on suppose $a > 0$.

1. *Cas des fonctions admettant une limite au point* $+\infty$.

a. Comparer le comportement asymptotique de g à celui de f lorsque $f = 1$. Tracer sur une même figure les graphes de f et de ag. Préciser le comportement asymptotique de g lorsque $a < 0$.

b. Soient T un nombre réel strictement positif et f la fonction définie sur I par les relations $f(t) = 1$ si $0 \leqslant t \leqslant T$ et $f(t) = 0$ si $t > T$. On convient de dire qu'une fonction est solution de (1) sur I si elle est continue sur I et si elle est solution de (1) sur les intervalles $[0, T[$ et $]T, +\infty[$. Expliciter l'unique solution g de (1) sur I telle que $g(0) = 0$ et étudier son comportement asymptotique.

c. Soit φ un élément de C (I) à valeurs réelles positives ayant 0 pour limite au point $+\infty$. Prouver qu'il en est de même pour $\psi = U(\varphi)$. A cet effet, on pourra d'abord établir la majoration suivante, valable pour tout nombre réel positif c et pour tout nombre réel x supérieur à c :

$$\psi(x) \leqslant e^{-ax} \int_0^c e^{at}\varphi(t)\, dt + \frac{1}{a} \sup_{t \in [c, x]} \varphi(t).$$

d. Soit f un élément de C (I). Étudier le comportement asymptotique de $g = U(f)$ lorsque f admet une limite b au point $+\infty$, où b est un nombre complexe.

2. *Cas des fonctions exponentielles.*

a. Soient k un nombre réel et f_k la fonction $t \longmapsto e^{-kt}$. Expliciter $g_k = U(f_k)$ et comparer son comportement asymptotique à celui de f_k, en discutant suivant les valeurs de k.

b. Soient ω un nombre réel strictement positif et f_ω la fonction $t \longmapsto e^{i\omega t}$. Expliciter $g_\omega = U(f_\omega)$. Comparer son comportement asymptotique à celui de f_ω ; interpréter géométriquement le résultat obtenu (introduire la forme trigonométrique du nombre complexe $a + i\omega$).

3. *Cas des fonctions puissances.*

Pour tout nombre réel positif α, on note f_α la fonction $t \longmapsto t^\alpha$ et $g_\alpha = U(f_\alpha)$, en convenant que $f_0 = 1$.

a. En partant de l'expression de g_0 et en s'appuyant sur les résultats obtenus en I.3, comparer le comportement asymptotique de g_n à celui de f_n, où n est un nombre entier naturel non nul.

b. Soient f un élément de C (I) à valeurs réelles et $g = \mathrm{U}(f)$. Prouver que si f est négligeable devant f_α au voisinage de $+\infty$, alors il en est de même pour g.

c. Comparer enfin le comportement asymptotique de g_α à celui de f_α. A cet effet, on pourra étudier $h' + ah$, où

$$h(x) = g_\alpha(x) - \frac{x^\alpha}{a}(1 - e^{-ax}).$$

III. Comportement global des solutions. Cas stable

Dans cette partie on suppose $a > 0$.

1. *Cas des fonctions bornées.*

On désigne par E le sous-espace vectoriel de C (I) constitué des fonctions bornées sur I et on munit E de la norme

$$f \longmapsto \mathrm{N}_\infty(f) = \sup_{t \in \mathrm{I}} |f(t)|.$$

a. Soit φ un élément de E à valeurs réelles positives. Prouver que $\psi = \mathrm{U}(\varphi)$ appartient encore à E et que

$$\mathrm{N}_\infty(\psi) \leqslant \frac{1}{a}\mathrm{N}_\infty(\varphi).$$

Lorsque φ est croissante, montrer qu'il y a égalité dans l'inégalité précédente.

b. En conclure que, pour tout élément f de E, la fonction $g = \mathrm{U}(f)$ appartient encore à E, que

$$\mathrm{N}_\infty(g) \leqslant \frac{1}{a}\mathrm{N}_\infty(f)$$

et que, dans cette inégalité, valable pour tout élément f de E, le nombre $\frac{1}{a}$ ne peut être remplacé par un nombre strictement inférieur.

2. *Cas des fonctions intégrables.*

On désigne par F le sous-espace vectoriel de C (I) constitué des fonctions f intégrables sur I, c'est-à-dire dont l'intégrale sur I est absolument convergente, et on munit F de la norme

$$f \longmapsto \mathrm{N}_1(f) = \int_0^{+\infty} |f(t)|\,dt.$$

a. Soient φ un élément de F à valeurs réelles positives et $\psi = \mathrm{U}(\varphi)$. Intégrer la relation $\psi' + a\psi = \varphi$ sur l'intervalle $[0, c]$, où c est un nombre réel positif; en déduire que ψ appartient aussi à F, puis que ψ admet une limite λ au point $+\infty$. Prouver alors que $\lambda = 0$ et que

$$\mathrm{N}_1(\psi) = \frac{1}{a}\mathrm{N}_1(\varphi).$$

b. Que peut-on en conclure pour $g = \mathrm{U}(f)$ lorsque f est un élément de F ?

3. *Cas des fonctions de carré intégrable.*

On désigne par G le sous-espace vectoriel de C (I) constitué des fonctions de carré intégrable sur I, c'est-à-dire telles que $|f|^2$ soit intégrable sur I, et on munit G de la norme

$$f \longmapsto \mathrm{N}_2(f) = \left(\int_0^{+\infty} |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Tournez la page S. V. P.

a. Soient φ un élément de G à valeurs réelles positives et $\psi = \mathrm{U}(\varphi)$. Prouver que ψ appartient aussi à G, que $\psi\varphi$ appartient à F, que ψ admet 0 pour limite au point $+\infty$ et que

$$\int_0^{+\infty} \psi^2(t)\,dt = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \psi(t)\,\varphi(t)\,dt.$$

(On pourra s'inspirer de la méthode de la question 2 en partant cette fois de la relation $\psi\psi' + a\psi^2 = \psi\varphi$.)

Établir aussi que

$$\mathrm{N}_2(\psi) \leqslant \frac{1}{a}\mathrm{N}_2(\varphi)$$

et que cette inégalité ne peut être améliorée.

b. Que peut-on en conclure pour $g = \mathrm{U}(f)$ lorsque f est un élément de G ?

4. *Effet régularisant de* U.

a. Montrer que, pour tout élément f de F, la fonction $g = \mathrm{U}(f)$ appartient à E et que

$$\mathrm{N}_\infty(g) \leqslant \mathrm{N}_1(f).$$

Établir enfin que cette inégalité ne peut être améliorée. A cet effet, on pourra introduire la suite (f_n) des fonctions définies par les conditions suivantes : $f_n(t) = 0$ si $t \geqslant \frac{1}{n}$, $f_n(0) = 2n$ et f_n est affine sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$; on calculera $\mathrm{N}_1(f_n)$ et $g_n\left(\frac{1}{n}\right)$, où $g_n = \mathrm{U}(f_n)$, et on en déduira la limite de $\mathrm{N}_\infty(g_n)$.

b. Montrer que, pour tout élément f de G, la fonction $g = \mathrm{U}(f)$ appartient à E et établir une majoration du type

$$\mathrm{N}_\infty(g) \leqslant \beta\,\mathrm{N}_2(f),$$

où β est un nombre réel positif indépendant de f.

IV. Comportement global des solutions. Cas instable

Dans cette partie on suppose $a < 0$.

On désigne par L le sous-espace vectoriel de C (I) constitué des fonctions f telles que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-|a|t} f(t)\,dt$$

soit absolument convergente.

1. *Existence et unicité d'une solution à croissance modérée à l'infini.*

Montrer que, pour tout élément f de L, il existe une solution h et une seule de (1) négligeable devant $x \longmapsto e^{|a|x}$ au voisinage de $+\infty$, et exprimer h en fonction de f. On note V l'application linéaire de L dans C (I) qui, à tout élément f de L, associe h.

2. *Propriétés globales d'une telle solution.*

a. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de L stable par V et que, pour tout élément f de E, $h = \mathrm{V}(f)$ est l'unique solution de (1) bornée sur I. Majorer enfin $\mathrm{N}_\infty(h)$ à l'aide de $\mathrm{N}_\infty(f)$.

b. Effectuer une étude analogue pour les espaces vectoriels F et G.

IUFM Antilles-Guyane
P.L.C. 1 Mathématique
Analyse

CAPES 85
Première épreuve - Corrigé

SOLUTION DE ANTOINE DELCROIX SUR MEGAMATHS

PREMIERE PARTIE : propriétés élémentaires de l'opérateur U.

1.a. •) 1ère méthode : la fonction $g = U(f)$ est la solution de l'équation (1) $y' + ay = f$ vérifiant $g(0) = 0$. En utilisant la méthode de la variation de la constante on obtient que toute solution de (1) s'écrit $y(t) = k e^{-ax} + e^{-ax}\int_0^x f(t)e^{at}\,dt$ $(k \in \mathbb{C})$. Comme $g(0) = 0$, on a $k = 0$ et $g(x) = e^{-ax}\int_0^x f(t)e^{at}\,dt$.

2ème méthode : on remarque que $e^{ax}(g' + ag)$ est la dérivée de : $e^{ax}g(x)$ d'où les équivalences :

$$g' = U(f) \Leftrightarrow \begin{cases} g' + ag = f \\ g(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (e^{at}g)' = e^{at} \\ g(0) = 0 \end{cases}, \text{ et encore :}$$

$$g(x) = e^{-ax}\int_0^x f(t)e^{at}\,dt.$$

•) Cas particulier : $f = 1$. On a $g(x) = e^{-ax}\int_0^x e^{at}\,dt$ d'où $g(x) = \frac{1}{a}(1 - e^{-ax})$ puisque a est supposé non nul.

1.b. – La linéarité de U provient clairement de celle de l'intégrale ; ceci justifie la première remarque du texte. Considérons maintenant $(f_1, f_2) \in C(I)^2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$. Posons $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$; $g = \lambda_1 U(f_1) + \lambda_2 U(f_2)$ et comparons $U(f)$ et g. •) Il est clair que g est solution de l'équation $y' + ay = f$ (car $(U(f_1))' + aU(f_1) = f_1$ et $(U(f_2))' + aU(f_2) = f_2$)

•) De plus g vérifie $g(0) = 0$ par définition de $U(f_1)$ et $U(f_2)$. – Alors g est l'unique solution du problème $y' + ay = f$; $y(0) = 0$; c'est donc que $g = U(f)$.

2.a. – On a $\varphi(x) = e^{-ax}\int_0^x \varphi(t)e^{at}\,dt$. Les trois fonctions $t \to \varphi(t)$, $t \to e^{at}$ $t \to e^{-at}$ étant positives sur I, on a $\forall x \in I$ $\varphi(x) \geq 0$.

2.b. – Soit f de signe quelconque on a :
$|U(f)| = \left|e^{-ax}\int_0^x f(t)e^{-at}\,dt\right| \leq e^{-ax}\int_0^x |f(t)|e^{-at}\,dt$ soit : $U(f) \leq U(|f|)$.

2.c. •) le nombre a est supposé strictement positif. Comme φ est croissante on a : $\forall t \in [0, x]$ $\varphi(t) \leq \varphi(x)$. En remplaçant dans l'expression donnant ψ on obtient :
$\psi(x) = e^{-ax}\int_0^x \varphi(t)e^{-at}\,dt \leq e^{-ax}\varphi(x)\int_0^x e^{-at}\,dt \leq \frac{\varphi(x)}{a}(1 - e^{-at}) \leq \frac{\varphi(x)}{a}$.
d'où le premier résultat.

•) Comme ψ est solution de $y' + ay = \varphi$, il vient $\psi' = \varphi - a\psi$ le résultat ci-dessus montre alors que : $\psi' \geq 0$; ψ est donc croissante

3.a. – On considère ici $f \in C^1(I)$. La fonction g est alors de classe C^2. On a $g' = D(U(f))$, par définition. D'un autre côté en dérivant la relation $g' + ag = f$, il vient $g'' + ag' = f'$. Donc g' est une solution de l'E.D (2) $z' + az = f'$. Toute solution de cette E.D. s'écrit : $z(x) = ke^{-ax} + g'(x)$ $(k \in \mathbb{C})$. Maintenant, $U(f') = U(D(f))$ est la solution de (2) vérifiant $z(0) = 0$: on détermine alors k grâce à : $z(0) = k + g'(0)$ d'où $U(f') = g'(x) - g'(0)e^{-ax}$. On a donc :

$$D(U(f)) - U(D(f)) = g' - U(f') = g'(0)\,e^{-ax}. \quad (*)$$

l'égalité a lieu si et seulement si $g'(0) = 0$. Or puisque $g'(0) + a\,g(0) = f(0)$ avec $g(0) = 0$ on obtient enfin :

$$DU(f) = UD(f) \text{ si et seulement si } f(0) = 0.$$

3.b. – En appliquant l'égalité (*) avec φ et ψ et en utilisant l'égalité $\psi'(0) = \varphi(0)$ il vient : $\psi' = U(\varphi') + \varphi(0)e^{-a}$. Comme φ est croissante φ' est positive et $U(\varphi')$ aussi (2.a.). De plus φ étant positive $\varphi(0)$ est positive : au total ψ' est positive.

DEUXIEME PARTIE Comportement asymptotique des solutions au voisinage de $+\infty$

1.a. – D'après le (I)-1.a. pour $f = 1$ on a $g(x) = \frac{1}{a}(1 - e^{-ax})$; d'où les graphes.

Remarque : en $+\infty$, pour $a > 0$ $ag \sim f$.

• pour $a < 0$ $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

1.b. •) Sur $[0,T]$ g est solution de $\begin{cases} y' + ay = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$. On trouve donc d'après (I) 1.a. $g_{|[0,T]}(x) = \frac{1}{a}(1 - e^{-ax})$.

•) Sur $[T, +\infty[$ g est solution de $\begin{cases} y' + ay = 0 \\ y(T) = (1/a)(1 - e^{-aT}) \end{cases}$.

Comme la solution générale de $y' + ay = 0$ est $y(x) = k e^{-ax}$ ($k \in \mathbb{C}$) on trouve en calculant k grâce à la condition initiale :

$g_{[T,+\infty[} = (1/a)(e^{aT} - 1) e^{-ax}$

On a $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ ($a > 0$).

1.c. •) Etablissons la majoration proposée : Soit $c \in \mathbb{R}^+$ et $x \geq c$.

On a $\Psi(x) = e^{-ax} \int_0^x e^{-at} \varphi(t)\, dt \leq e^{-ax} \int_0^c e^{-at} \varphi(t)\, dt + e^{-ax} \sup_{t \in [c,x]} \varphi(t) \int_c^x e^{at} dt$.

Or $e^{-ax} \int_c^x e^{at} dt = (e^{-ax}/a)(e^{ax} - e^{ac}) = (1/a)(1 - e^{a(c-x)})$

Comme $x \geq c$, on a : $e^{-ax} \int_c^x e^{at} dt \leq 1/a$. D'où :

$\Psi(x) \leq e^{-ax} \int_0^c e^{-at} \varphi(t)\, dt + \frac{1}{a} \sup_{t \in [c,x]} \varphi(t)$

•) Soit maintenant $\varepsilon > 0$, comme $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = 0$, il existe $c > 0$ tel que : $\forall x \geq c$, $\varphi(x) \leq \frac{\varepsilon a}{2}$. Ce c étant fixé, comme $\lim_{x \to +\infty} e^{-ax} = 0$, il existe $x_0 \geq c$ tel que $\forall x \geq x_0$ $e^{-ax} \int_0^c e^{-at} \varphi(t)\, dt < \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors pour tout $x \geq x_0$ on a $0 \leq \Psi(x) \leq \varepsilon$. D'où le résultat.

(Rappel : les fonctions φ, Ψ sont positives)

1.d. – Considérons $f_1 = |f - b|$. On a clairement $f_1 \in C(I)$ et d'après (I).2.b. $0 \leq |U(f - b)| \leq U(|f - b|) = U(f_1)$

Comme $\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = 0$ en appliquant (II).1.c. il vient : $\lim_{x \to +\infty} U(f - b) = 0$. Or $U(f - b) = U(f) - U(b)$ et on a : $U(b) = b\, U(1) = \frac{b}{a}(1 - e^{-ax})$.

1.d. – (Suite) donc comme a est positif $\lim_{x \to +\infty} U(b) = \frac{b}{a}$.

Enfin comme $\lim_{x \to +\infty} (U(f) - U(b))$ et $\lim_{x \to +\infty} U(b)$ existent, il vient l'égalité $\lim_{x \to +\infty} U(f) = \lim_{x \to +\infty} U(b) = \frac{b}{a} = \frac{1}{a} \lim_{x \to +\infty} f$.

2.a. •) Avec les notations du texte $g_k(x) = e^{-ax} \int_0^x e^{(a-k)t} dt$ d'après l'expression trouvée en (I).1.a; On a donc :

•) si $k = a$, $g_k(x) = x e^{-kx}$ •) si $k \neq a$ $g_k(x) = \frac{1}{a-k}(e^{-kx} - e^{-xa})$

Remarque : en théorie du signal on écrira g_k sous la forme $g_k(x) = e^{-kx} \frac{1 - e^{-(a-k)x}}{a-k} = f_k(x) \frac{1 - e^{-(a-k)x}}{a-k}$ $a \neq k$.

le comportement asymptotique est donné par la fonction :

$x \longrightarrow \frac{1 - e^{-(a-k)}}{a-k}$ caractéristique de l'appareil (cf Introduction).

•) Comportement asymptotique.

1) $a = k$ – On a : $g_k(x) / f_k(x) = x$ d'où : $\frac{g_k(x)}{f_k(x)} \sim x$ en $+\infty$

(avec $\lim_{x \to +\infty} f_k(x) = \lim_{x \to +\infty} g_k(x) = 0$ car $a = k > 0$).

2) $a > k$ – On a $\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-(a-k)x}}{a-k} = \frac{1}{a-k}$ donc : $\frac{g_k(x)}{f_k(x)} \sim \frac{1}{a-k}$ en $+\infty$

(Si $k < 0$ on a $\lim_{+\infty} f_k(x) = \lim_{+\infty} g_k(x) = +\infty$, si $k = 0$ $\lim_{+\infty} f_k = 1$ et $\lim_{+\infty} g_k = \frac{1}{a-k}$. Enfin pour $k \in]0, a[$ les limites de f_k et g_k sont nulles en $+\infty$).

3) $a < k$ – On a alors $\lim_{+\infty} f_k(x) = 0$ et $\lim_{+\infty} g_k(x) = 0$ car $g_k(x) = e^{-ax}(e^{-(k-a)x} - 1)/(a-k))$ avec $k - a > 0$. Cependant $\lim_{x \to +\infty} g_k(x) / f_k(x) = -\infty$.

2.b. Avec les notations du texte on a (en faisant "formellement" $k = -i\omega$) : $g_\omega(x) = \frac{1}{a + i\omega}(e^{i\omega x} - e^{-ax})$ qu'on écrit :

$g_\omega(x) = e^{i\omega x} \frac{1 - e^{i\omega x - ax}}{a + i\omega} = f_\omega(x) \frac{1 - e^{i\omega x - ax}}{a + i\omega}$

On a comme $a > 0$ $\lim_{x \to +\infty} |e^{i\omega x - ax}| = 0$ d'où :

$\lim_{x \to +\infty} \frac{g_\omega(x)}{f_\omega(x)} = \frac{1}{a + i\omega}$ et $g_\omega(x) \sim \frac{1}{a + i\omega} f_\omega(x)$ en $+\infty$.

V

2.b. (suite) – en posant $a+i\omega = re^{i\theta}$ $(\theta \in [0,2\pi[)$

il vient : $g(x) \sim f(x) \times \frac{1}{r} e^{-i\theta}$ (en $+\infty$). (avec $f(x)=e^{i\omega x}$)

Asymptotiquement le signal de sortie $(g(x))$ est sinusoïdal de même pulsation que le signal d'entrée : mais il est déphasé (facteur $e^{-i\theta}$) et multiplié par un facteur homothétique $(\frac{1}{r})$. Géométriquement il subit une homothétie-rotation.

3.a. – On a pour $\alpha = 0$ $g_0 = \frac{1}{a}(1-e^{-ax})$ ((I) 1.a.).
donc $ag_0 \sim f_0$ en $+\infty$. De même si on calcule g_1 on s'aperçoit que $g_1 \sim \frac{x}{a}$ en $+\infty$ soit $ag_1 \sim f_1$ en $+\infty$). On va donc montrer par récurrence que $ag_n \sim f_n$ en $+\infty$). Supposons donc que l'on a pour un certain n $ag_n \sim f_n$ en $+\infty$ et montrons que $ag_{n+1} \sim f_{n+1}$ en $+\infty$. D'après (I) 3.a. on a :
$D(U(f_{n+1})) - U(D(f_{n+1})) = f_{n+1}(0)e^{-ax} = 0$ d'où : $g'_{n+1} - (n+1)g_n = 0$
Or par définition $g'_{n+1} + ag_{n+1} = f_{n+1}$ d'où $ag_{n+1} = f_{n+1} + (n+1)g_n$
On a alors (pour $x>0$) $\frac{ag_{n+1}}{f_{n+1}} = 1 + \frac{(n+1)g_n}{f_{n+1}} = 1 + \frac{(n+1)g_n}{t\,f_n}$
Or en $+\infty$ $ag_n \sim f_n$ d'où $\frac{(n+1)g_n}{f_{n+1}} \sim \frac{n+1}{at}$ puis : $\lim_{n\to+\infty} (n+1)g_n/tf_n = 0$
On a donc bien $ag_{n+1} \sim f_{n+1}$.

Remarque : on peut ici aussi tenter un calcul de g_n : c'est un peu plus long.

3.b. – Soit f telle que $f = o(f_\alpha)$ en $+\infty$. On dispose de l'écriture suivante pour $x>0$ et $c \in]0,x]$ (cf (II) 1.c.) :

$$\frac{g(x)}{f_\alpha(x)} = \frac{e^{-ax}}{f_\alpha(x)} \int_0^c f(t)e^{at}dt + e^{-ax}\int_c^x \frac{f(t)}{f_\alpha(x)} e^{at}dt$$

On a alors :

$$0 \leq \left|\frac{g(x)}{f_\alpha(x)}\right| \leq \frac{e^{-ax}}{f_\alpha(x)} \int_0^c |f(t)|e^{at}dt + e^{-ax}\int_c^x \frac{|f(t)|}{f_\alpha(t)} \frac{f_\alpha(t)}{f_\alpha(x)} e^{at}dt$$

Or pour $t \in [c,x]$ on a : $0 \leq \frac{t}{x} \leq 1$ donc $(\frac{t}{x})^\alpha \leq 1$ (car $\alpha \geq 0$)
d'où : $0 \leq \left|\frac{g(x)}{f_\alpha(x)}\right| \leq \frac{e^{-ax}}{f_\alpha(x)} \int_0^c f(t)e^{at}dt + e^{-ax}\int_c^x \frac{|f(t)|}{f_\alpha(x)} dt$

VI

3.b. (Suite) – Soit maintenant $\varepsilon > 0$. comme $f = o(f_\alpha)$ il existe $c>0$ tq que : $\forall t \geq c$ $|f(t)|/f_\alpha(t) \leq \varepsilon a/2$. On a alors pour $x \geq c$ $e^{-ax}\int_c^x |f(t)|/f_\alpha(t)\, e^{at}dt \leq \frac{\varepsilon a}{2} e^{-ax}\int_c^x e^{at}dt = \frac{\varepsilon}{2}$.
Puis comme $a>0$ et $f_\alpha(t) = t^\alpha$ on a $\lim_{x\to+\infty} e^{-ax}/x^\alpha = 0$
d'où l'existence de d tq que : $\forall x \geq d$ $(e^{-ax}/f_\alpha(x))\int_0^c |f(t)|e^{-at}dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$
Alors pour $x \geq \max(d,c)$ on a : $0 \leq g_\alpha(x)/f_\alpha(x) \leq \varepsilon$.
d'où : $g(x) = o(f_\alpha(x))$ en $+\infty$.

3.c. – la fonction h est clairement dérivable et l'on a :
$h'(x) = g'_\alpha(x) - \frac{1}{a}\alpha x^{\alpha-1}(1-e^{-ax}) - x^\alpha e^{-ax}$
D'où : $h'(x) + a\,h(x) = g'_\alpha(x) + a\,g_\alpha(x) - x^\alpha + 2x^\alpha e^{-ax} - \frac{\alpha}{a}x^{\alpha-1}(1-e^{-ax})$
$= 2x^\alpha e^{-ax} - \frac{\alpha}{a}x^{\alpha-1}(1-e^{-ax})$.
(car $g'_\alpha(x) + ag_\alpha(x) = f_\alpha(x) = x^\alpha$.)
On remarque alors en posant $\tilde{f}(x) = 2x^\alpha e^{-ax} - \frac{\alpha}{a}x^{\alpha-1}(1-e^{-ax})$ que $\tilde{f} \in C(I)$, (car $x^{\alpha-1}(1-e^{-ax}) \sim x^\alpha$ au voisinage de 0) et que $h(0) = g_\alpha(0) = 0$). Donc $h = U(\tilde{f})$. Or on a :
$\tilde{f}(x) = o(x^\alpha) = o(f_\alpha)$ en $+\infty$, donc d'après (II) 3.b. on a aussi $h_\alpha = o(f_\alpha)$.
Enfin $g_\alpha(x) = h(x) + \frac{x^\alpha}{a}(1-e^{-ax})$ d'où en $+\infty$:
$g_\alpha(x)/f_\alpha(x) = \frac{1}{a}(1-e^{-ax}) + o(1)$.
$= \frac{1}{a}(1+o(1)) + o(1)$.
D'où : $\frac{g_\alpha(x)}{f_\alpha(x)} \sim \frac{1}{a}$ en $+\infty$.

VII

TROISIEME PARTIE Comportement global des solutions cas stable.

1.a. •) De l'inégalité $\varphi \leq N(\psi)$ on tire par (I)2.a et (I).2.b. la relation : $\forall x \in \mathbb{R}^+ 0 : \psi(x) \leq U(N_\infty(\varphi)) = N_\infty(\varphi)\, U(1)$. Or, d'après (I) 1.a. (calcul de $U(1)$) $U(1)$ est bornée par $1/a$. On a donc : $\varphi \in E$; $N_\infty(\psi) \leq (1/a)\, N_\infty(\varphi)$.

•) Une fonction $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ positive croissante et bornée possède une limite en $+\infty$ et de plus $\lim_{+\infty} F = \sup_{\mathbb{R}^+} F = N_\infty(F)$. Ici ψ vérifie ces hypothèses ainsi que φ ((I).2.c. et cette question). On a alors d'après II.1.d. $\lim_{+\infty} \psi = \frac{1}{a} \lim_{+\infty} \varphi$.

1.b. •) Si f appartient à E, il en est bien sûr de même de $|f|$ et l'on a : $N_\infty(g) = N_\infty(|g|) \leq \frac{1}{a} N_\infty(|f|) = N_\infty(f)$

•) Pour $f = 1$ on a $U(f)(x) = \frac{1}{a}(1 - e^{-ax})$ et l'égalité : $N_\infty(g) = \frac{1}{a} N_\infty(f)$. Ce qui prouve que $\frac{1}{a}$ est la meilleure constante possible (Remarque : raisonnement aussi trivial en prenant pour f une fonction φ, positive croissante et bornée)

2.a. - En intégrant $\psi' + a\psi = \varphi$ il vient pour tout $c > 0$.

(*) $\psi(c) + a\int_0^c \psi(t)dt = \int_0^c \varphi(t)dt$ (car $\psi(0) = 0$). Comme φ est ≥ 0, on a $\psi \geq 0$ ((I).2.a.) d'où $a\int_0^c \psi(t)dt \leq \int_0^c \varphi(t)dt$ et $a\int_0^c \psi(t)dt \leq N_1(\varphi)$. La famille de nombres $c \to a\int_0^c \psi(t)dt$ est croissante avec c bornée elle a donc une limite en $+\infty$ d'où la convergence de l'intégrale et : $a\,N_1(\psi) \leq N_1(\varphi)$. Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ est convergente (*) entraine que $\lim_{+\infty} \psi$ existe. En utilisant de nouveau la convergence de $\int_0^{+\infty} \psi(t)dt$ et la positivité de ψ on a nécessairement $\lim_{+\infty} \psi = 0$ et $a\,N_1(\psi) = N_1(\varphi)$.

2.b. - Pour $f \in F$ on a $|g| = |U(f)| \leq U(|f|)$ (d'après (I) 2 b.). Comme $U(|f|)$ appartient à F (d'après ((III).2.a.) l'intégrale $\int_0^{+\infty} |g(t)|\,dt$ est convergente et $g \in F$; On a alors :

$N_1(|g|) \leq N_1(U(|f|)) = \frac{1}{a} N_1(f)$ (d'après (III).2.a)

VIII

2.b.-(fin) - Remarque : l'inégalité $N_1(U(f)) \leq (1/a) N_1(f)$ ne peut être améliorée puisqu'il y a égalité pour f positive.

3.a •) En intégrant la relation $\psi\psi' + a\psi^2 = \psi\varphi$, il vient pour tout $c \in \mathbb{R}^+$ $(\psi(c))^2 + a\int_0^c \psi^2(t)dt = \int_0^c \psi(t)\varphi(t)\,dt$. (**).

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\int_0^c \psi(t)\varphi(t)dt \leq (\int_0^c (\psi(t))^2 dt)^{1/2} (\int_0^c (\varphi(t))^2 dt)^{1/2}$, il vient : $a(\int_0^c \psi^2(t)dt)^{1/2} \leq (\int_0^c \varphi^2(t)dt)^{1/2}$ (encore valable si $\int_0^c \psi^2(t)dt = 0$). On en déduit l'existence de $(\int_0^{+\infty} \psi^2(t)dt)$ et l'inégalité : $a\,N_2(\psi) \leq N_2(\varphi)$. En reprenant l'inégalité de Cauchy Schwarz on obtient : $\forall c \in \mathbb{R}^+ \int_0^c \psi(t)\varphi(t)dt \leq N_2(\psi) N_2(\varphi)$ d'où la convergence de $\int_0^{+\infty} \psi(t)\varphi(t)\,dt$ et : $\psi\varphi \in F$. L'égalité (**) montre alors que $\lim_{x \to +\infty} \psi^2(x)$ existe. La convergence de $\int_0^{+\infty} \psi^2(t)\,dt$ entraine que cette limite est nulle. On en déduit que $\lim_{+\infty} \psi(x) = 0$ et l'égalité : $\int_0^{+\infty} \psi^2(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \psi(t)\varphi(t)\,dt$.

•) Pour montrer que l'inégalité $N_2(\psi) \leq \frac{1}{a} N_2(\varphi)$ est la meilleure, On calcule $N_2(\psi)$ et $N_2(\varphi)$ pour les f_k $t \to e^{-kt}$ (et les g_k) étudiées en (II) 2 a, pour $k \neq a$ (sinon $f_k \notin G$).

On obtient $N_2(f_k) = \left(\frac{1}{2k}\right)^{1/2}$ et $N_2(g_k) = \left(\frac{1}{2a\,k(k+a)}\right)^{1/2}$ d'après le calcul de g_k effectué en (II)2 a. On a alors : $\frac{N_2(g_k)}{N_2(f_k)} = \left(\frac{1}{a(k+a)}\right)^{\frac{1}{2}}$ et $\lim_{\substack{k \to 0 \\ k \neq 0}} N_2(g_k) / N_2(f_k) = \frac{1}{a}$. Ce qui prouve que l'inégalité ne peut être améliorée.

3.b. •) On raisonne comme dans (III) 2.b. On a pour $f \in G$. $|g| = |U(f)| \leq U(|f|)$. Comme $f \in G$ il en est de même de $U(|f|)$ (III 3.a) et donc de g. L'inégalité précédente combinée avec (III)3.a. donne $N_2(g) \leq \frac{1}{a} N_2(f)$. Cette inégalité ne peut être améliorée d'après (III).3.a.

4.a. - On a $|g(x)| \leq e^{-ax}\int_0^x |f(t)|e^{-at}\,dt \leq \int_0^x |f(t)|\,dt \leq N_1(f)$. Donc g est bornée et $N_\infty(g) \leq N_1(f)$.

4.a.-(Suite) - Pour la suite de fonctions données dans le texte on a clairement $f_n \in F$ et $N_1(f_n) = 1$.

Puis $g_n(\frac{1}{n}) = e^{-a/n} \int_0^{1/n} 2n^2(\frac{1}{n} - t) e^{at} dt$

$$= 2n^2 e^{-a/n} \left(-\frac{1}{na} + \frac{1}{a^2}(e^{a/n} - 1)\right)$$

(Après une intégration par parties).

Comme : $e^{a/n} - 1 = \frac{a}{n} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ (pour $n \to +\infty$), on a :

$$g_n(\frac{1}{n}) = 2n^2 e^{-a/n} \left(\frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right) = e^{-a/n} \cdot (1 + o(\frac{1}{n})).$$

d'où $\lim_{n \to +\infty} g_n(\frac{1}{n}) = 1$. Or :

$$g_n(\tfrac{1}{n}) \leq \sup_{\mathbb{R}^+} g_n(x) = N_\infty(g_n) \leq N_1(f_n) = 1.$$

D'où $\lim_{n \to +\infty} N_\infty(g_n) = N_1(f_n)$. l'inégalité $N_\infty(g) \leq N_1(f)$ ne peut donc être améliorée.

4.b. l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au second membre de $|g(x)| \leq e^{-ax} \int_0^x |f(t)| e^{at} dt$ donne :

$$|g(x)| \leq e^{-ax} \left(\int_0^x e^{2at} dt\right)^{1/2} \left(\int_0^x |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} \leq (1/2a)^{1/2} N_2(f).$$

On en déduit que g est bornée et l'inégalité :

$N_\infty(g) \leq (2a)^{-1/2} N_2(f)$.

<u>Remarque</u>. Ici encore l'inégalité est la meilleure possible. On peut le montrer en prenant la suite f_n de fonctions continues (et appartenant à G) définies par :

$$f_n(t) = e^{at} \text{ si } 0 \leq t \leq n \quad f_n(t) = e^{na(1+n-t)} \text{ si } t > n.$$

On vérifie alors que $N_2(f_n) \sim (2a)^{-1/2} e^{an}$. On peut estimer pour $g_n = U(f_n)$, $g_n(n)$: $g_n(n) \sim \frac{1}{2a} e^{an}$. alors $\lim_{n \to +\infty} g_n(n) / N_2(f_n) = (2a)^{-1/2}$, ce qui prouve l'assertion.

<u>IV</u> QUATRIEME PARTIE <u>Comportement global des solutions. Cas instable</u>

<u>1 •)</u> On remarque d'abord que E est clairement un s.e.v. de L en effet pour $f \in E$ on a : $\forall t \in \mathbb{R}^+$ $e^{-|a|t}|f(t)| \leq e^{-|a|t} N_\infty(f)$. l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-|a|t} dt$ étant convergente il en est de même de $\int_0^{+\infty} e^{-|a|t} |f(t)| dt$.

•) Toute solution de (1) $y' + ay = f$ s'écrit :

$h(x) = e^{-ax}\left(k + \int_0^x f(t) e^{at} dt\right)$. $(a < 0)$.

la fonction h est négligeable devant $e^{-ax} = e^{|a|x}$ si et seulement si (*) $\lim_{x \to \infty} \left(k + \int_0^x f(t) e^{at} dt\right) = 0$. On rappelle que, par hypothèse l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) e^{at} dt$ est convergente : la condition * est réalisée ssi $k = -\int_0^{+\infty} f(t) e^{at} dt$; d'où l'expression de h : $h(x) = e^{-ax}\left(-\int_0^{+\infty} f(t) e^{at} dt + \int_0^x f(t) e^{at} dt\right)$

$$= -e^{-ax} \int_x^{+\infty} f(t) e^{at} dt.$$

•) L'application $V \begin{pmatrix} L \to C(I) \\ f \mapsto h \end{pmatrix}$ est clairement linéaire vu de l'expression définissant h.

<u>2.a.</u>•) Pour $f \in E$, si l'on note $V(f) = h$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|h(x)| \leq e^{|a|x} \int_x^{+\infty} |f(t)| e^{-|a|t} dt \leq e^{|a|x} \int_x^{+\infty} e^{-|a|t} dt \, N_\infty(f)$$

$$\leq \frac{1}{a} N_\infty(f).$$

Donc h est bornée et l'on a : $N_\infty(h) \leq \frac{1}{a} N_\infty(f)$. D'où la stabilité de E par V et la majoration demandée.

<u>Remarque</u> : le choix $f = 1$ donne $h(x) = -\frac{1}{a}$ et montre que la majoration précédente est la meilleure possible.

•) Soit $f \in E$ $h = V(f)$ et h_1 une autre solution de (1). Comme $h - h_1$ est solution de $y' + ay = 0$, il existe une constante k telle que $h_1(x) = k e^{-ax} + h(x)$. Comme $a < 0$ h_1 est bornée ssi $k = 0$, puisque $\lim_{x \to +\infty} e^{-ax} = +\infty$; h est bien la seule solution bornée de (1).

2.b. – Etude pour l'espace vectoriel F.

•) On remarque d'abord comme ci-dessus que F est un sous espace vectoriel de L : on a : $\forall t \in \mathbb{R}$ $e^{-|a|t}|f(t)| \leq |f(t)|$ et puisque : $f \in F$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-|a|t}|f(t)|\,dt$ est convergente.

•) Stabilité de F par V.

Pour $f \in F$ et pour $x \in \mathbb{R}^+$ on a :

$$\int_0^x |h(x)|\,dx \leq \int_0^x \left(e^{-a\omega} \int_\omega^{+\infty} e^{at}|f(t)|\,dt\right) d\omega \quad (*)$$

On intègre par parties le membre de droite de (*) en posant $u'(\omega) = e^{-a\omega}$ $v(\omega) = \int_\omega^{+\infty} e^{at}|f(t)|\,dt$ (et v est de classe C^1 car $t \to e^{at}|f(t)|$ est continue). On a $v'(\omega) = -e^{a\omega} f(\omega)$. On obtient donc :

$$\int_0^x |h(x)|\,dx \leq \frac{1}{-a}\left[e^{-ax}\int_x^{+\infty} e^{at}|f(t)|\,dt - \int_0^{+\infty} e^{at}|f(t)|\,dt + \int_0^x |f(t)|\,dt\right]$$

On a $e^{-ax}\int_x^{+\infty} e^{at}|f(t)|\,dt = \int_x^{+\infty} e^{a(t-x)}|f(t)|\,dt \leq \int_x^{+\infty} |f(t)|\,dt$ car pour $t \in [x, +\infty]$ on a $t - x > 0$, et a est négatif. Comme $\int_0^{+\infty} e^{at}|f(t)|\,dt$ est positive il vient :

$\int_0^x |h(x)|\,dx \leq \frac{1}{|a|}\left(\int_x^{+\infty} f(t)\,dt + \int_0^x |f(t)|\,dt\right) = \frac{1}{|a|} N_1(f)$. D'où la convergence de $\int_0^{+\infty} |h(x)|\,dx$ et l'inégalité $N_1(h) \leq \frac{1}{|a|} N_1(f)$.

•) Unicité de la solution de (1) appartenant à F.

L'argument employé est analogue à celui du (IV).1.

Supposons qu'il existe h_1 solution de (1) appartenant à F éventuellement différente de h. Il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que $h_1(x) = h(x) + k e^{|a|x}$ et la différence $h_1 - h$ appartient à F (c'est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel). Mais l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{|a|x}\,dx$ divergeant on a nécessairement $k = 0$ et $h = h_1$.

– Etude pour l'espace vectoriel G.

•) Ici encore G est un sous espace vectoriel de L. On remarque d'abord que $t \to e^{-|a|t}$ appartient à G. Alors l'inégalité de Schwarz donne

2 b (Suite) –

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\int_0^x e^{-|a|t}|f(t)|\,dt \leq \left(\int_0^x e^{-2|a|t}\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^x |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\int_0^x e^{-|a|t}|f(t)|\,dt \leq N_2(t \to e^{-|a|t})\, N_2(f)$.

D'où la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-|a|t}|f(t)|\,dt$ et la conclusion.

•) Stabilité de g par V.

▪ l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à l'expression définissant h ((III).1) donne : $|h(x)|^2 \leq e^{-2ax}\int_x^{+\infty} e^{2at}\,dx \int_x^{+\infty} |f(t)|^2\,dt$.

D'où $|h(x)|^2 \leq \frac{1}{2|a|}(N_2(f))^2$ en calculant la première intégrale et en majorant la deuxième ; on a donc : $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $|h(x)| \leq \left(\frac{1}{2a}\right)^{1/2} N_2(f)$ d'où l'on déduit le résultat utile dans la suite : h est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

▪ On va utiliser maintenant le fait que les fonctions f et h sont à valeurs complexes. De $h' + ah = f$ on tire les 2 égalités :

$\bar{h}h' = \bar{h}f - a|h|^2$ et $h\bar{h}' = h\bar{f} - a|h|^2$.

Or $(h\bar{h})' = h'\bar{h} + \bar{h}'h$ d'où, comme $h\bar{h} = |h^2|$:

$$|(h(x))^2| - |h(0)|^2 = \int_0^x (\bar{h}f + h\bar{f})(t)\,dt - 2a\int_0^x |h|^2\,dt, (*)$$

qui donne la majoration :

$$2|a|\int_0^x |h|^2\,dt \leq \int_0^x |\bar{h}f(t)|\,dt + \int_0^x |(h\bar{f})(t)|\,dt + |h(x)|^2 + |h(0)|^2.$$

Chacune des 2 intégrales du membre de droite se majore à l'aide de Cauchy-Schwarz de la même manière :

$$\int_0^x |\bar{h}f(t)|\,dt \leq \left(\int_0^x |h(t)|^2\right)^{1/2}\left(\int_0^x |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$$

On obtient finalement :

$$|a|\int_0^x |h(t)|^2\,dt \leq \left(\int_0^x |h(t)|^2\,dt\right)^{1/2} . N_2(f) + \tfrac{1}{2}(|h(x)|^2 + |h(0)|^2)$$

Clen posant $H(x) = \left(\int_0^x |h(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$ l'inégalité

$$|a|(H(x))^2 - H(x)\,N_2(f) \leq (N_\infty(h))^2,$$

puisque h est bornée. La fonction $H(x)$, qui est croissante est nécessairement bornée (sinon étant croissante elle tendrait vers l'infini ce qui contredirait l'inégalité précédente).

<u>2.b. Suite</u> — Dire que la fonction H est bornée, revient à dire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |h(t)|^2 dt$ est convergente. On obtient (enfin !) l'appartenance de h à G, qui est donc stable par V.

En considérant l'égalité (*) on va pouvoir établir une relation entre $N_2(h)$ et $N_2(f)$. D'une part la question (<u>III</u>) <u>3.a.</u> permet d'établir que $h\bar{f} + \bar{h}f \in F$, car f et h appartiennent à G ce qui entraîne (en "faisant tendre x vers l'infini" dans (*)) que $x \to h^2(x)$ possède une limite en $+\infty$. Comme $\int_0^{+\infty} |h(t)|^2 dt$ est convergente cette limite est nulle : On en tire l'égalité :

$$-|h^2(0)| = 2\,\mathrm{Re} \int_0^{+\infty} h(t)\,\bar{f}(t)\,dt + 2|a| \int_0^{+\infty} |h(t)|^2 dt .$$

et la majoration : $|a| \int_0^{+\infty} |h(t)|^2 dt \leq -2\,\mathrm{Re} \int_0^{+\infty} h(t)\,\bar{f}(t)\,dt$.

d'où : $|a| \int_0^{+\infty} |h(t)|^2 dt \leq \int_0^{+\infty} |h(t)\,f(t)|\,dt \leq N_2(h)\, N_2(f)$, toujours par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On a donc :

$|a|\,(N_2(h))^2 \leq N_2(h)\, N_2(f)$, d'où l'on tire l'inégalité encore vraie si $N_2(h) = 0$: $\quad N_2(h) \leq \frac{1}{|a|}\, N_2(f)$.

Capes 1985, épreuve II

Ce travail fait à partir d'une photocopie peut présenter quelques erreurs, me les signaler à l'adresse suivante :
`jeaneric.richard(a)wanadoo.fr` (changer (a) en @). Bon courage! Version du 20 juin 2008 à 14h42.

Notations et objectifs du problème

On note P le plan Euclidien orienté, et Π l'ensemble des vecteurs de P. Le choix d'un point de P permet d'identifier P et Π. Les applications affines de P dans lui même sont plus simplement appelées *applications affines*, et notées par des lettres minuscules ; les endomorphismes de Π associés sont appelés *endomorphismes* et sont notés par la lettre majuscule correspondante. On rappelle qu'une application affine f est déterminée par son endomorphisme associé, et l'image d'un point ; lorsque f fixe un point, son étude est ramenée à celle de F. Pour qu'une application affine f soit une *transformation affine*, il faut et il suffit que F soit un automorphisme, ce qui revient à dire que le déterminant de F, noté $\det F$ est non nul ; on dit alors que f et F sont *direct* si $\det F > 0$, indirect si $\det F < 0$.

La symétrie orthogonale s par rapport à une droite D est appelée *réflexion* d'axe D ; l'automorphisme orthogonal S associé est appelé réflexion d'axe Δ où Δ désigne la direction de D.

Pour tout nombre réel θ, on note R_θ la *rotation* de Π dont θ est une mesure de l'angle ; lorsque $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, il s'agit d'un *quart de tour direct*, noté plus simplement R.

Dans ces conditions, toute rotation R_θ s'écrit sous la forme : $\cos\theta I + \sin\theta R$, où I désigne l'identité.

Étant donné un parallélogramme (ordonné) $\Gamma = (O, J, K, L)$ de P, où $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OL}$, équivaut à celle de $(O, \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OL}$. Dans toute la suite, on suppose que Γ n'est pas applati, ce qui revient à dire que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base. Si cette base est directe, on dit que Γ est direct ; dans le cas contraire, on dit que Γ est indirect. Lorsque Γ est un carré, on dit que $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère carré, ou encore que $\vec{u}, \vec{v})$ est une base carrée, ce qui revient à dire que $\vec{v} = R(\vec{u})$ si cette base est directe, et $\vec{v} = -R(\vec{u})$ dans le cas contraire.

L'objectif du problème est d'étudier les décompositions d'une transformation affine de P en transformations élémentaires, notamment les similitudes et les affinités orthogonales, ce qui fait l'objet des parties IV et V. La partie II étant consacrée à quelques resultats élémentaires.

Á cet effet, on utilise un outil géométrique, l'action des transformations sur les parallélogrammes et sur les carrés (cf parties I et V), et un outils algébrique, à savoir la décomposition d'un endomorphisme en somme de similitudes (cf partie III).

Partie I. Caractérisation des similitudes par leur action sur les carrés

On dit qu'une transformation affine g est une similitude de rapport ρ si l'automorphisme associé à G est de la forme $G = \rho U$ où $\rho > 0$ et où U est un automorphisme orthogonal, dit associé à g. Dans ces conditions on dit aussi que G est une similitude.

1. Prouver que l'image d'un parallélogramme par une transformation affine f est encore un parallélogramme. Etant donné des parallélogrammes Γ et Γ', établir l'existence et l'unicité d'une transformation affine transformant Γ en Γ'.

   Soit g une transformation affine et G l'automorphisme associé. Montrer qu'il est équivalent de dire :

   a) La tranformation g est une similitude directe de P ;

   b) Il existe un carré direct dont l'image par g est un carré direct ;

c) Les automorphismes G et R commutent ;

d) L'image par g de tout carré direct est un carré direct.

2. Caractériser de même les similitudes indirectes.

3. Soit $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère non carré ; montrer que $(O, \vec{u} + R(\vec{v}), \vec{v} - R(\vec{u}))$ est un repère carré indirect, et que $(O, \vec{u} - R(\vec{v}), \vec{v} + R(\vec{u}))$ est un repère carré direct, et que ce dernier repère se déduit du précédent par une similitude indirecte. Exprimer le rapport ρ de cette similitude, et déterminer l'axe de la reflexion associé à U. Le plan P étant rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, mettre en place sur une même figure les trois repères précédents et les parallélogrammes associés lorsque $\vec{u} = (3, 2)$ et $\vec{v} = (6, -1)$. Expliciter ρ et Δ. On prendra l'unité de longueur égale à 1cm.

Partie II. Affinités orthogonales ; composition, conjugaison.

Étant donné une droite D de P et un nombre réel non nul, on appelle *affinité orthogonale* d'axe D et de rapport λ la transformation affine a de P qui à tout point M associe le point N défini par la relation $\overrightarrow{HN} = \lambda \overrightarrow{HM}$, où H est la projection orthogonale de M sur D. L'automorphisme A associé est appelé affinité orthogonale d'axe Δ et de rapport λ où Δ est la direction de D.

Dans cette partie, on considère des affinités de rapport différent de 1.

1. *Composée de deux affinités orthogonales*

Soit a_1 et a_2 des affinités orthogonales d'axes respectifs D_1 et D_2 et de rapports respectifs λ_1 et λ_2. On considère la composée de a_1 et a_2, notée $f = a_2 a_1$.

a) Déterminer la nature de f lorsque D_1 et D_2 sont parallèles et préciser l'ensemble des points fixes de f.

b) Montrer que D_1 et D_2 sont sécantes si et seulement si f admet un point fixe et un seul.

2. *Caractérisation du cas où ces affinités commutent.*

a) Déterminer toutes les droites stables par une affinité orthogonale a.

b) Prouver que si deux transformations affines f_1 et f_2 commutent (c'est à dire que $f_2 f_1 = f_1 f_2$, l'ensemble des points fixes de f_1 est stable par f_2.

c) Caractériser géométriquement les couples (a_1, a_2) d'affinités orthogonales tels que a_1 et a_2 commutent.

3. *Effet d'une conjugaison sur une affinité.*

Soit a une affinité orthogonale d'axe D et de rapport λ.

Préciser la nature de la transformation $a' = gag^{-1}$ où g est une similitude (on pourra d'abord déterminer les droites stables par a').

Que se passe t'il si on suppose seulement que g est une transformation affine ?

Partie III. Décomposition d'un endomorphisme en somme de similitudes.

L'objectif de cette partie est d'étudier la décomposition d'un endomorphisme en somme d'une similitude directe et d'une similitude indirecte et, à partir de là, de caractériser les endomorphismes symétriques, c'est à dire les endomorphismes B tels que, pour tout couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs $B(\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.B(\vec{v})$. On note $\mathscr{L}(\Pi)$ l'algèbre des endomorphismes de Π.

1. *Opération du quart de tour direct par conjugaison.*

Á tout endomorphisme F on associe l'endomorphisme $\sigma(F) = RFR^{-1}$.

a) Vérifier que $\sigma \circ \sigma$ est l'identité de $\mathscr{L}(\Pi)$

b) Soit $\mathscr{S}_+$ (resp $\mathscr{S}_-$) le sous espace vectoriel de $\mathscr{L}(\Pi)$ constitué des endomorphismes G tels que $\sigma(G) = G$ (resp $\sigma(G) = -G$).
Prouver que $\mathscr{L}(\Pi)$ est somme directe des sous espaces vectoriels $\mathscr{S}_+$ et $\mathscr{S}_-$, les projecteurs associés étant $F \mapsto \dfrac{F + RFR^{-1}}{2}$ et $F \mapsto \dfrac{F - RFR^{-1}}{2}$.

c) Vérifier que les éléments non nuls de $\mathscr{S}_+$ resp $\mathscr{S}_-$ sont des similitudes directes (resp indirectes).

2. *Ecriture canonique d'un endomorphisme.*

a) Établir que tout endomorphisme F peut s'écrire sous la forme (dite canonique)
$$F = \alpha I + \beta R + \gamma S$$
où α, β, γ sont des nombres réels, et où S est une réflexion. Étudier l'unicité d'une telle écriture, en distinguant les cas suivant que F appartient à S_+ ou non. On observera que $\gamma S = (-\gamma)(-S)$

b) Dans ces conditions, expliciter la matrice associée à F dans une base orthonormale directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ telle que $S(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i}$. Calculer le déterminant et le polynôme caractéristique de F en fonction de α, β, γ.

c) Caractériser les triplets (α, β, γ) tels que F soit symétrique ; préciser alors les valeurs propres et les sous espaces propres de F.

Partie IV. Décomposition des transformations symétriques ayant un point fixe.
Les transformations considérées dans cette partie ont un point fixe donné O. Pour tout nombre réel λ non nul, l'homothétie de centre O et de rapport λ est notée h_λ.

1. *Caractérisation des affinités orthogonales.*

a) Prouver que toute affinité orthogonale A est un endomorphisme symétrique.

b) Etant donné une réflexion S, caractériser les couples (α, β) de nombres réels tels que $B = \alpha I + \gamma S$ soit une affinité orthogonale.

2. *Décomposition en produit d'une affinité orthogonale et d'une homothétie*
Soit b une transformation affine fixant O et B l'automorphisme associé. Prouver qu'il est équivalent de dire :

a) La transformation b est symétrique, autrement dit B est symétrique ; La transformation b peut s'écrire sous la forme $b = h_\lambda a$, où $\lambda \neq 0$ et où a est une affinité orthogonale dont l'axe D passe par O.
Montrer que dans ces conditions λ est valeur propre de B, et étudier l'unicité d'une telle décomposition, en distinguant deux cas selon que b est une homothétie ou non.

3. *Décomposition en produit de deux affinités orthogonales.*
Prouver qu'il est équivalent de dire :

a) La transformation b est symétrique ;

b) La transformation b peut s'écrire sous la forme $b = a_2 a_1$, où a_1 et a_2 sont des affinités orthogonales dont les axes D_1 et D_2 sont orthogonaux et passent par O.

Préciser alors les droites D_1 et D_2 ainsi que les rapports λ_1 et λ_2 de ces affinités.

Partie V. Décomposition des transformations ayant un point fixe

Dans les cinq premières questions de cette partie, on étudie une transformation affine f ayant un point fixe O en exploitant l'écriture canonique de F.

1. *Décomposition en produit d'une réflexion et d'une transformation symétrique*
   a) Déterminer toutes les réflexions S_1 telles que FS_1 soit symérique. A cet effet on pourra utiliser l'écriture canonique de F, et on distinguera deux cas selon que F est une similitude ou non.
   b) En déduire que f peut s'écrire sous la forme $f = bs$ où b est symétrique et fixe O, et s est une réflexion dont l'axe passe par O. Etudier l'unicité d'une telle décomposition.

2. *Décomposition en produit d'une similitude indirecte et d'une affinité orthogonale*
   Établir que f peut s'écrire sous la forme $f = ag$, où a est une affinité orthogonale dont l'axe passe par O , et g une similitude indirecte de centre O. Etudier l'unicité d'une telle décomposition lorsque f n'est pas une similitude ; examiner aussi les cas où f est une similitude indirecte, ou directe.

3. *Interprétation géométrique de cette dernière décomposition*
   Dans cette question, on suppose que f n'est pas une similitude, et on fixe une base orthonormée $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$.
   a) Prouver que la recherche d'un couple (a, g) tel que $f = ag$ équivaut à celle d'une affinité orthogonale $A = \alpha' I + \gamma' S'$, et d'une base carrée directe $(\vec{i}, \vec{j})$ telle que $A(\vec{i}) = \vec{u}$ et $A(\vec{j}) = -\vec{v}$, où $\vec{v} = F(\vec{e_2})$.
   b) En appliquant à A les résultats de III-1), montrer que $\vec{i}$ est colinéaire à $\vec{u} + R(\vec{v})$ et $S'(\vec{i})$ colinéaire à $\vec{u} - R(\vec{v})$.
   c) Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les vecteurs indiqués dans la question I-4), déterminer tous les triplets $A, \vec{i}, \vec{j})$ satisfaisant aux conditions précédentes ; pour chacun d'eux, reprendre la figure du I-4), expliciter $(\vec{i}, \vec{j})$ ainsi que l'axe de A, et donner le rapport de A.

4. *Décomposition en produit d'affinités orthogonales.*
   Montrer que f peut s'écrire sous la forme $f = a_2 a_1 s$ où a_1, a_2 sont des affinités orthogonales, d'axes orthogonaux passant par O, et s une réflexion d'axe passant par O.

5. *Existence d'une décomposition en produit de deux affinités orthogonales.*
   L'objectif est de caractériser les automorphismes F qui peuvent s'écrire comme produit de deux affinités orthogonales. A cet effet, on écrit F sous forme canonique $\alpha' I + \beta' R + \gamma S$. Le cas des endomorphismes symétriques étant déjà traité, on suppose que $\beta \neq 0$.
   a) En écrivant les affinités sous la forme canonique, étudier le cas où F est une similitude directe, c'est à dire où $\gamma = 0$. Désormais on écarte ce cas.
   b) Soit R_θ une rotation. Prouver que l'existence d'une décomposition de F équivaut celle d'une décomposition de $R_\theta F R_\theta^{-1}$.
   c) Calculer $R_\theta F R_\theta^{-1}$. En déduire que $F' = \alpha' I + \beta' R + \gamma' S$ est conjugué de F par rotation si, et seulement si, $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$ et $\gamma' = \pm\gamma$, c'est à dire si $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$ et $\det F' = \det F$. On posera désormais $\delta = \det F$.
   d) Vu ces résultats, on est ramené au problème suivant : existe-t-il des affinités orthogonales A_1, A_2 telles que l'automorphisme $F' = A_2 A_1$ satisfasse aux conditions énoncées au c) ? Soit alors λ_1 et λ_2 les rapports de A_1 et A_2, D_1 et D_2 leurs axes et ϕ une mesure de l'angle (D_1, D_2). En écrivant A_1 et A_2 sous forme canonique, montrer que tout revient à déterminer un triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \phi)$ de nombres réels tels que :

$$\begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 = \delta \\ (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\sin^2\phi = \delta - 2\alpha + 1 \\ (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\sin\phi\cos\phi = 2\beta \end{cases}$$

e) On pose $\tau = \delta - 2\alpha + 1$. Montrer que $\tau = 0$ si et seulement si 1 est valeur propre de F, et que dans ce cas la décomposition est impossible.

f) On écarte désormais ce cas, et on prend ϕ tel que $\tan\phi = \dfrac{\tau}{2\beta}$. Calculer $\lambda_1 + \lambda_2$ en fonction de β, γ et τ, et en déduire la condition d'existence d'un couple (λ_1, λ_2) de nombres réels satisfaisant aux conditions de d)

6. Étudier enfin les décompositions d'une transformation affine quelconque f. On établira d'abord que f admet un point fixe et un seul si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de F, c'est à dire $\tau \neq 0$.

CAPES externe 1985 composition 2

CAPES 85

CORRIGÉ

PREMIERE PARTIE

1.1. Soit $\Gamma = (O,J,K,L)$ un parallélogramme de P et soit $f(O)$, $f(J)$, $f(K)$, $f(L)$ les images respectives de O,J,K,L par f.
On a alors $\overrightarrow{f(O)f(K)} = F(\overrightarrow{OK}) = F(\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{OL}) = F(\overrightarrow{OJ})+F(\overrightarrow{OL}) = \overrightarrow{f(O)f(J)}+\overrightarrow{f(O)f(L)}$
donc $(f(O),f(J),f(K),f(L))$ est un parallélogramme. Soit $\Gamma = (O,J,K,L)$ et $\Gamma' = (O',J',K',L')$ deux parallélogrammes. Soit la transformation affine f telle que : $f(O) = O'$, $F(\overrightarrow{OJ}) = \overrightarrow{O'J'}$, $F(\overrightarrow{OL}) = \overrightarrow{O'L'}$. L'image de K est bien K' par f :

$$\overrightarrow{f(O)f(K)} = F(\overrightarrow{OK}) = F(\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{OL}) = F(\overrightarrow{OJ}) + F(\overrightarrow{OL}) = \overrightarrow{O'J'} + \overrightarrow{O'L'} = \overrightarrow{O'K'} = \overrightarrow{f(O)K'}.$$

L'existence de f est donc prouvée. L'unicité de f provient du fait que l'image d'un point (ici O) et la connaissance de F déterminent f de façon unique.

1.2. Montrons $a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow d \Rightarrow a$

* a) $\Rightarrow$ b) Soit (O,J,K,L) un carré direct. Son image par g est un parallélogramme qui vérifie :

$$\|G(\overrightarrow{OJ})\| = \|\rho U(\overrightarrow{OJ})\| = \rho\|\overrightarrow{OJ}\| \text{ (car } U \text{ isométrie)} = \rho\|\overrightarrow{OL}\| = \|G(\overrightarrow{OL})\| =$$
$$\rho\|\overrightarrow{LK}\| = \|\rho U(\overrightarrow{LK})\| = \|G(\overrightarrow{LK})\| = \rho\|\overrightarrow{KJ}\| = \|G(\overrightarrow{KJ})\| .$$ C'est donc un carré.

Pour montrer que ce carré est direct, il suffit de vérifier que la base $(G(OJ),G(OL))$ est directe :

$$\det_{(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OL})} (G(\overrightarrow{OJ}),G(\overrightarrow{OL})) = \det G \det_{(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OL})}(\overrightarrow{OL},\overrightarrow{OL}) > 0$$ car g est une similitude directe.

* b) $\Rightarrow$ c) Soit (O,J,K,L) le carré direct dont l'image par g est un carré direct. On sait donc que :

$$\overrightarrow{OL} = R(\overrightarrow{OJ}) \Rightarrow G(\overrightarrow{OL}) = R(G(\overrightarrow{OJ})) \Rightarrow G \circ R(\overrightarrow{OJ}) = R \circ G(\overrightarrow{OJ})$$
$$R \circ G(\overrightarrow{OL}) = R \circ R(G(\overrightarrow{OJ})) = - G(\overrightarrow{OJ}) \quad \text{car } R^2 = -Id$$
$$R \circ G(\overrightarrow{OL}) = G(-\overrightarrow{OJ}) = G(R(\overrightarrow{OL})) \quad \text{car } R(\overrightarrow{OL}) = R^2(\overrightarrow{OJ}) = -\overrightarrow{OJ}$$

donc on a : $R \circ G(\overrightarrow{OL}) = G \circ R(\overrightarrow{OL})$, $G \circ R(\overrightarrow{OJ}) = R \circ G(\overrightarrow{OJ})$
or $\{\overrightarrow{OL},\overrightarrow{OJ}\}$ est une base de Π. On a donc : $R \circ G = G \circ R$

* c) $\Rightarrow$ d) : $G \circ R = R \circ G$. Soit (O,J,K,L) un carré direct quelconque. $(g(O),g(J),g(k),g(L))$ est un parallélogramme (I.1). Montrons que c'est un

carré :

$$G(\overrightarrow{OL}) = G(R(\overrightarrow{OJ})) = R \circ G(\overrightarrow{OJ}) \quad \text{car} \quad G \circ R = R \circ G$$

donc le parallélogramme $(g(0),g(J),g(K),g(L))$ est direct.

$G(\overrightarrow{OL}) = R \circ G(\overrightarrow{OJ}) \Rightarrow$ les droites $g(0)g(L)$ et $g(0)g(J)$ sont orthogonales. Le parallélogramme obtenu est donc un rectangle.

De même $G(\overrightarrow{OL}) = R \circ G(\overrightarrow{OJ}) \Rightarrow \|G(\overrightarrow{OL})\| = \|G(\overrightarrow{OJ})\|$ car R est une isométrie. Le rectange $(0,J,K,L)$ est un carré.

* d) ⇒ a) Il suffit de considérer un carré direct de $P,(0,J,K,L)$. Son image par g est un carré direct donc G vérifie :

$$\|G(\overrightarrow{OJ})\| = \|G(\overrightarrow{OL})\| = \rho\|\overrightarrow{OJ}\| \ (\rho > 0) \ , \ G(\overrightarrow{OJ}) \cdot G(\overrightarrow{OL}) = 0$$

$$R(G(\overrightarrow{OJ})) = G(\overrightarrow{OL}) \Rightarrow \det_{(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OL})}(G(\overrightarrow{OJ}),G(\overrightarrow{OL})) > 0 .$$

G est donc la composée de l'homothétie de rapport $\rho > 0$ et d'une isométrie positive. g est donc une similitude directe.

1.3. On peut caractériser de même les similitudes indirectes.

Soit g une transformation affine et G l'automorphisme associé.

Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

a) la transformation g est une similitude indirecte de P.

b) il existe un carré direct dont l'image par g est un carré indirect.

c) les automorphismes R et G anticommutent : $R \circ G = -G \circ R$

d) l'image par g de tout carré direct est un carré indirect.

La démonstration de ces équivalences se fait de façon identique aux équivalences de la question précédente.

1.4. Soit $(0,\vec{u},\vec{v})$ un repère non carré. $(0,\vec{u}+R(\vec{v}),\vec{v}-R(\vec{u}))$ est un repère carré indirect car :

$$R(\vec{u}+R(\vec{v})) = R(\vec{u}) + R^2(\vec{v}) = -\vec{v} + R(\vec{u}) = -(\vec{v} - R(\vec{u}))$$

ce qui implique : $\|\vec{u}+R(\vec{v})\| = \|\vec{v}-R(\vec{u})\| \neq 0$ et $\vec{u}+R(\vec{v}) \perp v - R(\vec{u})$

De même : $(0,\vec{u}-R(\vec{v}),\vec{v}+R(\vec{u}))$ est un repère carré direct car :

$$R(\vec{u}-R(\vec{v})) = R(\vec{u}) - R^2(\vec{v}) = \vec{v}+R(\vec{u}).$$

On passe du repère $(0,\vec{u}+R(\vec{v}),\vec{v}-R(\vec{u}))$ au repère $(0,\vec{u}-R(\vec{v}),\vec{v}+R(\vec{u}))$ par une similitude indirecte : en effet soit la similitude indirecte S qui envoie le carré direct $(0,\vec{u}-R(\vec{v}),\vec{v}+R(\vec{u}))$ sur le carré indirect $(0,\vec{u}+R(\vec{v}),$ $\vec{v}-R(\vec{u}))$ (c'est une similitude indirecte d'après I.3). Et S^{-1} est la similitude indirecte demandée. $S^{-1}(\vec{u}+R(\vec{v})) = \vec{u} - R(\vec{v})$, donc : $\rho = \dfrac{\|\vec{u}-R(\vec{v})\|}{\|\vec{u}+R(\vec{v})\|}$

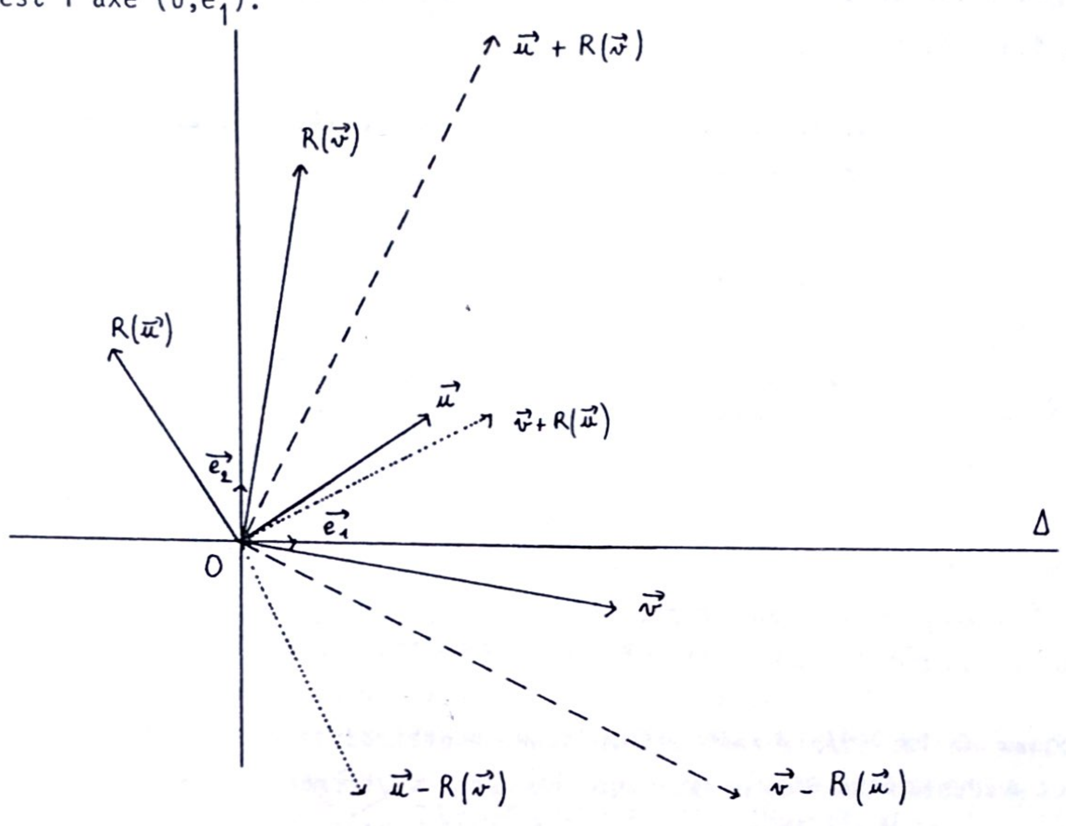
L'axe de la réflexion associée U passe par 0 et est de direction

$\frac{1}{2}(\vec{u}+R(\vec{v}) + \frac{1}{\rho}(\vec{u}-R(\vec{v}))$ (en effet $\vec{u}+R(\vec{v})$ est transformé par U en $\frac{1}{\rho}(\vec{u}-R(\vec{v})))$.

Dans l'exemple demandé :

$$\rho = \frac{\|3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_1 - 6\vec{e}_2\|}{\|3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_1 + 6\vec{e}_2\|} = \frac{\sqrt{4+16}}{\sqrt{16+64}} = \frac{1}{2}$$

Δ est l'axe $(0,\vec{e}_1)$.



DEUXIEME PARTIE

2.1. a) D_1 et D_2 sont parallèles.
Prenons un repère orthonormal direct $(0,e_1,e_2)$ tel que : $D_1 = (0,e_1)$ et D_2 est alors la droite $y = c$.
L'image d'un point M de coordonnées $\binom{x}{y}$ devient :

$a_1(M)(x,\lambda_1 y) \quad a_2(M)(x,c+\lambda_2(y-c))$

d'où $f(M)(x,c+\lambda_2(\lambda_1 y-c) = \lambda_2\lambda_1 y-c(\lambda_2-1))$

f est si $\lambda_1\lambda_2 = 1$ la translation de vecteur $(0,-c(\lambda_2-1))$. Si $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$ f est l'affinité orthogonale d'axe la droite D d'équation

$y = -c\dfrac{1-\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2-1}$, et de rapport $\lambda_1\lambda_2$.

(en effet $\quad \lambda_2\lambda_1 y - c(\lambda_2-1) = \lambda_2\lambda_1(y + c\dfrac{1-\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2-1}) - c\dfrac{\lambda_2\lambda_1(1-\lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2-1}$;

$$- c(\lambda_2 - 1) = \lambda_2\lambda_1(y + c\,\frac{1-\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2 - 1}) - c\,\frac{1-\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2 - 1}\,) .$$

En conclusion : la composée de deux affinité orthogonales d'axes parallèles est une translation si le produit des rapports est 1, une affinité orthogonale dans l'autre cas.

2.1. b) Soient a_1 et a_2 deux affinité orthogonales d'axes respectifs D_1 et D_2 et de rapports respectifs λ_1 et λ_2.

$D_1 \cap D_2 = A \Rightarrow a_2a_1(A) = A$ donc $f = a_2a_1$ admet un point fixe. Soit M un point tel que : $f(M) = M$. Alors

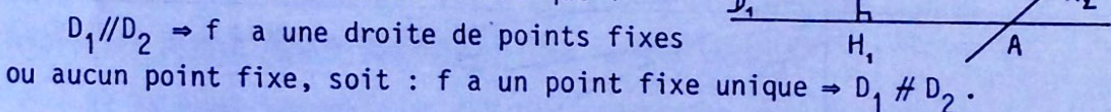
$a_1(M) = a_2^{-1}(M) \Rightarrow M\,a_1(M) \perp D_1,\ M\,a_2^{-1}(M) \perp D_2$

$\Rightarrow M \in D_1 \cap D_2$ ou $D_1 /\!/ D_2$. Or $D_1 \# D_2$ donc

$M = D_1 \cap D_2$.

Réciproquement : nous avons montré que :

$D_1 /\!/ D_2 \Rightarrow f$ a une droite de points fixes



ou aucun point fixe, soit : f a un point fixe unique $\Rightarrow D_1 \# D_2$.

2.2. a) Soit a une affinité orthogonale d'axe D et de rapport λ et Δ une droite stable par a. Puisque λ est différent de 1, on a :

$$\begin{cases} M \neq a(M) \\ M \in \Delta \text{ et } a(M) \in \Delta \Rightarrow M\,a(M) \perp D \Rightarrow \Delta \perp D \end{cases}$$

$$M \in \Delta \text{ et } M = a(M) \Rightarrow M \in D \cap \Delta$$

Donc pour une droite Δ stable par une affinité orthogonale a, on a deux possibilités :

$$\begin{cases} \Delta = D \text{ axe de } a \text{ et } \forall M \in \Delta\ \ a(M) = M \\ \Delta \perp D \text{ et } \forall M \in \Delta - \{D \cap \Delta\}\ \ a(M) \neq M. \end{cases}$$

Ce sont les deux types de droites stables par une affinité orthogonale.

2.2. b) $f_1f_2 = f_2f_1$ et soit M un point fixe de f_1 ;
alors $f_1f_2(M) = f_2f_1(M) = f_2(M)$, $f_2(M)$ est un point fixe de f_1.

2.2. c) Soient a_1 et a_2 deux affinités orthogonales d'axes respectifs D_1 et D_2 et de rapports respectifs λ_1 et λ_2.

$a_1a_2 = a_2a_1 \Rightarrow a_1(D_2) = a_2(a_1(D_2))$ donc la droite $a_1(D_2)$ est stable par a_2 ; c'est donc D_2 ou une droite orthogonale à D_2. Soyons plus précis. Soit M un point de D_2. On a alors :

$$a_2(M) = M \Rightarrow a_1(a_2(M)) = a_1(M) = a_2(a_1(M))$$

donc $a_1(M)$ est un point fixe de a_2 et $a_1(M)$ appartient à D_2. On a donc montré que :

$a_1(D_2) = D_2 \Rightarrow D_2 = D_1$ ou $D_1 \perp D_2$

$D_2 = D_1 \Rightarrow a_1a_2 = a_2a_1$ (évident)

$D_1 \perp D_2 \Rightarrow$ pour tout point M

on a : $\lambda_2 \overrightarrow{H_2' a_1(M)} = \overrightarrow{H_2' a_2a_1(M)}$,

$\lambda_2 \overrightarrow{H_2M} = \overrightarrow{H_2a_2(M)}$ donc $Ma_1(M) // a_2(M)a_2a_1(M)$

donc $\overrightarrow{H_1' a_2a_1(M)} = \lambda_1 \overrightarrow{H_1' a_2(M)}$ et $a_2a_1(M) = a_1a_2(M)$.

$a_1a_2 = a_2a_1 \Leftrightarrow a_1$ et a_2 ont même axe ou des axes orthogonaux.

2.3. Soit Δ une droite stable par a'.

$a'(\Delta) = \Delta \Rightarrow g a g^{-1}(\Delta) = \Delta \Rightarrow a(g^{-1}(\Delta)) = g^{-1}(\Delta) \Rightarrow g^{-1}(\Delta)$ est une droite stable par a, c'est donc D ou une droite perpendiculaire à D.

$a' = g a g^{-1}$ est une affinité car l'application linéaire associée à a' a une matrice semblable à celle de l'application linéaire associée à a et est donc diagonalisable avec pour valeurs propres 1 et λ , si λ est le rapport de l'affinité a.

. Les seules droites stables par a' sont orthogonales car g^{-1} est une similitude, donc conserve l'orthogonalité ($g^{-1}(\Delta) = D \Rightarrow \Delta = g(D)$,

$g^{-1}(\Delta) \perp D \Rightarrow \Delta \perp g(D)$).

a' est donc la similitude orthogonale d'axe g(D) et de rapport λ.

Si g n'est pas une similitude mais une application affine bijective, g^{-1} a g est encore une affinité d'axe g(D) , de rapport λ et de direction g(D'), si D' est une droite perpendiculaire à D .

TROISIEME PARTIE

3.1. a) $\forall F$, $\sigma \circ \sigma(F) = \sigma(\sigma(F)) = \sigma(RFR^{-1}) = RRFR^{-1}R^{-1}$

or $R^2 = -\,Id$ d'où $\sigma \circ \sigma(F) = F$. $\sigma \circ \sigma = Id_{\mathcal{L}(\Pi)}$

3.1. b) $\forall F \in \mathcal{L}(\Pi)$ $F = \dfrac{F + \sigma(F)}{2} + \dfrac{F - \sigma(F)}{2}$

et remarquons que : $\sigma\left(\dfrac{F + \sigma(F)}{2}\right) = \dfrac{\sigma(F) + \sigma^2(F)}{2} = \dfrac{F + \sigma(F)}{2}$

$\sigma\left(\dfrac{F - \sigma(F)}{2}\right) = \dfrac{\sigma(F) - \sigma^2(F)}{2} = -\dfrac{F - \sigma(F)}{2}$

donc $\mathcal{L}(\Pi) = \mathcal{S}_+ \oplus \mathcal{S}_-$

$\mathcal{S}_+ \cap \mathcal{S}_- = \{F \in \mathcal{L}(\Pi),\ \sigma(F) = F$ et $\sigma(F) = -F\} = \{0\}$ donc $\mathcal{L}(\Pi) = \mathcal{S}_+ \oplus \mathcal{S}_-$,

les projecteurs associés étant :

$F \longrightarrow \frac{1}{2}(F + \sigma(F)) = \frac{1}{2}(F + RFR^{-1}) \in {}_{+}$ $F \longrightarrow \frac{1}{2}(F - \sigma(F)) = \frac{1}{2}(F - RFR^{-1}) \in$

3.1. c) Soit F un élément non nul de $\mathcal{S}_+$. Il vérifie $\sigma(F) = F$ ou $RFR^{-1} = F$ ou $RF = FR$ et d'après I.2, c'est une similitude directe.

De même un élément non nul de $\mathcal{S}_-$ est une similitude indirecte.

3.2. a) Soit F un endomorphisme. D'après la question précédente on a $F = \frac{1}{2}(F + RFR^{-1}) + \frac{1}{2}(F - RFR^{-1})$ avec $\frac{1}{2}(F + RFR^{-1}) \in \mathcal{S}^+$, $\frac{1}{2}(F - RFR^{-1}) \in \mathcal{S}^-$, $\frac{1}{2}(F - RFR^{-1})$ élément de $\mathcal{S}^-$ est une similitude indirecte vectorielle, c'est donc un élément du type γS où γ est un réel et S est une réflexion.

$\frac{1}{2}(F + RFR^{-1})$ est une similitude directe, c'est donc la composée d'une homothétie et d'une rotation vectorielle. Or une rotation vectorielle s'écrit $\cos\theta\, I + \sin\theta\, R$. D'où :

$$\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{1}{2}(F + RFR^{-1}) = \alpha I + \beta R .$$

Unicité d'une telle écriture :

$$F = \alpha I + \beta R + \gamma S = \alpha' I + \beta' R + \gamma' S' \quad \text{avec} \quad (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 ,$$

$(\alpha',\beta',\gamma') \in \mathbb{R}^3$, S et S' réflexions. Alors par l'unicité de la décomposition d'un élément de $\mathcal{L}(\Pi)$ en somme d'un élément de $\mathcal{S}_+$ et d'un élément de $\mathcal{S}$ (question précédente) on a : $\alpha I + \beta R = \alpha' I + \beta' R$ $\gamma S = \gamma' S'$.

Etudions : $\gamma S = \gamma' S'$. Remarquons que : $\gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma' = 0$

$\gamma \neq 0$ et $\gamma' \neq 0 \Rightarrow \frac{\gamma}{\gamma'} Id = SS'$ or SS' est une rotation vectorielle comme composée de deux réflexions. On a donc : $\frac{\gamma}{\gamma'} = \pm 1$ d'où : $\gamma = \gamma' \Rightarrow S = S'$, $\gamma = \gamma' \Rightarrow S = -S'$ et il n'y a pas unicité de la décomposition.

Etudions : $\alpha I + \beta R = \alpha' I + \beta' R$

$(\alpha - \alpha')Id + (\beta - \beta')R = 0$. Or I et R sont deux éléments de $\mathcal{L}(\Pi)$ indépendants d'où : $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$

Conclusion : Pour un élément de $\mathcal{S}_+$ la décomposition est unique. Pour un élément de $\mathcal{L}(\Pi)$ n'appartenant pas à $\mathcal{S}_+$ la décomposition n'est pas unique :

$$\alpha I + \beta R + \gamma S = \alpha I + \beta R + (-\gamma)(-S)$$

3.2. b) Soit une base orthonormale $(\vec{i},\vec{j})$ telle que $S(\vec{i}) = \vec{i}$.

La matrice de S dans cette base est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, celle de R est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, celle de F est donc :

$$\begin{pmatrix} \alpha + \gamma & -\beta \\ \beta & \alpha - \gamma \end{pmatrix}$$

Le déterminant de F est donc $\alpha^2 - \gamma^2 + \beta^2$; la trace de F est 2α (ces deux notions sont des invariants de F). Le polynôme caractéristique de F est donc :

$$X^2 - 2\alpha X + \alpha^2 - \gamma^2 + \beta^2 .$$

3.2. c) F symétrique si et seulement si la matrice de F dans n'importe quelle base orthonormale de Π est symétrique.

$$F \text{ symétrique} \Leftrightarrow \beta = 0 \Leftrightarrow (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R} .$$

Les valeurs propres de F sont alors : $\alpha + \gamma$ et $\alpha - \gamma$ et les sous-espaces propres de F sont les sous-espaces propres de S défini en 3.2.a) (en effet la matrice de F dans la base orthonormale directe $(\vec{i},\vec{j})$ telle que $S(\vec{i}) = \vec{i}$ est diagonale).

QUATRIEME PARTIE

4.1. a) Soit A l'affinité orthogonale d'axe Δ et de rapport λ.

Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base orthogonale directe avec $\vec{i} \in \Delta$. La matrice de A dans cette base est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

A est un endomorphisme symétrique :

$$\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} \qquad \vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$$
$$A(\vec{u}) \cdot \vec{v} = (x\,\vec{i} + \lambda y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = xx' + \lambda yy'$$
$$\vec{u} \cdot A(\vec{v}) = (x\,\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + \lambda\, y'\vec{j}) = xx' + \lambda yy' = A(\vec{u}) \cdot \vec{v}$$

4.1. b) $B = \alpha\, I + \gamma\, S$ est une affinité orthogonale si et seulement si B est diagonalisable dans une base orthonormale et a 1 pour valeur propre. Nous avons vu que $\alpha I + \gamma S$ est diagonalisable dans une base orthonormale (3.2.c) et que ses valeurs propres sont :

$\alpha + \gamma$ et $\alpha - \gamma$

$$B = \alpha I + \gamma S \text{ affinité orthogonale} \iff \begin{cases} \alpha^2 - \gamma^2 \neq 0 \\ (\alpha + \gamma - 1)(\alpha - \gamma - 1) = 0 \end{cases}$$
$$\iff (\alpha - 1)^2 - \gamma^2 = 0 \text{ et } \alpha^2 - \gamma^2 \neq 0$$

Il faut alors supposer que l'autre valeur propre est non nulle car c'est le rapport non nul de l'affinité orthogonale.

4.2. Soit une transformation affine b fixant 0 et s'écrivant sous la forme $b = h_\lambda a$ où $\lambda \neq 0$ et a est une affinité orthogonale dont l'axe D passe par 0. Alors b est symétrique car :

$$\forall(\vec{u},\vec{v}) \in \Pi^2 \quad B(\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda\, A(\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda\, \vec{u} \cdot A(\vec{v}) = u \cdot B(\vec{v})$$

car a est symétrique (4.1.a)).

Réciproquement : soit une transformation affine b affine b fixant 0 telle que B l'automorphisme associé soit symétrique.

Appliquons les résultats de III.3. : il existe S réflexion et α et γ réels tels que : $B = \alpha\, I + \gamma\, S$

(B est symétrique donc $\beta = 0$). De plus B est un automorphisme de Π donc $(\alpha - \gamma)(\alpha + \gamma) = \det B \neq 0$.

Posons : $\alpha' = \dfrac{\alpha}{\alpha + \gamma}$, $\gamma' = \dfrac{\gamma}{\alpha + \gamma}$.

Alors : $(\alpha' - \gamma')(\alpha' + \gamma') = \dfrac{1}{(\alpha + \gamma)^2}(\alpha^2 - \gamma^2) \neq 0$ et $\alpha' + \gamma' = 1$

et $B = (\alpha + \gamma)(\alpha' I + \gamma' S) = (\alpha + \gamma)A$ où A est une affinité orthogonale (4.1.).

Comme b laisse le point 0 fixe, considérons l'affinité orthogonale a laissant le point 0 fixe et ayant pour application linéaire associée A . On a

$$b = h_{\alpha+\gamma}a$$

Nous avons donc montré l'équivalence des propositions a) et b). Le réel λ trouvé est bien une valeur propre de B .

Etudions l'unicité d'une telle décomposition :

$h_\lambda a = h_{\lambda'}a'$ a et a' affinités orthogonales dont les axes passent par 0 . Alors $h_{\lambda'-h_\lambda} = a'a^{-1}$. Supposons que $h_{\lambda'-h_\lambda}$ n'est pas la transformation identique c'est-à-dire que $\lambda \neq \lambda'$, $a \neq a'$. $h_{\lambda'-h_\lambda}$ n'a qu'un point fixe et les axes de a' et de a^{-1} sont donc sécants (a^{-1} est aussi una ffinité orthogonale, son axe est celui de a , son rapport l'inverse de celui de a)(résultat de 2.1.b)).

Les deux axes se coupent donc au point fixe de l'homothétie I.

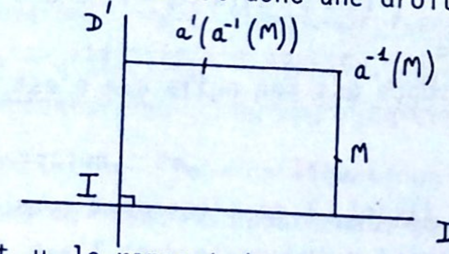
Soient D et D' les axes de a' et de a . Soit M un point de D distinct de $D \cap D'$.

$$a'a^{-1}(M) = a'(M) = h_{\lambda'-h}(M)$$

donc I,M,a'(M) sont alignés. Ceci doit être vrai pour tout point M de D donc :

$$\forall M \in D \quad a'(M) \in D$$

$\Rightarrow$ la droite D est globalement invariante par a' ; ce n'est pas D' car $D \neq D'$, c'est donc une droite orthogonale à D'(2.2.a)).



Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base orthonormée directe telle que D soit de direction $\mathbb{R}i$, D' de direction $\mathbb{R}\vec{j}$.

Soit μ le rapport de a, μ' le rapport de a' . La matrice $A'A^{-1}$ dans la base (i,j) est $\begin{pmatrix} \mu' & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix}$. C'est celle d'une homothétie de rapport $\lambda'^{-1}\lambda$ si et seulement si $\lambda'^{-1}\lambda = \mu' = \mu^{-1}$.

En conclusion : $h_\lambda a = h_{\lambda'}a' \iff \{\lambda = \lambda'$ et $a = a'\}$ ou {a et a' ont des axes orthogonaux et des rapports inverses l'un de l'autre}.

Donc si b est une homothétie, b s'écrit de manière unique $b = h_\lambda$

4.3. Soit une transformation b telle que : $b = a_2a_1$ où a_1 et a_2 sont des affinités orthogonales dont les axes sont orthogonaux et passent par 0 .

Pour montrer que b est symétrique il suffit de montrer que : $\forall(\vec{u},\vec{v}) \in \Pi^2$ $B(\vec{u}).\vec{v} = \vec{u} . B(\vec{v})$. Or $B(\vec{u}).\vec{v} = A_2A_1(\vec{u}).\vec{v} = A_2(A_1(\vec{u})).\vec{v} = A_1(\vec{u}).A_2(\vec{v})$ car a_2 est symétrique (4.1.a)).

$A_1(\vec{u}) . A_2(\vec{v}) = \vec{u} . A_1(A_2(\vec{v}))$ car a_1 est symétrique donc $B(\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.B(\vec{v})$.

Réciproquement : soit b une transformation affine ayant 0 pour point fixe. b est supposée symétrique donc par 4.2.b) :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^* \quad \exists a \text{ aff. orth. d'axe } D\,,\ 0 \in D \quad b = h_\lambda a\,.$$

Or nous avons vu à la fin de la question précédente que si D' est la perpendiculaire à D contenant 0 .

$$h_\lambda = a'_1\, a'_2$$

où a'_1 affinité orthogonale de rapport λ , d'axe D' et a'_2 affinité orthogonale de rapport λ^{-1} d'axe D . D'où : $b = a'_1 a'_2 a = a'_1(a'_2 a)$

et $a'_2 a$ est l'affinité orthogonale de rapport $\lambda^{-1}\mu$ d'axe D , μ étant le rapport de l'affinité orthogonale a.

Remarquons alors que D et D' sont globalement invariantes par b et que leurs directions correspondent donc aux sous-espaces propres de B déterminés en 3.2.c). De plus les rapports de a_1 et de a_2 sont les valeurs propres de B.

5.1. a) Soit F un endomorphisme de Π . Par 3.2.a) il existe (α,β,γ) des réels et S une réflexion tels que : $F = \alpha I + \beta R + \gamma S$.

Soit S_1 une réflexion : $FS_1 = \alpha S_1 + \gamma SS_1 + \beta RS_1$.

Remarquons que : $(\gamma SS_1)R = \gamma S(S_1R) = \gamma S(-RS_1) = -\gamma(SR)S_1 = -\gamma(-RS)S_1$ car S et S_1 sont des automorphismes associés à des similitudes indirectes (I.3) d'où $(\gamma SS_1)R = R(\gamma SS_1)$

alors que $(\alpha S_1 + \beta RS_1)R = \alpha S_1R + \beta RS_1R = -\alpha RS_1 - \beta R^2S_1 = -R(\alpha S_1 + \beta RS_1)$

et dans la décomposition de 3.1.on a :

$$\alpha S_1 + \beta RS_1 \in \mathcal{S}_-\ ,\quad \gamma SS_1 \in \mathcal{S}_+\ .$$

FS_1 est symétrique si et seulement si γSS_1 est proportionnel à l'identité (3.2.c)) donc si et seulement si lorsque $\gamma \neq 0$, $SS_1 = \varepsilon\, \mathrm{Id}$, $\varepsilon \in \{+1, -1\}$, car SS_1 est une rotation vectorielle comme produit de deux réflexions, donc $S_1 = \varepsilon S$.

En conclusion : Si F est une similitude directe (i.e. $\gamma = 0$ dans la décomposition de 4.2.) quelle que soit la réflexion S_1, FS_1 est symétrique.

- Si $F = \alpha I + \beta R + \gamma S$ avec $\gamma \neq 0$ alors FS et F(- S) sont les seules réflexions S_1 telles que FS_1 soit symétrique.

5.1. b) Nous avons toujours trouvé une réflexion S_1 telle que FS_1 soit symétrique. Soit s la réflexion fixant 0 et d'automorphisme associé S_1. Alors f s est une transformation affine symétrique b et f = b s, s réflexion dont l'axe passe par 0 .

Unicité d'une telle décomposition :

- Si f est une similitude directe, toute réflexion dont l'axe passe par 0 conduit à une telle décomposition.
- Si f n'est pas une similitude directe, on a :

$f = b\,s = (-b)(-s)$, car pour S_1 on a deux choix possibles.

5.2. Nous avons montré que si b est une transformation affine symétrique fixant 0 , il existe $\lambda \neq 0$ et a une affinité orthogonale dont l'axe passe par 0 (4.2) tels que : $b = h_\lambda a$, d'où $f = h_\lambda a\,s = a h_\lambda s = a\,g$ où $g = h_\lambda s$ est une similitude indirecte de centre 0 .

Unicité d'une telle décomposition :

* f n'est pas une similitude.

$f = a\,g = a'g'$

avec $g = h_\lambda s$ $g' = h_{\lambda'} s'$ s et s' réflexions dont les axes passent par 0, a et a' distinctes de l'identité donc $h_\lambda a\,s = h_{\lambda'} a's'$, donc $s' = \pm s$ car on utilise l'unicité de 5.1.b) (h_λ a n'est pas une similitude directe). Donc $h_\lambda a = h_{\varepsilon\lambda'} a'$ et par la question 4.2., où bien $\lambda = \varepsilon\lambda'$, $a = a'$ ou bien a et a' ont des axes orthogonaux et des rapports inverses l'un de l'autre.

* f est une similitude :

• si f est une similitude directe, il n'y a pas unicité mais infinité de solutions qui proviennent de l'étude de 5.1.b).

• si f est une similitude indirecte

$f = a\,g = a'g' \Rightarrow a = f\,g^{-1}$ est une similitude directe donc l'identité d'où $f = g$ et il y a unicité de la décomposition.

5.3. a) Comme f,a,g fixent le point 0 il suffit d'étudier les automorphismes associés F,A,G. A est une affinité orthogonale donc : $\exists(\alpha',\gamma') \in \mathbb{R}^2$, $\exists S'$ réflexion $A = \alpha' I + \gamma' S$. G similitude vectorielle indirecte donc $(G(\vec{e}_1),G(\vec{e}_2))$ est une base carrée indirecte (1.3.).

Posons $\vec{u} = F(\vec{e}_1)$, $\vec{v} = F(\vec{e}_2)$. Alors

$A(G(\vec{e}_1)) = \vec{u}$, $A(G(\vec{e}_2)) = \vec{v}$

donc si on considère la base carrée directe $(G(\vec{e}_1), -G(\vec{e}_2)) = (\vec{i},\vec{j})$ on a : $A(\vec{i}) = \vec{u}$ $A(j) = -\vec{v}$

5.3. b) Dans 3.1. nous avons trouvé la décomposition d'un élément de $\mathcal{L}(\Pi)$ en somme d'un élément de $\mathcal{S}_+$ et d'un élément de $\mathcal{S}_-$. Ici

$$\alpha' I = \frac{1}{2}(A + R\,A\,R^{-1}) \qquad \gamma' S' = \frac{1}{2}(A - R\,A\,R^{-1})$$

d'où $\alpha'\vec{i} = \frac{1}{2}(A(\vec{i}) + R\,A\,R^{-1}(\vec{i}))$ or $R^{-1}(\vec{i}) = - - j$

$A(\vec{j}) = -\vec{v}$ et $\alpha'\vec{i} = \frac{1}{2}(R(\vec{v}) + \vec{u})$ et $\vec{i}$ est colinéaire à $\vec{u} + R(\vec{v})$.

$$\gamma' S'(\vec{i}) = \frac{1}{2}(A(\vec{i}) - R\,A\,R^{-1}(\vec{i})) = \frac{1}{2}(\vec{u} - R\,A(-\vec{j})) = \frac{1}{2}(\vec{u} - R(\vec{v}))$$

et $S'(\vec{i})$ est colinéaire à $\vec{u} - R(\vec{v})$.

5.3. c) D'après la question précédent : $\exists\, \delta \in \mathbb{R}^*$ $\vec{i} = \delta(\vec{u} + R(\vec{v}))$ $(\vec{i} \neq \vec{0} \Rightarrow \delta \neq 0)$, et en utilisant le fait que $(0, \vec{u} + R(\vec{v}), \vec{v} - R(\vec{u}))$ est un repère carré indirect

on a : $\vec{j} = \delta(R(\vec{u}) - \vec{v})$.

Reprenons l'exemple demandé au 1.4., le plan étant rapporté au repère orthonormal $(0,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ et $\vec{u} = 3\,\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2$, $\vec{v} = 6\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

$$\exists\ \delta \in \mathbb{R}^* \quad \vec{i} = \delta(4\,\vec{e}_1 + 8\,\vec{e}_2)\ ,\quad \vec{j} = \delta(-\,8\,\vec{e}_1 + 4\,\vec{e}_2)\ .$$

$A(\vec{i}) = 3\,\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2$, $A(\vec{j}) = -\,6\,\vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

On peut déterminer la matrice de A dans la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

En effet : $2\,\vec{i} + \vec{j} = 20\,\delta\,\vec{e}_2$, $\vec{i} - 2\vec{j} = 20\,\delta\,\vec{e}_1$

donc $A(20\,\delta\,\vec{e}_1) = A(\vec{i}) - 2\,A(\vec{j}) = 15\,\vec{e}_1$, $A(20\,\delta\,\vec{e}_2) = 2\,A(\vec{i}) + A(\vec{j}) = 5\,\vec{e}_2$,

et A a pour matrice $\begin{pmatrix} \frac{3}{4\delta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4\delta} \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$

C'est la matrice d'une affinité si et seulement si l'une de ses valeurs propres est 1 et l'autre est non nulle.

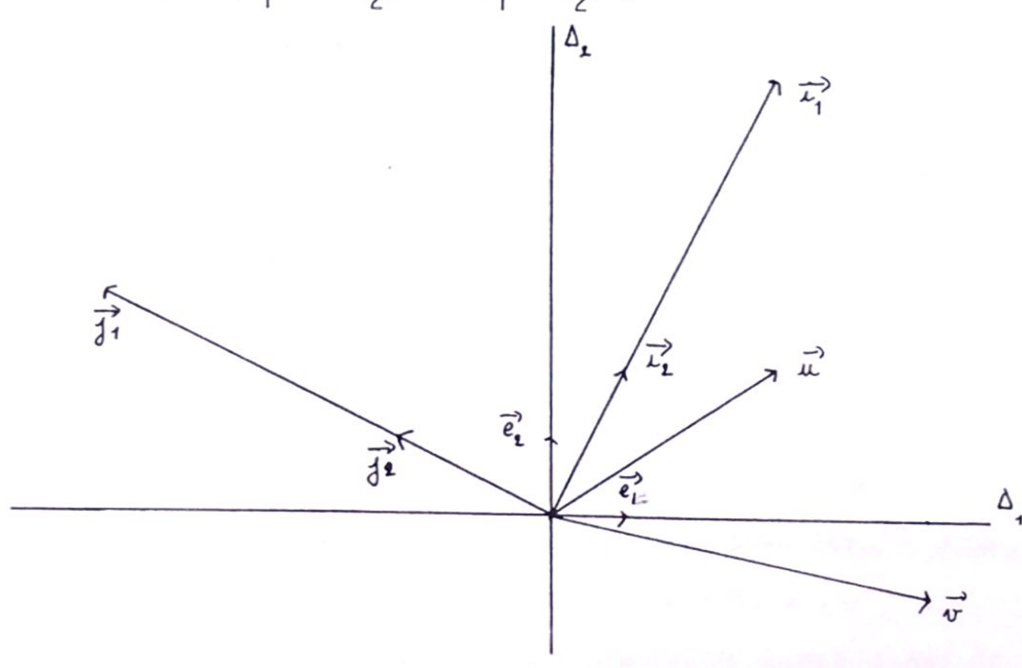
On a donc deux cas possibles :

$\star\ \delta = \frac{3}{4}$ $\quad A(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 \quad A(\vec{e}_2) = \frac{1}{3}\,\vec{e}_2$

A a pour axe la droite $\Delta_1(0,\vec{e}_1)$, pour rapport $\frac{1}{3}$ et le couple $(\vec{i}_1,\vec{j}_1)$ correspondant est : $(3\,\vec{e}_1 + 6\,\vec{e}_2,\ -\,6\,\vec{e}_1 + 3\,\vec{e}_2)$

$\star\ \delta = \frac{1}{4}$ $\quad A(\vec{e}_1) = 3\,\vec{e}_1 \quad A(\vec{e}_2) = \vec{e}_2$

A a pour axe la droite $\Delta_2(0,\vec{e}_2)$ et pour rapport 3 et le couple $(\vec{i}_2,\vec{j}_2)$ correspondant est : $(\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2,\ -\,2\,\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$.



5.4. Utilisons la décomposition de 5.1.b) :

$f = b\,s$ $\quad b$ symétrique et fixant 0 , s réflexion dont l'axe passe par 0 , et la décomposition de 4.3. pour une transformation b symétrique fixant 0 ; $b = a_2 a_1$, a_1 et a_2 affinités orthogonales dont les axes

D_1 et D_2 sont orthogonaux et passent par 0 .
Pour f transformation affine fixant 0 on a : $f = a_2 a_1 s$
où a_1 et a_2 sont des affinités orthogonales d'axes orthogonaux passant par 0 et s une réflexion d'axe passant par 0 .

5.5. a) Remarquons qu'une affinité orthogonale vectorielle d'axe Δ peut s'écrire si S désigne la réflexion d'axe Δ : $(1-\lambda)I + \lambda S$, et son rapport est : $1-2\lambda$, $\lambda \neq \frac{1}{2}$.
Soit F une similitude directe : $F = \alpha I + \beta R$

$$[(1-\lambda)I+\lambda S][(1-\lambda')I+\lambda' S'] = F \iff (1-\lambda)(1-\lambda')I+\lambda\lambda' SS'+\lambda'(1-\lambda)S'+\lambda(1-\lambda')S = F$$

Remarquons que : $(1-\lambda)(1-\lambda')I + \lambda\lambda' SS'$ est égal à la composante de F dans $\mathcal{S}_+$ car

$$(\lambda\lambda' SS')R = \lambda\lambda' S(S'R) = \lambda\lambda' S(-RS') = \lambda\lambda'(-SR)S' = \lambda\lambda'(RS)S' = R(\lambda\lambda' SS')$$

d'où nécessairement :

$$\lambda'(1-\lambda)S' + \lambda(1-\lambda')S = 0 \ , \ \lambda'(1-\lambda)S' = -\lambda(1-\lambda')S .$$

Les cas où $S = S'$ ou bien $S = -S'$ ne sont pas intéressants car ils conduisent à F homothétie ($S = -S'$, $\lambda = \lambda'$ donne $(1-2\lambda)I$ donc toutes les homothéties).
Etudions les cas : $\lambda'(1-\lambda) = \lambda(1-\lambda') = 0$

$\lambda' = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ $F = I$

$\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = 1$ $F = SS'$ donc toute rotation vectorielle.

En conclusion toute rotation vectorielle et toute homothétie s'écrit comme produit de deux affinités orthogonales vectorielles.

5.5. b) $F = A_1 A_2 \Rightarrow R_\theta F R_\theta^{-1} = (R_\theta A_1 R_\theta^{-1})(R_\theta A_2 R_\theta^{-1})$ et $R_\theta A R_\theta^{-1}$ est une affinité orthogonale (les valeurs propres de A et de $R_\theta A R_\theta^{-1}$ sont les mêmes, les sous-espaces propres sont images l'un de l'autre par R_θ qui conserve l'orthogonalité). De la même façon : $R_\theta F R_\theta^{-1} = A_1 A_2 \Rightarrow F_\theta = (R_\theta^{-1} A_1 R_\theta)(R_\theta^{-1} A_2 R_\theta)$

5.5. c) $F = \alpha I + \beta R + \gamma S$ $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$

$R_\theta F R_\theta^{-1} = \alpha I + \beta R + \gamma R_\theta S R^{-1}$ car $RR_\theta = R_\theta R$

$= \alpha I + \beta R + \gamma S_1$ où $S_1 = R_\theta S R_\theta^{-1}$

donc F' est conjugué de F par rotation si et seulement si

$$\alpha I + \beta R = \alpha' I + \beta' R \quad \text{et} \quad \gamma S_1 = \gamma' S'$$

F' conjugué de F entraîne $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \pm\gamma'$.
Réciproquement : si $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \pm\gamma'$ on a :

$\forall R_\theta$ $R_\theta(\alpha I + \beta R)R_\theta^{-1} = \alpha' I + \beta' R$.

Si $\gamma' = +\gamma$ $\exists R_\theta$ $S' = R_\theta S R_\theta^{-1}$ où R_θ est une rotation qui envoie l'axe de S sur l'axe de S'.

Si $\gamma' = -\gamma \ \exists R_\theta$ - $S' = R_\theta S R_\theta^{-1}$ R_θ est une rotation qui envoie l'orthogonal de l'axe de S sur l'axe de S'.

$$\alpha' = \alpha,\ \beta' = \beta,\ \gamma' = \pm\gamma \iff \begin{cases} \alpha^2+\beta^2-\gamma^2 = \alpha'^2-\gamma'^2 = \det(F) = \det(F') \\ \alpha = \alpha \quad \beta = \beta' \end{cases}$$

5.5. d) Soit A l'affinité orthogonale d'axe Δ et de rapport λ.

Alors $A = \frac{1+\lambda}{2} I + \frac{1-\lambda}{2} S$ si S est la réflexion vectorielle d'axe Δ.

En effet soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base orthonormée directe telle que : $\Delta = \mathbb{R}\vec{i}$.

$$A(i) = \frac{1+\lambda}{2}\vec{i} + \frac{1-\lambda}{2}\vec{i} = \vec{i} \qquad A(\vec{j}) = \frac{1+\lambda}{2}\vec{j} - \frac{1-\lambda}{2}\vec{j} = \lambda\vec{j}$$

Soit S_1 la réflexion d'axe D_1, S_2 la réflexion d'axe D_2.

$$F' = A_2A_1 = \left(\frac{1+\lambda_2}{2} I + \frac{1-\lambda_2}{2} S_2\right)\left(\frac{1+\lambda_1}{2} I + \frac{1-\lambda_1}{2} S_1\right)$$

$$= \frac{1}{4}(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)I + \frac{1}{4}(1-\lambda_2)(1-\lambda_1)S_2S_1 + \frac{(1+\lambda_2)(1-\lambda_1)}{2} S_1 + \frac{(1-\lambda_2)(1+\lambda_1)}{2} S_2$$

Comme $\varphi = (D_1, D_2)$ alors $S_2S_1 = \cos 2\varphi\, I + \sin 2\varphi\, R$.

$$A_1A_2 = \frac{1}{4}[(1+\lambda_1)(1-\lambda_2) + \cos 2\varphi(1-\lambda_2)(1-\lambda_1)]\, I$$

$$+ \frac{1}{4}(1-\lambda_2)(1-\lambda_1)\sin 2\varphi R + \frac{(1+\lambda_2)(1-\lambda_1)}{2} S_1 + \frac{(1-\lambda_2)(1+\lambda_1)}{2} S_2$$

$$A_1A_2 = F' \iff \begin{cases} \det F' = \det A_1 \det A_2 \\ (1+\lambda_1)(1+\lambda_2) + \cos 2\varphi(1-\lambda_2)(1-\lambda_1) = 4\alpha \\ (1-\lambda_2)(1-\lambda_1)\sin 2\varphi = 4\beta \end{cases}$$

$$\iff (1+\lambda_1)(1+\lambda_2) + \cos 2\varphi(1-\lambda_2)(1-\lambda_1) = 4\alpha$$

$$\iff 1 + (\lambda_1+\lambda_2) + \lambda_1\lambda_2 + (1-\sin^2\varphi)(1-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_1\lambda_2) = 4\alpha$$

$$\iff (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\sin^2\varphi - \delta - 2\alpha + 1$$

d'où le résultat.

5.5. e) $\tau = 0 \Rightarrow (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\sin^2\varphi = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ ou $\lambda_2 = 1$ ou $\sin^2\varphi = 0$

$\lambda_1 = 1 \Rightarrow A_1 = I \Rightarrow F = A_2 \Rightarrow 1$ valeur propre de F

$\lambda_2 = 1 \Rightarrow A_2 = I \Rightarrow F = A_1 \Rightarrow 1$ valeur propre de F

$\sin^2\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$ ou $\pi \Longrightarrow D_1 = D_2 \Rightarrow 1$ valeur propre de F car dans ce cas A_2A_1 est une affinité orthogonale.

1 valeur propre de F $\Rightarrow$ l'autre valeur propre de F est δ car le déterminant de F est égal au produit des valeurs propres. Cherchons la trace de F : c'est $1 + \delta$ et c'est aussi 2α car trace $R = 0$, trace $S = 0$.

Donc $1 + \delta = 2\alpha$ donc $\tau = 0$.

Lorsque $\tau = 0$, le produit A_2A_1 est une affinité orthogonale, cas d'un endomorphisme symétrique $(\beta = 0)$ déjà traité.

5.5. f) Posons $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\tau}{2\beta}$. Ceci détermine φ. On obtient alors :

$$\lambda_1\lambda_2 = \delta \text{ , et } 1-(\lambda_1+\lambda_2)+\lambda_1\lambda_2 = \left(1+\frac{1}{(\frac{\tau}{2\beta})^2}\right)(\delta-2\alpha+1)$$

d'où $$\lambda_1+\lambda_2 = 1+\delta-\left(\frac{4\beta^2}{\tau^2}+1\right)(\delta-2\alpha+1) = 2\alpha-\frac{4\beta^2}{\tau}$$

λ_1 et λ_2 sont donc racines de l'équation du second degré :

$$X^2-\left(2\alpha-\frac{4\beta^2}{\tau}\right)X+\delta = 0$$

$$\Delta = \left(2-\frac{4\beta^2}{\tau}\right)^2-4\delta = 4\left[\left(\alpha-\frac{2\beta^2}{\tau}\right)^2-\delta\right]$$

La condition d'existence d'un couple de réels satisfaisant aux conditions du α) est donc :

$$\left(\alpha-\frac{2\beta^2}{\tau}\right)^2-\delta \geq 0$$

Dans ce cas λ_1 et λ_2 existent et donc A_1 et A_2 .

5.6. Soit f une transformation affine quelconque. Montrons d'abord le résultat suivant :

f admet un point fixe et un seul si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de F .

• f admet un point fixe et un seul M_o : $f(M_o) = M_o$. L'ensemble des points fixes de f est :

$$\{M;\ f(M) = M\} = \{M,\ f(M)-f(M_o) = M-M_o\}$$

$$= \{M,\ F(\overrightarrow{M_oM}) = \overrightarrow{M_oM}\} = M_o+\operatorname{Ker}(F-\mathrm{Id}) .$$

Si cet ensemble se réduit à M_o, $\operatorname{Ker}(F-\mathrm{Id}) = 0$ c'est-à-dire 1 n'est pas valeur propre de F .

* 1 n'est pas valeur propre de F . Alors l'ensemble des points fixes de f sera l'ensemble vide ou réduit à un point. Montrons qu'il existe un point fixe M_o . Soit M un point de P : M_o point fixe de f si et seulement si

$$f(M_o) = M_o \iff \overrightarrow{Mf(M_o)} = \overrightarrow{MM_o}$$

$$\iff \overrightarrow{Mf(M)}+F(\overrightarrow{MM_o}) = \overrightarrow{MM_o} \iff (F-I)(\overrightarrow{MM_o}) = \overrightarrow{f(M)M}$$

or si F n'a pas 1 pour valeur propre, $F-I$ est inversible, on peut donc déterminer $\overrightarrow{MM_o}$: $\overrightarrow{MM_o} = (F-I)^{-1}\,(\overrightarrow{f(M)M})$ et f admet un point fixe.

L'étude de la décomposition d'une transformation affine f peut se faire en plusieurs temps :

• étude d'une transformation affine admettant au moins un point fixe : par V-4 une telle transformation affine se décompose en produit de trois affinités orthogonales. Dans le cas où 1 n'est pas valeur propre de F et lorsque $\left(\alpha-\frac{2\beta^2}{\tau}\right)^2-\delta \geq 0$ une telle transformation affine se décompose en produit de deux affinités orthogonales.

· étude d'une transformation affine f n'admettant pas de point fixe : on peut à l'aide d'une affinité orthogonale se ramener à une transformation affine admettant un point fixe :

$$\exists\, a \text{, affinité orthogonale } a \circ f = g \text{, } g \text{ admettant un point fixe.}$$

On applique alors les résultats pour les transformations affines admettant un point fixe.

CAPES externe 1986 composition 1

des ANTILLES et de la GUYANE

Notations et objectif du problème

On désigne par $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, 2π - périodiques à valeurs complexes, et on munit $\mathcal{C}$ de la norme

$$N_\infty : f \longmapsto N_\infty(f) = \sup_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t)| .$$

On rappelle d'autre part que l'application qui, à tout couple (f, g) d'éléments de $\mathcal{C}$, associe

$$< f, g > = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}\, g(t)\, dt$$

est un produit scalaire hermitien. On pose enfin $N_1(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt$.

Pour tout élément p de $\mathbb{Z}$, on note e_p la fonction $t \longmapsto e^{ipt}$. On désigne par E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ engendré par les fonctions e_p, où $p \in \mathbb{Z}$; les éléments de E sont appelés polynômes trigonométriques. Enfin, pour tout entier naturel n, on note E_n le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions e_p, où $|p| \leq n$.

Dans les parties I, II et III on étudie, tant du point de vue qualitatif que quantitatif, des procédés d'approximation des fonctions périodiques continues ou lipschitziennes par des polynômes trigonométriques, et on montre que celui de la partie III est en un certain sens optimal. Dans la partie IV on adapte le procédé du III à l'approximation des fonctions de classe C^r et on établit que la rapidité de convergence est d'autant meilleure que les fonctions sont plus régulières.

PREMIERE PARTIE

Approximation par la méthode de Fourier

1. Convolution des fonctions périodiques.

a. Soit f un élément de $\mathcal{C}$. Prouver que, pour tout nombre réel a, $\int_a^{a+2\pi} f(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt$.

b. Montrer que, pour tout couple (f, g) d'éléments de $\mathcal{C}$, la fonction $f * g$ définie sur $\mathbb{R}$ par la relation

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t)\, g(t)\, dt$$

appartient encore à $\mathcal{C}$. Vérifier que $f * g = g * f$.

Prouver que $N_\infty(f * g) \leq N_1(g) \cdot N_\infty(f)$.

c. Soit f un élément de $\mathcal{C}$. Etablir que, pour tout élément p de $\mathbb{Z}$,

$$f * e_p = c_p(f)\, e_p, \quad \text{où } c_p(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ipt} dt = < e_p, f > ;$$

ainsi $c_p(f)$ n'est autre que le $p^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de f.

En déduire que, pour tout élément h de E_n, $f * h$ appartient encore à E_n.

2. Sommes de Fourier.

On rappelle qu'étant donné un élément f de $\mathcal{C}$, sa somme de Fourier à l'ordre n est par définition :

$$S_n(f) = \sum_{|p| \leq n} c_p(f)\, e_p = f * s_n, \text{ où } s_n = \sum_{|p| \leq n} e_p .$$

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, les fonctions e_p, où $|p| \leq n$, constituent une base orthonormale de E_n.

b. Montrer que l'endomorphisme $S_n : f \longmapsto S_n(f)$ est le projecteur orthogonal de $\mathcal{C}$ sur le sous-espace vectoriel E_n.

On rappelle aussi que si f est en outre de classe C^1 par morceaux, la série de Fourier de f converge normalement vers f, et qu'en particulier $\lim_{n \to +\infty} N_\infty(f - S_n(f)) = 0$.

3. Etude d'un exemple.

On désigne par γ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation $\gamma(t) = |\sin \frac{t}{2}|$.

a. Donner l'allure de la représentation graphique de γ. Montrer que γ est développable en série de Fourier et que ce développement peut s'écrire sous la forme :

$$\gamma(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{p > o} \frac{\cos p x}{4p^2 - 1} .$$

b. Etablir que, pour tout entier n, $N_\infty(\gamma - \gamma * s_n) = |\gamma(0) - (\gamma * s_n)(0)| = \frac{2}{\pi} \frac{1}{2n + 1}$.

4. Majoration de la norme de l'endomorphisme S_n.

On rappelle que la norme d'un endomorphisme continu U de $\mathcal{C}$ est donnée par la relation

$$\| U \| = \sup_{N_\infty(f) \leq 1} N_\infty(U(f)).$$

a. Montrer que S_n est continu et que $\| S_n \| \leq N_1(s_n)$.

b. Etablir que, si $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

(1) $$s_n(t) = \frac{\sin(2n + 1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}$$

c. Prouver que la fonction $u \longmapsto \frac{u}{\sin u}$, définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, se prolonge en une fonction continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Soit ρ sa borne supérieure.

Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$N_1(s_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |s_n(t)|\, dt \leq \frac{2\rho}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2n + 1)u|}{u}\, du = \frac{2\rho}{\pi}\int_0^{(n + \frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin y|}{y}\, dy .$$

d. Etablir que pour tout nombre réel $X \geq 1$, $\int_0^X \frac{|\sin y|}{y}\, dy \leq 1 + \ln X$; à cet effet, on découpera $[0,X]$ en $[0,1]$ et $[1,X]$.

e. Prouver finalement qu'il existe un nombre réel strictement positif μ tel que, pour tout $n \neq 0$,

$$\| S_n \| \leq \mu \,\mathrm{Ln}\, (n + 1).$$

5. Minoration de cette norme.

Le résultat de cette question n'est pas utilisé dans la suite du problème.

Pour tout entier naturel n, on désigne par γ_n la fonction 2π-périodique paire telle que, pour tout élément t de $[0,\pi]$, $\gamma_n(t) = \sin(2n+1)\frac{t}{2}$.

a. Donner l'allure de la représentation graphique de γ_1.

b. Calculer les coefficients de Fourier de γ_n et prouver que

$$(\gamma_n * s_n)(0) = \frac{2}{\pi}\sum_{q=o}^{2n}\frac{1}{2q+1}.$$

En déduire que $(\gamma_n * s_n)(0) \sim \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Ln}\, n$.

c. Prouver finalement qu'il existe un nombre réel strictement positif ν tel que, pour tout $n \neq 0$,

$$\| S_n \| \geq \nu\,\mathrm{Ln}(n+1).$$

DEUXIEME PARTIE

Approximation par la méthode de Fejer

Cette méthode d'approximation consiste à passer à la moyenne arithmétique des sommes de Fourier; à cet effet, pour tout entier naturel n, on pose

(2) $$k_n = \frac{1}{n+1}\sum_{p=o}^{n} s_p$$

et, pour tout élément f de $\mathscr{C}$, $K_n(f) = f * k_n$.

1. Calcul de la norme de l'endomorphisme K_n.

a. A l'aide de (1) établir que, si $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

(3) $$k_n(t) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\,(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2.$$

b. A l'aide de (2) montrer que k_n appartient à E_n. Prouver que $N_1(k_n) = 1$; en déduire que K_n est continu et que $\| K_n \| \leq 1$. Calculer $K_n(e_o)$ et prouver finalement que $\| K_n \| = 1$.

Ainsi la méthode de Fejer est plus stable que celle de Fourier; cela tient à la positivité de k_n.

2. Approximation des fonctions continues.

Soit f un élément de $\mathscr{C}$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x,

(4) $$f(x) - (f * k_n)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - f(x-t)]\,k_n(t)\,dt.$$

b. Etablir que, pour tout élément α de $]0,\pi]$,

$$N_\infty(f - K_n(f)) \leq \omega_f(\alpha) + \frac{2}{\pi}N_\infty(f)\int_\alpha^\pi k_n(t)\,dt,$$

$$\text{où}\quad \omega_f(\alpha) = \sup_{|x-x'|\leq\alpha}|f(x) - f(x')|.$$

c. A l'aide de (3) prouver que, pour tout élément α de $]0,\pi]$,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\alpha^\pi k_n(t)\,dt = 0.$$

d. Montrer enfin que $\lim_{n \to +\infty} N_\infty(f - K_n(f)) = 0$.

Ainsi la méthode de Fejer s'applique à toutes les fonctions continues (contrairement à la méthode de Fourier, ce qu'on ne demande pas d'établir).

3. Approximation des fonctions lipschitziennes.

On suppose que f est lipschitzienne dans le rapport $\lambda(f)$.

a. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$N_\infty(f - K_n(f)) \leq \frac{\lambda(f)}{\pi} \int_0^\pi t\, k_n(t)\, dt.$$

b. Montrer, par un procédé analogue à celui de I.4.c, que pour tout entier naturel n,

$$\int_0^\pi t\, k_n(t)\, dt \leq \frac{4\rho^2}{n+1} \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 y}{y}\, dy.$$

c. En observant que $\sin^2 y \leq |\sin y|$, utiliser la majoration établie au I.4.d pour aboutir au résultat suivant :

Il existe un nombre réel strictement positif μ' tel que, pour tout n non nul et pour tout élément f de $\mathcal{C}$ lipschitzien,

(5) $$N_\infty(f - K_n(f)) \leq \mu' \frac{\mathrm{Ln}\,(n+1)}{n+1} \lambda(f).$$

4. Retour à l'exemple du I.3.

Les résultats de cette question ne sont pas utilisés dans la suite du problème.

a. Montrer que γ est lipschitzienne et calculer $\lambda(\gamma)$.

b. Prouver que, pour tout entier naturel n,

$$\gamma(0) - (\gamma * k_n)(0) = \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^{n} [\gamma(0) - (\gamma * s_p)(0)].$$

c. A l'aide de I.3.b, montrer qu'il existe un nombre réel strictement positif ν' tel que, pour tout entier naturel non nul n,

$$|\gamma(0) - (\gamma * k_n)(0)| \geq \nu' \frac{\mathrm{Ln}\,(n+1)}{n+1}.$$

En conclure que la majoration (5) ne peut pas être améliorée (au facteur constant près).

TROISIEME PARTIE

Approximation par la méthode de Jackson

Dans la majoration (5) le facteur $\mathrm{Ln}(n+1)$ est lié au fait que la suite des intégrales $\int_0^\pi t\, k_n(t)\, dt$ n'est pas dominée par $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ en raison de la divergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 y}{y}\, dy$.

La méthode de Jackson consiste à remplacer les fonctions k_n par des fonctions j_n encore positives et telles qu'en outre la suite des intégrales $\int_0^\pi t\, j_n(t)\, dt$ soit dominée par $\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

A cet effet, pour tout entier naturel m, on pose $j_{2m} = j_{2m+1} = \lambda_m k_m^2$, où λ_m est un nombre réel strictement positif choisi tel que $N_1(j_{2m}) = 1$. Enfin, pour tout entier naturel n et pour tout élément f de $\mathcal{C}$, on pose $J_n(f) = f * j_n$.

1. Etude de l'endomorphisme J_n.

a. A l'aide de (2) prouver que, pour tout entier naturel m,

$$k_m = \sum_{|p| \leq m} \left(1 - \frac{|p|}{m+1}\right) e_p .$$

b. En déduire que $N_1(k_m^2) = \langle k_m, k_m \rangle = \sum_{|p| \leq m} \left(1 - \frac{|p|}{m+1}\right)^2$.

Montrer que $\lambda_m = \frac{3(m+1)}{2(m+1)^2 + 1}$ (on rappelle que $1^2 + 2^2 + \ldots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$).

c. A l'aide du a., montrer que, pour tout entier naturel n, j_n appartient à E_n.

d. Calculer $J_n(e_o)$. Prouver finalement que J_n est continu et que $\| J_n \| = 1$.

2. Approximation des fonctions continues.

En procédant comme dans la question II.2, montrer que, pour tout élément f de $\mathcal{C}$, $\lim_{n \to +\infty} N_\infty(f - J_n(f)) = 0$.

3. Approximation des fonctions lipschitziennes.

On suppose en outre que f est lipschitzienne dans le rapport $\lambda(f)$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$N_\infty(f - J_n(f)) \leq \frac{\lambda(f)}{\pi} \int_o^\pi t\, j_n(t)\, dt .$$

b. Montrer que, pour tout entier naturel m,

$$\int_o^\pi t\, j_{2m}(t)\, dt \leq 4\, \rho^4\, \lambda_m \int_o^{(m+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 y}{y^3}\, dy .$$

c. Montrer que l'intégrale $\int_o^{+\infty} \frac{\sin^4 y}{y^3}\, dy$ est convergente, et aboutir au résultat suivant :

Il existe un nombre réel strictement positif A tel que, pour tout entier naturel n et pour tout élément f de $\mathcal{C}$ lipschitzien,

$$(6) \qquad N_\infty(f - J_n(f)) \leq \frac{A}{n+1} \lambda(f).$$

4. Optimalité de la majoration (6).

On reprend la fonction γ étudiée dans la question I.3 et on se propose de minorer $N_\infty(\gamma - h)$ lorsque h parcourt E_n. A cet effet, pour tout entier naturel n, on pose

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{p=n+1}^{2n+1} s_p .$$

a. Montrer que v_n appartient à E_{2n+1} et que, pour tout élément h de E_n, $h * v_n = h$.

b. Montrer que $v_n = 2k_{2n+1} - k_n$. En déduire que, pour tout élément g de $\mathcal{C}$, $N_\infty(g * v_n) \leq 3\, N_\infty(g)$.

c. En écrivant $\gamma - \gamma * v_n$ à l'aide de $\gamma - h$, prouver que $N_\infty(\gamma - h) \geq \frac{1}{4} N_\infty(\gamma - \gamma * v_n)$.

d. En utilisant I.3.b, montrer que $|\gamma(0) - (\gamma * v_n)(0)| \geq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{n+1}$.

Ainsi, pour tout élément h de E_n ,

$$N_\infty(\gamma - h) \geq \frac{1}{4\pi} \frac{1}{n+1} \lambda(\gamma) ,$$

ce qui montre que la méthode d'approximation de Jackson est optimale.

QUATRIEME PARTIE

Approximation des fonctions de classe C^r

Pour tout entier $r \geq 1$, on note $\mathcal{C}^r$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ constitué des fonctions de classe C^r sur $\mathbb{R}$, et on convient de poser $\mathcal{C}^0 = \mathcal{C}$.

La dérivée d'ordre k d'une fonction f est notée $D^k f$.

1. Approximation et dérivation.

On note W_n l'endomorphisme $f \longmapsto f - J_n(f)$ de l'espace vectoriel $\mathcal{C}$. Soit g un élément de $\mathcal{C}^1$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$N_\infty(W_n(g)) \leq \frac{A}{n+1} N_\infty(Dg).$$

b. Prouver que $D(g * e_n) = (Dg) * e_n$; en déduire que $D(W_n(g)) = W_n(Dg)$.

2. Approximation des fonctions de classe C^1 ou C^2.

On se propose d'adapter le procédé de Jackson de façon à améliorer la rapidité de convergence. A cet effet, pour tout élément f de $\mathcal{C}^1$, on part de la relation $f = J_n(f) + W_n(f)$, que l'on itère en écrivant que $W_n(f) = (J_n \circ W_n)(f) + W_n^2(f)$, et l'on pose $J_{n,1} = J_n + J_n \circ W_n$.

a. Montrer que $J_{n,1}(f)$ est un élément de E_n , que $J_{n,1}$ est continu et que $\|J_{n,1}\| \leq 3$.

b. Montrer que $N_\infty(W_n^2(f)) \leq \frac{A}{n+1} N_\infty(W_n(Df))$.

En déduire que si f appartient à $\mathcal{C}^1$, $N_\infty(f - J_{n,1}(f))$ est négligeable devant $\frac{1}{n+1}$.

En déduire aussi que si f appartient à $\mathcal{C}^2$, $N_\infty(f - J_{n,1}(f)) \leq \frac{A^2}{(n+1)^2} N_\infty(D^2 f)$.

3. Approximation des fonctions de classe C^r ou C^{r+1}.

Construire pour tout r un endomorphisme continu $J_{n,r}$ de $\mathcal{C}$ dont l'image est contenue dans E_n et satisfaisant aux deux conditions suivantes :

- Si f appartient à $\mathcal{C}^r$, $N_\infty(f - J_{n,r}(f))$ est négligable devant $\frac{1}{(n+1)^r}$.

- Si f appartient à $\mathcal{C}^{r+1}$, $N_\infty(f - J_{n,r}(f)) \leq \frac{A^{r+1}}{(n+1)^{r+1}} N_\infty(D^{r+1} f)$.

CAPES 86

1ère Épreuve - Corrigé / remarques

SOLUTION DE ANTOINE DELCROIX SUR MEGAMATHS

I Approximation par la méthode de Fourier

I.1. Convolution des fonctions périodiques

I.1.a. Pour tout $f \in \mathcal{C}$, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_a^{a+2\pi} f(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \int_{\pi}^{a+2\pi} f(t)\,dt + \int_a^{-\pi} f(t)\,dt$$

Or $\int_{+\pi}^{a+2\pi} f(t)\,dt = \int_{-\pi}^{a} f(t)\,dt$ (2π-périodicité de f) ; d'où

$$\int_a^{a+2\pi} f(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt.$$

I.1.b. ▪ le théorème du cours s'applique ; la fonction :

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times[-\pi,\pi] & \to & \mathbb{C} \\ (x\ ,\ t) & \mapsto & f(x-t)g(t) \end{array}\right)$$

est continue : il en résulte que la fonction $f*g$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

▪ L'égalité $f*g = g*f$ résulte du changement de variables $u = x-t$ et du I.1.a.

▪ Enfin, comme f est 2π périodique on a $\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+2\pi-t)\,g(t)\,dt$, d'où la 2π-périodicité de $f*g$.
Au total $f*g$ appartient à $\mathcal{C}$.

▪ Pour $x \in \mathbb{R}$ on a $|f*g(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)\,g(t)|\,dt$

d'où $|f*g(x)| \leq \frac{1}{2\pi} N_\infty(f) \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|\,dt = N_\infty(f)\,N_1(g)$

On en déduit : $N_\infty(f*g) \leq N_\infty(f)\,N_1(g)$.

Comme $f*g = g*f$ on a aussi : $N_\infty(g*f) \leq N_\infty(g)\,N_1(f)$

Remarques - i) Une fonction continue 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
ii) Avec le i) on peut redémontrer le théorème évoqué ci-dessus. Pour $f \in \mathcal{C}$ et pour $\varepsilon > 0$, f étant donc uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tq : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}$

$$|x-y| < \eta \Rightarrow |f(x-t) - f(y-t)| < \varepsilon.$$

I

Alors, pour (x,y) tels que $|x-y| < \eta$ on obtient :

$$|f*g(x) - f*g(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|\,dt \leq \varepsilon\, N_1(g).$$

I.1.c. ▪ Par définition : $c_p(f) = \langle e_p, f \rangle$, pour $f \in \mathcal{C}$ et $p \in \mathbb{Z}$.

on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f*e_p(x) = e_p*f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{ip(x-t)}\,dt$

D'où $f*e_p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-ipt}\,dt\; e^{ipx} = c_p(f)\,.\,e_p(x)$.

▪ la convolution est une opération clairement linéaire,

Pour $h \in E_n$, $h = \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k e_k$, il vient $f*h = \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k c_k(f)\,e_k$ et $f*h \in E_n$.

Remarque - On définit de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$ un endomorphisme φ_f par : $\varphi_f \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \to & \mathcal{C} \\ g & \mapsto & f*g \end{array}$. Chacun des espaces E_n est stable par φ_f. la restriction de φ_f est un endomorphismes donc les valeurs propres sont les $c_k(f)$ $(-n \leq k \leq n)$ et e_k est un vecteur propre associé à $c_k(f)$.

I.2. Sommes de Fourier

I.2.a. Par définition E_n est engendré par le système $\{e_p\}_{-n\leq p\leq n}$. Par ailleurs pour (p,q) tel que $|p|\leq n$, $|q|\leq n$ et $p \neq q$, il vient : $\langle e_p, e_q \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(q-p)t}\,dt = \frac{1}{2\pi(q-p)}\left[e^{i(q-p)t}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$
et par ailleurs pour p tel que $|p| \leq n$. $\langle e_p, e_p \rangle = 1$.
le système $\{e_p\}_{-n\leq p\leq n}$ est orthonormal et donc libre.

I.2.b. - Remarque.- S_n est clairement linéaire et l'on a par définition $S_n(f) \in E_n$.

Il s'agit de vérifier que : $\forall f \in \mathcal{C}$, $\forall g \in E_n$ $f - S_n(f) \perp g$.
Il suffit, en fait, de faire cette vérification pour une base de E_n ; on dispose ici de la base $\{e_n\}_{-n\leq p\leq n}$. On a :

$$\begin{aligned} \langle f - S_n(f), e_p \rangle &= \langle f, e_p \rangle - \langle S_n(f), e_p \rangle \\ &= c_p(f) - \sum_{|q|\leq n} c_q(f)\langle e_q, e_p \rangle \\ &= c_p(f) - c_p(f) = 0. \end{aligned}$$

II

Remarque On a donc, pour tout $f \in \mathcal{C}$

$N_1(f - S_n(f)) = d(f, E_n) = \operatorname{Inf}_{g \in E_n} N_1(f-g)$. $S_n(f)$ réalise la meilleure approximation hilbertienne de f par un élément de $S_n(f)$.

I.3.a.

La fonction γ est 2π périodique continue et C_1 par morceaux. Sa série de Fourier existe et converge normalement. On calcule alors $c_p(\gamma)$ pour $p \in \mathbb{Z}$.

Figure 1 : graphe de γ

Comme γ est paire on a : $c_p(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ipt}\gamma(t)\,dt$ (par définition)

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos pt\, \gamma(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos pt\, \gamma(t)\,dt.$$

On a encore : $c_p(\gamma) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos pt \sin t/2\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin t \cos 2pt\,dt$.

Une double intégration par partie conduit à la relation :

$c_p(\gamma) = \frac{2}{\pi} + 4p^2 c_p(\gamma)$ d'où l'on tire $c_p(\gamma) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1-4p^2}$

On a alors, comme la série $\sum c_p(\gamma) e^{ipx}$ convergé :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\gamma(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} c_p(\gamma) e^{ipx} = \frac{2}{\pi} + \sum_{p>0} c_p(\gamma)(e^{ipx} + e^{-ipx})$

(car pour tout $p \in \mathbb{Z}$ $c_p(\gamma) = c_{-p}(\gamma)$.

D'où enfin : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\gamma(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\cos px}{1-4p^2}$

I.3.b. Comme $\gamma * s_n = \sum_{p=-n}^{n} c_p(\gamma) e^{ipx}$, il vient :

$\gamma * s_n - \gamma = \frac{4}{\pi}\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{\cos px}{4p^2-1}$, cette dernière série de Fourier ayant tous ses coefficients positifs. Il en résulte, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|\gamma * s_n(x) - \gamma(x)| \leq \frac{4}{\pi}\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2-1} = |\gamma * s_n(0) - \gamma(0)| \leq \|\gamma * s_n - \gamma\|_\infty$$

D'où l'égalité $N_\infty(\gamma - \gamma * s_n) = \frac{4}{\pi}\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2-1}$

Or : $\frac{1}{4p^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2p+1}\right)$. D'où, pour $k > n+1$.

$\sum_{p=n+1}^{k}\frac{1}{4p^2-1} = \sum_{p=n+1}^{k}\left(\frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2p+1}\right) = \frac{1}{2(n+1)-1} - \frac{1}{2k+1}$. On en déduit

$\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2-1} = \frac{1}{2n+1}$ et l'égalité : $N_\infty(\gamma - \gamma * s_n) = \frac{2}{\pi(2n+1)}$

I.4. Majoration de la norme de l'endomorphisme S_n.

I.4.a.

On a par définition : $\forall f \in \mathcal{C}$ $S_n(f) = f * s_n$.

D'après I.1.b. il vient : $N_\infty(S_n(f)) \leq N_1(s_n).N_\infty(f)$

On en déduit que l'opérateur S_n est continu et que sa norme $\|S_n\|$ vérifie : $\|S_n\| \leq N_1(s_n)$.

Remarque - Revoir les caractérisations des applications linéaires continues, la notion de norme d'une telle application dans le problème 1.2. des feuilles de T.D.

I.4.b. On a par définition $\forall t \in \mathbb{R}$ $s_n(t) = \sum_{|p| \leq n} e^{ipt}$

D'où : $\sin\frac{t}{2}\, s_n(t) = \frac{1}{2i}\sum_{|p|\leq n}(e^{it/2} - e^{-it/2})e^{ipt}$

$$= \frac{1}{2i}\sum_{|p|\leq n}\left(e^{i(p+\frac{1}{2})t} - e^{i(p-\frac{1}{2})t}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}\right) = \sin(n+\tfrac{1}{2})t$$

(Seuls les termes "extrêmes" de la somme subsistent)

On a donc : $\forall t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ $s_n(t) = \sin(n+\frac{1}{2})t \,/\, \sin\frac{t}{2}$

I.4.c. ▪ On a, en zéro, $\sin u \sim u$: la fonction $\varphi u \to \frac{u}{\sin u}$ se prolonge, en zéro, par continuité en posant $\varphi(0) = 1$.

Ce prolongement par continuité est une fonction continue sur un compact : elle est majorée ; soit ρ sa borne supérieure

Remarque : On peut montrer que la fonction $u \to \frac{\sin u}{u}$ est décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. φ est donc croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}]$; sa borne supérieure est donc $\rho = \varphi(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$.

▪ On a, par définition, $N_1(s_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|s_n(t)|\,dt$.

Comme les fonctions du type $t \to \frac{\sin \alpha t}{\sin \beta t}$ $((\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}^*)^2)$ se prolongent par continuité en zéro, il vient d'après I.4.b.

$N_1(s_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{\sin\frac{1}{2}t}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{\sin\frac{1}{2}t}dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{|\sin(2n+1)u|}{\sin u}du$

En utilisant les équivalents $\sin \alpha u \sim \alpha u$ on peut écrire

$$N_1(s_n) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)u|}{u}\,\frac{u}{\sin u}\,du \leq \frac{2\ell}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{|\sin(2n+1)u|}{u}\,du$$

En posant enfin $y=(2n+1)u$, il vient :

$$N_1(s_n) \leq \frac{2\ell}{\pi}\int_0^{(n+1/2)\pi}\frac{|\sin y|}{y}\,dy$$

I.4.d.

Pour $X \geqslant 1$, on écrit $\int_0^X \frac{\sin y}{y}\,dy = \int_0^1 \frac{|\sin y|}{y}\,dy + \int_1^X \frac{|\sin y|}{y}\,dy$

Comme $\forall y \in \mathbb{R}^+ \; \left|\frac{\sin y}{y}\right| \leq 1$ il vient $\int_0^1 \frac{|\sin y|}{y}\,dy = 1$. Puis :

$\int_1^X \frac{|\sin y|}{y}\,dy \leq \int_1^X \frac{dy}{y} = \ln X$. D'où le résultat.

I.4.e.

De I.4.a. on tire $\|S_n\| \leq N_1(s_n)$ et de I.4.c. et I.4.d.,

pour tout $n \geqslant 1$, on déduit $N_1(s_n) \leq \frac{2\ell}{\pi}(1 + \ln((n+\frac{1}{2})\pi))$.

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad N_1(s_n)/\ln(n+1) \leq \frac{2\ell}{\pi}(1+\ln(n+\frac{1}{2})\pi)/\ln(n+1)$

la suite $n \to \frac{2\ell}{\pi}(1+\ln((n+\frac{1}{2})\pi))/\ln(n+1)$ est convergente, de limite $2\ell/\pi$. Il en résulte que la suite $n \to N_1(s_n)/\ln(n+1)$ est majorée. Soit $M>0$ un tel majorant. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad N_1(s_n) \leq M \ln(n+1)$$

I.5. Minoration de $\|S_n\|$.

Remarque : la fonction γ_n est bien définie : son expression est donnée pour $t \in [0,\pi]$: on complète par parité pour $t \in [-\pi,0]$ puis par translation.

I.5.a.

On a pour $t \in [0,\pi]$

$\gamma_1(t) = \sin\frac{3t}{2}$.

figure 2 : graphe de γ_1

I.5.b. On a $c_p(\gamma_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ipt}\gamma_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos pt\,\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt$ par parité. Une double intégration par parties donne

$$c_p(\gamma_n) = \frac{1}{2\pi}\left(1/(n+p-\tfrac{1}{2}) + 1/(n-p+\tfrac{1}{2})\right)$$

D'où $\gamma_n * s_n = \sum_{|p|\leq n}\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{n+p+1/2} + \frac{1}{n-p+1/2}\right) e_p$

Puis en calculant en zéro :

$$\gamma_n * s_n(0) = \frac{1}{2\pi}\sum_{|p|\leq n}\left(\frac{1}{n+p+\frac{1}{2}} + \frac{1}{n-p+\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2\pi}\sum_{p=-n}^{n}\frac{1}{n+p+\frac{1}{2}} + \sum_{p=-n}^{n}\frac{1}{n-p+\frac{1}{2}}$$

Puis $\gamma_n * s_n(0) = \frac{1}{\pi}\sum_{p=-n}^{n}\frac{1}{n+p+1/2} = \frac{1}{\pi}\sum_{q=0}^{2n}\frac{1}{q+1/2} = \frac{2}{\pi}\sum_{q=0}^{2n}\frac{1}{2q+1}$

- On a pour $t \in [q,q+1]$ la double inégalité

$$\frac{1}{2q+3} \leq \frac{1}{2t+1} \leq \frac{1}{2q+1}$$

d'où

$$\int_0^{2n+1}\frac{dt}{2t+1} \leq \sum_{q=0}^{2n}\frac{1}{2q+1}$$

et

$$\sum_{q=0}^{2n}\frac{1}{2q+1} \leq 1 + \int_1^{2n}\frac{dt}{2t+1}$$

D'où en calculant les intégrales :

$$\frac{1}{2}\ln(4n+3) \leq \sum_{q=0}^{2n}\frac{1}{2q+1} \leq 1 + \frac{1}{2}(\ln(4n+3) - \ln 3)$$

Comme en $+\infty$ $\ln(\alpha n+\beta) \sim \ln n$, (pour $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$) il vient

$$\frac{1}{\ln n}\sum_{q=0}^{2n}\frac{1}{2q+1} \sim \frac{1}{2} \quad (\text{en } +\infty)$$

Puis $\gamma_n * s_n(0) \sim \frac{1}{\pi}\ln n \quad (\text{en } +\infty)$.

I.5.c. On a $\|S_n\| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} N_\infty(S_n(f))$. Comme $\|\gamma_n\|_\infty = 1$

il vient : $\|S_n\| \geqslant N_\infty(S_n(\gamma_n)) \geqslant |\gamma_n * s_n(0)|$.

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\|S_n\|/\ln(n+1) \geqslant |\gamma_n * s_n(0)|/\ln(n+1)$

D'après I.5.b., $\gamma_n * s_n(0)/\ln(n+1)$ est équivalent à $\frac{1}{\pi}$ en $+\infty$, il en résulte qu'il existe n_0 et $\alpha>0$ tels que

$$\forall n \geqslant n_0 \quad |\gamma_n * s_n(0)|/\ln(n+1) > \alpha$$

Comme pour $n \in \{1,2,\ldots n_0-1\}$ on a $|\gamma_n * s_n(0)|/\ln(n+1) > 0$

il vient, en posant $v = \min\left(\alpha, \min_{1\leq i\leq n_0-1}|\gamma_i * s_i(0)|/\ln(i+1)\right)$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |\gamma_n * s_n(0)|/\ln(n+1) \geqslant v.$$

d'où enfin : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \|S_n\| \geqslant v\ln(n+1)$.

II Approximation par la méthode de Fejer.

II.1. Calcul de la norme de l'endomorphisme K_n.

II.1.a.

La relation (1) donne pour $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$:

$$\sin t/2 \; k_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^{n} \sin(p+\tfrac{1}{2})t$$

Or, classiquement :

$$\sum_{p=0}^{n} \sin(p+\tfrac12)t = \operatorname{Im}\left(e^{it/2} \sum_{p=0}^{n} e^{ipt}\right) = \operatorname{Im}\left(e^{it/2} \frac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}}\right)$$

Puis :

$$\sum_{p=0}^{n} \sin(p+\tfrac12)t = \frac{1}{2\sin t/2} \operatorname{Im} i\left(1-e^{i(n+1)t}\right) = \frac{1}{2\sin t/2} \operatorname{Ré}\left(1-e^{i(n+1)t}\right)$$

Or : $\operatorname{Ré}\left(1-e^{i(n+1)t}\right) = 1-\cos(n+1)t = 2\sin^2(n+1)\frac{t}{2}$

D'où : $\sin t/2 \; k_n(t) = \frac{1}{\sin t/2} \sin^2(n+1)t/2$ et $k_n(t) = \frac{\sin^2(n+1)t/2}{\sin^2 t/2}$,

pour $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$

II.1.b. ▪ On a pour tout p tel que $0 \le |p| \le n$ $s_p \in E_n$.

Comme E_n est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}$, il vient $k_n \in E_n$.

▪ On remarque, grâce à (3) que k_n est une fonction positive (On a $k_n(2m\pi) = 1$) ; alors :

$$N_1(k_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k_n(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} s_p(t)\,dt.$$

Or $\int_{-\pi}^{\pi} s_p(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} e_0(t)\,dt = 2\pi$, car $\forall q \neq 0 \int_{-\pi}^{\pi} e_q(t)\,dt = 0$

D'où $N_1(k_n) = 1$.

▪ On a alors d'après <u>I.1.b.</u> : $\forall f \in \mathcal{C}$ $N_\infty(k_n * f) \le N_\infty(f)$.

On en déduit la continuité de l'opérateur K_n (défini par $K_n(f) = k_n * f$) et l'inégalité $\|K_n\| \le 1$

On a en particulier pour $f = e_0$:

$$K_n(e_0) = \frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n} s_p * e_0 = \frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n} e_0 * e_0 = e_0$$

(Car $e_0(t) \equiv 1$ et $e_p * e_0 = 0$, dès que $p \neq 0$).

De $N_\infty(K_n(e_0)) = N_\infty(e_0)$ il vient $\|K_n\| \ge 1$

et l'égalité demandé $\|K\| = 1$.

II.2. Approximation des fonctions continues

II.2.a. On a montré (II.1.b.) que $N(k_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k_n(t)\,dt = 1$

Il en résulte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - f * k_n(x) = f(x)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k_n(t)\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,k_n(t)\,dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - f(x-t)\right) k_n(t)\,dt.$$

II.2.b. Soit $\alpha \in]0,\pi]$, on a :

$$|f(x) - f * k_n(x)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} |f(x)-f(x-t)|\,k_n(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha \le |t| \le \pi} \left(|f(x)| + |f(x-t)|\right) k_n(t)\,dt$$

Comme $|f(x) - f(x-t)| \le \omega_f(\alpha)$, pour $t \in [-\alpha,\alpha]$. on a :

$$|f(x) - f * k_n(x)| \le \omega_f(\alpha) + \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha \le |t| \le \pi} \left(|f(x)| + |f(x-t)|\right) k_n(t)\,dt$$

On majore alors f par sa norme infinie pour obtenir

$$|f(x) - f * k_n(x)| \le \omega_f(\alpha) + \frac{N_\infty(f)}{\pi}\int_{\alpha \le |t| \le \pi} k_n(t)\,dt.$$

Compte tenue de la parité de $k_n(t)$, il vient, enfin

$$|f(x) - f * k_n(x)| \le \omega_f(\alpha) + \frac{2}{\pi} N_\infty(f)\int_{\alpha}^{\pi} k_n(t)\,dt$$

On a alors en passant au sup dans le membre de gauche

$$N_\infty(f - f * k_n) \le \omega_f(\alpha) + \frac{2}{\pi} N_\infty(f)\int_{\alpha}^{\pi} k_n(t)\,dt$$

II.2.c. De l'égalité (3), on tire ; pour $\alpha \in]0,\pi[$

$$\int_{\alpha}^{\pi} k_n(t)\,dt \le \frac{1}{n+1}\int_{\alpha}^{\pi}\frac{dt}{(\sin t/2)^2} \le \frac{\pi}{(n+1)\sin^2\alpha/2}$$

(Car $t \to 1/\sin^2 t/2$ est décroissante du $[\alpha,\pi]$.

On a alors $\lim_{n\to+\infty} k_n(t) = 0$ puisque $\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{(n+1)\sin^2\alpha/2} = 0$

II.2.d.

Soit $\varepsilon > 0$, Comme f est, périodique, continue elle est uniformément continue et il existe $\alpha > 0$ tel que $\omega_f(\alpha) \le \varepsilon/2$. Un tel α étant choisi il résulte du II.2.c. qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \ge n_0$ $\frac{2}{\pi} N_\infty(f)\int_{\alpha}^{\pi} k_n(t)\,dt \le \varepsilon/2$. On a alors pour tout $n \ge n_0$ $N_\infty(f - f * k_n) \le \varepsilon$.

D'où $\lim_{n\to+\infty} N_\infty(f - f * k_n) = 0$.

Remarque – pour ce II.2.d. on peut utiliser la notion de limite supérieure d'une suite. Pour une suite (u_n) on définit $\overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \operatorname{Inf}_n (\operatorname{Sup}_{k\geq n} u_n)$ ($\underline{\lim}_{n\to\infty} u_n = \operatorname{Sup}_n \operatorname{Inf}_{k\geq n} u_n$) ces quantités, éventuellement infinies s'appellent respectivement limite supérieure et limite inférieure de (u_n). On le théorème

Théorème (u_n) converge ssi $\overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n$. De plus on a alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n$.

Ici comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\pi} N_\infty(f) \int_\alpha^\pi k_n(t)\,dt = 0$, il vient que pour tout $\alpha \in]0,\pi[$ on a : $0 \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} N_\infty(f - f * k_n) \leq \omega_f(\alpha)$

Par l'argument d'uniforme continuité on sait que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$ $\omega_f(\alpha) < \varepsilon$. Donc :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad 0 \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} N_\infty(f - f * k_n) \leq \varepsilon$$

D'où $\overline{\lim}_{n\to+\infty} N_\infty(f - f * k_n) = 0$. On a alors nécessairement $\lim_{n\to+\infty} N_\infty(f - f * k_n) = 0$.

II.3. Approximation des fonctions lipschitziennes

II.3.a. Si f est lipschitzienne on a : $\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$ $|f(x) - f(x-t)| \leq \lambda(f)|t|$. En utilisant (4) il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x) - k_n * f(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lambda(f)|t| k_n(t)\,dt = \frac{\lambda(f)}{\pi}\int_0^\pi t\, k_n(t)\,dt.$$

(en utilisant la parité de k_n).

II.3.b. De manière analogue à I.4.c., on écrit :

$$\int_0^\pi t\, k_n(t)\,dt = \frac{1}{n+1}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{\sin t/2}\right)^2 \frac{\sin^2 (n+1)t/2}{t}\,dt \leq \frac{4p^2}{n+1}\int_0^{(n+1)\pi/2} \frac{\sin^2 y}{y}\,dy$$

(la dernière inégalité venant des majorations établies en I.4.c.)

II.3.c.

- On a d'abord $\sin^2 y \leq |\sin y|$ en utilisant II.4.d. $\int_0^{(n+1)\pi/2} (\sin^2 y)/y\,dy \leq 1 + \ln((n+1)\pi/2)$
- Puis en utilisant II.3.a et II.3.b. :

$$N_\infty(f - k_n * f) \leq \frac{\lambda(f)}{\pi}\frac{4p^2}{n+1}(1 + \ln((n+1)\pi/2))$$

- Alors la suite $n \mapsto N_\infty(f - k_n(f))((n+1)/\ln(n+1))$ est majorée par la suite $n \mapsto \frac{1}{\pi} 4p^2 (1 + \ln((n+1)\pi/2))/\ln(n+1)$. Cette dernière suite est convergente, donc majorée. Il existe $N' > 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall f \in \mathcal{C}$ $\frac{N_\infty(f - k_n(f))(n+1)}{\ln(n+1)} \leq N'\lambda(f)$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall f \in \mathcal{C} \quad N_\infty(f - k_n(f)) \leq N'\lambda(f)\frac{\ln(n+1)}{n+1}$

II.4. Retour à l'exemple du I.3.

II.4.a. La fonction γ vérifie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$|\gamma(x) - \gamma(y)| = \left||\sin \tfrac{x}{2}| - |\sin \tfrac{y}{2}|\right| \leq \left|\sin \tfrac{x}{2} - \sin \tfrac{y}{2}\right|$$

la fonction $t \to \sin t/2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $t \to \frac{1}{2}\cos t/2$ d'où :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |\gamma(x) - \gamma(y)| \leq \tfrac{1}{2}|x - y|$$

On en conclut de γ est lipschitzienne de rapport $1/2$

II.4.b. On a $\gamma(0) - \gamma * k_n(0) = \frac{1}{n+1}\left((n+1)\gamma(0) - \sum_{p=0}^n \gamma * S_p(0)\right)$
$= \frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^n (\gamma(0) - \gamma * S_p(0))$

II.4.c. le I.3.b. donne $\gamma(0) - \gamma * k_n(0) = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{2n+1}$.

D'où ici $\gamma(0) - \gamma * k_n(0) = -\frac{2}{\pi(n+1)}\sum_{p=0}^n \frac{1}{2n+1}$

Or selon un raisonnement analogue a I.5.b. on a :

$$\sum_{p=0}^n \frac{1}{2n+1} \geq \int_0^{n+1}\frac{dt}{2t+1} = \frac{1}{2}\ln(2n+3)$$

Il en résulte que $|\gamma(0) - \gamma * k_n(0)| \geq \frac{1}{\pi(n+1)}\ln(2n+3)$

On a $\ln(2n+3) \geq \ln(n+1)$ (puisque la fonction $\ln$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, puis $N_\infty(\gamma - \gamma * k_n) \geq |\gamma(0) - \gamma * k_n(0)|$ et enfin $\lambda(\gamma) = 1/2$: il vient finalement

$$N_\infty(\gamma - \gamma * k_n) \geq \frac{2}{\pi}\frac{\ln(n+1)}{n+1}\lambda(\gamma)$$

III Approximation par la méthode de Jackson.

III.1. Etude de l'endomorphisme J_n.

III.1.a. On a $k_n = \frac{1}{m+1} \sum_{p=0}^{m} s_p = \frac{1}{m+1} \sum_{p=0}^{m} \sum_{q=-p}^{p} e_q = \frac{1}{m+1} \sum_{p=0}^{m} \sum_{0 \le |q| \le p} e_q$

Donc, dans la somme définissant k_n, e_q apparait $m+1-|q|$ fois, pour q tel que $0 \le |q| \le m$. On a donc :

$$k_m = \frac{1}{m+1} \sum_{0 \le |q| \le m} (m+1-|q|)\, e_q = \sum_{0 \le |q| \le m} \left(1 - \frac{|q|}{m+1}\right) e_q$$

III.1.b.

- On a $N_1(k_m^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_m^2(t)\, dt = \langle k_m, k_m \rangle$, car les fonctions k_m sont à valeurs réelles (positives) (II.1.a.). Comme les $(e_n)_n$ forment un système orthonormal, il vient :

$$N_1(k_m^2) = \sum_{0 \le |p| \le m} \left(1 - \frac{|p|}{m+1}\right)^2 = (2m+1) - \frac{4}{m+1} \sum_{p=1}^{m} p + \frac{2}{(m+1)^2} \sum_{p=1}^{m} p^2$$

En utilisant $\sum_{p=1}^{m} p = m(m+1)/2$ et $\sum_{p=1}^{m} p^2 = m(m+1)(2m+1)/6$

il vient $N_1(k_m^2) = \frac{2m^2+4m+3}{3(m+1)} = \frac{2(m+1)^2+1}{3(m+1)}$

- On a par définition de j_{2m} $N_1(j_{2m}) = 1 = \lambda_m N_1(k_m^2)$

Il vient d'après le calcul précédent $\lambda_m = 3(m+1)/(2(m+1)^2+1)$

III.1.c.

De l'expression trouvée en III.1.a. et du fait que $e_p e_q = e_{p+q}$,

il vient $k_m^2 = \sum_{\substack{|p| \le m \\ |q| \le m}} (1-|p|/m+1)(1-|q|/m+1)\, e_{p+q}$

Dans la somme précédente on a $|p+q| \le |p|+|q| \le 2m$.

Il en résulte que k_m^2 appartient à E_{2m}.

Pour $n \in \mathbb{N}$, si n est pair j_n appartient à E_n, d'après le calcul précédent si n est impair, $n = 2m+1$, alors $j_n = j_{2m}$ et j_n appartient à E_{2m}. Comme E_{2m} est inclus dans E_n (car $2m < n$) il vient $j_n \in E_n$.

III.1.d.

- On a $J_n(e_0) = e_0 * j_n$ (Par définition de J_n) d'où $J_n(e_0) = N_1(j_n) = 1$ (par définition de j_n)

- On a aussi, d'après I.1.b., $N_\infty(J_n(f)) = N_\infty(j_n * f) \le N_\infty(f) N_1(j_n)$

D'où $N_\infty(J_n(f)) \le N_\infty(f)$. On en déduit la continuité de l'opérateur J_n et aussi : $\|J_n\| \le 1$. le calcul précédent montrant que $N_\infty(J_n(e_0)) = N_\infty(e_0) = 1$, il vient $\|J_n\| = 1$.

III.2. Approximation des fonctions continues.

- Comme $e_0 * j_n = e_0$, il vient selon le même argument qu'en II.2.a. $f(x) - f*j_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-t))\, j_n(t)\, dt$, pour toute $f \in \mathcal{C}$, tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- l'argument du II.2.b. conduit à la majoration, valable pour tout $\alpha \in]0, \pi]$ $N_\infty(f - J_n(f)) \le \omega_f(\alpha) + \frac{2}{\pi} N_\infty(f) \int_\alpha^\pi j_n(t)\, dt$

(On utilise la positivité de j_n et $N_1(j_n) = 1$).

- Par définition de j_n, il vient pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$\int_\alpha^\pi j_{2m}(t)\, dt = \int_\alpha^\pi j_{2m+1}(t)\, dt = \lambda_m \int_\alpha^\pi k_m^2(t)\, dt \le \frac{\lambda_m}{(m+1)^2} \int_\alpha^\pi \frac{dt}{\sin^4(t/2)}$$

(en utilisant l'expression (3) de k_m trouvée au II.1.a.)

Comme $t \to 1/\sin^4(t/2)$ est décroissante, il vient

$$\frac{\lambda_m}{(m+1)^2} \int_\alpha^\pi \frac{dt}{\sin^4(t/2)} \le \frac{\pi \lambda_m}{(m+1)^2 \sin^4(\alpha/2)} = \frac{3\pi}{(m+1)(1+2(m+1)^2)\sin^4(\alpha/2)},$$

Cette dernière égalité résultant de la valeur de λ_m. On en déduit que pour tout $\alpha \in]0, \pi[$ $\lim_{n \to +\infty} \int_\alpha^\pi j_n(t)\, dt = 0$.

- Par le même argument qu'en II.2.d. il vient alors

$$\lim_{n \to +\infty} N_\infty(f - J_n(f)) = 0$$

III.3. Approximation des fonctions lipschitziennes

III.3.a. Par un argument analogue au II.3.a., il vient

$$N_\infty(f - J_n(f)) \le \frac{\lambda(f)}{\pi} \int_0^\pi t\, j_n(t)\, dt$$

(On utilise la parité et la positivité de j_n).

III 3.b. D'après l'expression 4, on a pour $t \in]0,\pi]$

$$t\, J_{2m}(t) = \lambda_m\, t\, k_m^2(t) = \frac{\lambda_m}{(m+1)^2}\, t \left(\frac{\sin(m+1)t/2}{\sin t/2}\right)^4 = \frac{2^4\lambda_m}{(m+1)^2}\left(\frac{t/2}{\sin t/2}\right)^4 \frac{(\sin(m+1)t/2)^4}{t^3}$$

En utilisant pour $t \in]0,\pi]$ la majoration $\frac{t/2}{\sin t/2} \leq p$, déduite du I.4.c., il vient pour tout $t \in]0,\pi]$

$$t\, J_{2m}(t) \leq \frac{2^4 \lambda_m p^4}{(m+1)^2} \frac{(\sin(m+1)t/2)^4}{t^3}$$

Comme la fonction $t \mapsto (\sin(m+1)t/2)^4/t^3$ se prolonge par continuité en zéro, on a : $\int_0^\pi t\, J_{2m}(t)\,dt \leq \frac{2^4\lambda_m p^4}{(m+1)^2}\int_0^\pi \frac{(\sin(m+1)t/2)^4}{t^3}dt$

En effectuant dans la dernière intégrale le changement de variables $y = (m+1)t/2$ il vient $\int_0^\pi t\, J_{2m}(t)\,dt \leq 4\lambda_m p^4 \int_0^{\frac{(m+1)\pi}{2}} \frac{\sin^4 y}{y^3}dy$

III.3.c.

- La fonction $y \to \frac{\sin^4 y}{y^3}$ se prolonge par continuité en zéro. Par ailleurs on a : $\forall y > 0\ 0 \leq \frac{\sin^4 y}{y^3} \leq \frac{1}{y^3}$. Il en résulte que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 y}{y^3}dy$ est convergente.

Remarque. Cette intégrale est aussi absolument convergente puisque : $\forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad (\sin^4 y)/y^3 \geq 0$.

- Posons $B = \frac{4p^4}{\pi}\int_0^{+\infty} \sin^4 y / y^3\, dy$. On a d'après III 3.a. et III.3.b. $N_\infty(f - J_{2m}(f)) \leq \frac{\lambda(f)}{\pi}\int_0^\pi t\, J_n(t)\,dt \leq \lambda_m\, B\, \lambda(f)$.

En remplaçant λ_m par sa valeur, il vient :

$$N_\infty(f - J_{2m}(f)) \leq \lambda(f)\, B\, \frac{3(m+1)}{2(m+1)^2+1} \leq 3\, B\, \lambda(f) \frac{1}{2(m+1)} \leq \frac{3B\,\lambda(f)}{2m+1}$$

En posant $A = 3B$, il vient pour tout $m \in \mathbb{N}$.

$$N_\infty(f - J_{2m}(f)) \leq \frac{A\,\lambda(f)}{2m+1}$$

et $N_\infty(f - J_{2m+1}(f)) = N_\infty(f - J_{2m}(f)) \leq \frac{A\lambda(f)}{2m+2} = \frac{A\lambda(f)}{(2m+1)+1}$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad N_\infty(f - J_n(f)) \leq \frac{A\,\lambda(f)}{n+1}$ (6)

4. Optimalité de la majoration (6)

III.4.a.

- Comme $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{p=n+1}^{2n+1} s_p$ et que $s_p \in E_p$, il est clair que $v_n \in E_{2n+1}$

- On rappelle que pour tout couple d'entiers relatifs (m,q)

On a $e_m * e_q = \delta_{mq}\, e_m$. D'où :

1) $e_m * s_p = 0$ si $|m| > p$;

2) $e_m * s_p = e_m$ si $|m| \leq p$.

On a donc pour tout m tel que $|m| \leq n$

$$e_m * v_n = \frac{1}{n+1} e_m . \text{Card}\{p \in \mathbb{N} \mid n+1 \leq p \leq 2n+1\} = e_n$$

Il en résulte que pour la base $\{e_m\}_{-n \leq m \leq n}$ de E_n on a $h * e_m = e_m$. D'où par linéarité : $\forall h \in E_n \quad h * v_n = h$.

III.4.b.

- On a $(n+1)v_n = \sum_{p=n+1}^{2n+1} s_p = \sum_{p=0}^{2n+1} s_p - \sum_{p=0}^{n} s_p = (2n+2)k_{2n+1} - (n+1)k_n$ d'où après simplification $v_n = 2k_{2n+1} - k_n$.

- On a pour tout $g \in \mathcal{C}$ $g * v_n = 2g * k_{2n+1} - g * k_n$. De la majoration montrée en I.1.b., il vient $N_\infty(g * v_n) \leq 2N_\infty(g) N_1\, k_{2n+1} + N_\infty(g)\, N_1(k_n)$. Comme, pr $\forall q \in \mathbb{N}$ $N_1(k_q) = 1$, on obtient finalement $N_\infty(g * v_n) \leq 3N_\infty(g)$.

III.4.c. Soit $h \in E_n$. On a $\gamma - \gamma * v_n = \gamma - h + h - \gamma * v_n$. Comme $h \in E_n$, on a d'après III 4 a. $h * v_n = v$. On en déduit

$$\gamma - \gamma * h = \gamma - h - (\gamma - h) * v_n.$$

On a alors $N_\infty(\gamma - \gamma * h) \leq N_\infty(\gamma - h) + N_\infty((\gamma - h) * v_n)$. D'après III 4.b., il vient $N_\infty((\gamma - h) * v_n) \leq 3N_\infty(\gamma - h)$ d'où enfin :

$$N_\infty(\gamma - \gamma * h) \leq 4N_\infty(\gamma - h).$$

III.4.d. On a d'après I.3.b. pour tout p $\gamma * s_p(0) - \gamma(0) = \frac{2}{\pi(p+1)}$

On en déduit $\gamma * v_n(0) - \gamma(0) = \frac{1}{n+1}\frac{2}{\pi}\sum_{p=n+1}^{2n+1}\frac{1}{2p+1} \geq \frac{2}{\pi}\frac{1}{2(2n+1)+1}$

Or $\frac{2}{\pi}\frac{1}{2(2n+1)+1} \geq \frac{2}{\pi}\frac{1}{2(2n+1)+2} \geq \frac{1}{\pi}\frac{1}{2n+1} \geq \frac{1}{2\pi(n+1)}$

D'où : $N_\infty|\gamma - h| \geq \frac{1}{4}N_\infty(\gamma - \gamma * h) \geq \frac{1}{4}|\gamma(0) - \gamma * v_n(0)| \geq \frac{1}{8\pi(n+1)}$

Comme $\lambda(\gamma) = \frac{1}{2}$ (voir II.4.a.) on a :

$$N_\infty|\gamma - h| \geq \frac{1}{4\pi(n+1)}\lambda(\gamma).$$

Remarque. La méthode de Jackson est optimale, pour l'approximation, en norme infinie, d'un élément de $\mathcal{C}$ par un élément de E_n dans le sens suivant. Pour tout opérateur L_n linéaire et continu de $\mathcal{C}$ dans E_n on aura d'après la question III.4.d. $N_\infty(\gamma - L_n(\gamma)) \geq \lambda(f)/(4\pi(n+1))$. (puisque $L_n(\gamma) \in E_n$). En particulier pour J_n on aura $N_\infty(\gamma - J_n(\gamma)) \geq \lambda(f)/(4\pi(n+1))$. Comme par ailleurs, pour toute f lipschitzienne on a (6) $N_\infty(f - J_n(f)) \leq A\lambda(f)/(n+1)$, l'opérateur J_n est optimal (à la constante A près).

IV Approximation des fonctions de classe C^r.

IV.1. Approximation et dérivation.

IV.1.a. Comme g est de classe C^1, 2π périodique Dg est aussi 2π-périodique, continue et donc bornée. Alors g est lipschitzienne de rapport $N_\infty(Dg)$ et on a d'après (6) (voir III.4.c.)

$$N_\infty(W_n(g)) \leq A/(n+1)\, N_\infty(Dg).$$

IV.1.b. ▪ Par définition $g * e_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x-t)e_n(t)\,dt$. Or la fonction $\begin{cases} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ (x,t) \longmapsto g(x-t)\,e_n(t) \end{cases}$ admet une dérivée partielle continue par rapport à x : il en résulte que $g * e_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $D(g*e_n)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Dg(x-t)\,e_n(t)\,dt = Dg * e_n(x)$.

▪ Comme $J_n(f) = j_n * f$, avec j_n combinaison linéaire des e_m, $|m| \leq n$ on a $D(J_n(g)) = D(j_n * g) = j_n * Dg$, par linéarité.

Puis $D\,W_n(g) = D(g - j_n * g) = Dg - j_n * Dg = W_n(Dg)$.

IV.2. Approximation des fonctions de classe C^1 ou C^2.

IV.2.a.

▪ Soit $f \in \mathcal{C}^1$. Comme $J_n(f) = j_n * f$, $J_n(f)$ appartient à E_n d'après III.1.c. Comme de la même façon $J_n(W_n(f)) \in E_n$, on en déduit que $J_{n,1}(f)$ appartient à E_n.

▪ Chacun des opérateurs J_n et W_n étant continu on en déduit que les opérateurs $J_n \circ W_n$ et $J_{n,1} = J_n + J_n \circ W$ sont continus.

On a alors $\|J_{n,1}\| \leq \|J_n(f)\| + \|J_n \circ W\|$.

Or $\|J_n \circ W\| \leq \|J_n\|\,\|W\| \leq \|J_n\|(\|Id\| + \|J_n\|)$

(où Id est l'opérateur identité de $\mathcal{C}$).

Comme $\|J_n\| = 1$ (voir III.1.d.), on a $\|J_{n,1}\| \leq 3$.

Remarque. – On a utilisé le résultat suivant. Soient E, F et G trois espaces normés. Soit f (resp. g) une application linéaire de E dans F (resp. de F dans G) alors $g \circ f$ est continue et sa norme vérifie $\|g \circ f\| \leq \|g\|\,\|f\|$.

IV.2.b. ▪ En appliquant le IV.1.a. à $W(f)$ (qui est de classe C^1) il vient $N_\infty(W_n^2(f)) \leq \frac{A}{n+1} N_\infty D(W_n(f))$.

Comme D et W commutent (IV.1.b.) il vient

$$N_\infty(W_n^2(f)) \leq \frac{A}{n+1} N_\infty(W_n Df)).$$

▪ Il s'agit de remarquer que :

$f - J_{n,1}(f) = f - (J_n(f) + J_n W_n(f)) = W_n(f) - J_n(W_n(f)) = W_n^2(f)$.

Alors $N_\infty(f - J_{n,1}(f)) = N_\infty(W_n^2(f)) \leq \frac{A}{n+1} N_\infty(W_n(D(f)))$

On a donc $(n+1) N_\infty(f - J_{n,1}(f))) \leq A . N_\infty(W_n(Df)))$.

Mais Df est continue alors d'après III.2. $\lim_{n\to+\infty} N_\infty W_n(D(f)) = 0$

On en déduit le résultat.

▪ Si f est de classe C^2 Df est lipschitzienne, et il vient d'après l'inégalité (6) du III.3.c. $N_\infty(W_n(Df)) \leq \frac{A}{n+1}\lambda(D(f))$ avec $\lambda(D(f)) \leq N_\infty(D^2 f)$. D'où l'inégalité

$$N_\infty(f - J_{n,1} f) \leq \frac{A^2}{(n+1)^2} N_\infty(D^2 f)$$

IV.3. Approximation des fonctions de classe C^r ou C^{r+1}

▪ On notera Id l'identité de $\mathscr{C}$. Rappelons que l'opérateur $J_{n,1}$ est défini par la relation $J_{n,1} = J_n + J_n \circ W$ et que dans IV.2.b. on a prouvé que $J_{n,1} = Id - W_n^2$ ..

▪ On définit alors, pour $r \geq 2$, par récurrence la suite d'opérateurs $(J_{n,r})_{r\geq 1}$ en posant $J_{n,r} = Id - W_n^{r+1}$.

On a alors $J_{n,r} = J_{n,r-1} + J_n \circ W_n^r$. (7).

(En effet : $J_{n,r} = Id - W_n^{r+1} = Id - W_n^r + (Id - W_n) W_n^r = J_{n,r-1} + J_n \circ W_n^r$

▪ Comme les opérateurs J_n et W_n sont continus, la relation (7) montre, par récurrence la continuité de $J_{n,r}$. Comme J_n est à valeurs dans E_n, (7) montre aussi par récurrence que $J_{n,r}$ est à valeurs dans E_n

▪ Du IV.1.a. on tire la majoration, valable pour toute $g \in \mathscr{C}^r$: $N_\infty(W_n^r g) \leq \frac{A}{n+1} N_\infty(D W_n^{r-1} g)$.

Du IV.1.b. on déduit que $D W_n^{r-1} = W_n^{r-1} D$. D'où :

$N_\infty(W_n^r g) \leq \frac{A}{n+1} N_\infty(W_n^{r-1} Dg)$. Une récurrence (assez immédiate) montre alors que $N_\infty(W_n^r g) \leq \left(\frac{A}{n+1}\right)^r N_\infty(D^r g)$

▪ Pour toute $f \in C^r$ on a $f - J_{n,r}(f) = W_n^{r+1} f$. D'où

$N_\infty(f - J_{n,r}(f)) = N_\infty(W_n^{r+1} f) = N_\infty(W_n^r(Wf)) \leq \left(\frac{A}{n+1}\right)^r N_\infty(D^r W_n f)$

On a $D^r W_n f = W_n D^r f$, toujours par IV.1.b.

Comme $D^r f$ est continue et que $W_n D^r f = D^r f - J_n D^r f$ on tire du III.2. que $\lim_{n\to+\infty} N_\infty(D^r W_n f) = 0$ (c'est l'argument du IV.2.b.) On a donc bien

$$N_\infty(f - J_{n,r}(f)) = o\left(\left(\frac{1}{n+1}\right)^r\right)$$

▪ Pour $f \in C^{r+1}$ on a directement la majoration

$$N_\infty(f - J_{n,r}(f)) = N_\infty(W_n^{r+1}(f)) \leq \left(\frac{A}{n+1}\right)^{r+1} N_\infty(D^{r+1} f).$$

en appliquant l'inégalité (8) avec $r+1$ au lieu de r

CAPES externe 1986 composition 2

SESSION DE 1986

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème. L'emploi des instruments de calcul est autorisé pour cette épreuve.

Notations et objectif du problème

Dans tout le problème on se place dans un plan noté E; la distance de deux points x et y de E est notée $d(x, y)$, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est noté $\vec{v}.\vec{w}$. Étant donné une partie P fermée non vide de E et un point x de E, on appelle distance de x à P et on note $d(x, \mathrm{P})$ le nombre réel positif défini par la relation

$$d(x, \mathrm{P}) = \inf_{u \in \mathrm{P}} d(x, u).$$

Étant donné un nombre réel $\alpha \geqslant 0$, on note $\mathrm{B}(\mathrm{P}, \alpha)$, ou encore $\mathrm{B}(\alpha)$, l'ensemble des points x de E tels que $d(x, \mathrm{P}) \leqslant \alpha$; si $\alpha > 0$, on note $\mathrm{L}(\mathrm{P}, \alpha)$, ou encore $\mathrm{L}(\alpha)$, l'ensemble des points x de E tels que $d(x, \mathrm{P}) = \alpha$. Les lignes de niveau $\mathrm{L}(\alpha)$ sont appelées *lignes de distance* à P. Étant donné des parties A et B fermées non vides de E, on appelle *médiatrice* de A et B et on note $\mathrm{M}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ l'ensemble des points x de E tels que $d(x, \mathrm{A}) = d(x, \mathrm{B})$. Plus généralement, étant donné un nombre réel λ appartenant à $[0, 1]$, on appelle *ligne de partage entre* A *et* B dans le rapport λ l'ensemble $\mathrm{C}(\lambda)$ des points x de E tels que $(1 - \lambda)\, d(x, \mathrm{A}) = \lambda\, d(x, \mathrm{B})$.

L'objectif du problème est d'étudier la fonction distance et les lignes de distance, ce qui fait l'objet des parties I et II, et les lignes de partage, ce qui fait l'objet de la partie III. Les médiatrices sont étudiées dans la partie II : elles fournissent un exemple important de ligne de partage, mais elles constituent aussi un outil intéressant pour la recherche des lignes de distance. Enfin, dans la partie III, on étudie les fonctions dont les lignes de niveau sont les lignes de partage. Le problème combine la mise en œuvre des méthodes de la géométrie élémentaire avec celle de quelques outils topologiques simples.

I. Lignes de distance à une partie

On désigne par P une partie fermée non vide de E.

Étant donné un point a de P, on appelle *zone d'attraction de a relative* à P et on note $\mathrm{Z}(a)$ l'ensemble des points x de E tels que $d(x, \mathrm{P}) = d(x, a)$, c'est-à-dire tels que la distance $d(x, \mathrm{P})$ soit atteinte au point a.

1. PROPRIÉTÉS DE LA DISTANCE À UNE PARTIE.

a. Soit x un point de E; montrer qu'il existe au moins un point a de P tel que $d(x, \mathrm{P}) = d(x, a)$.

b. Prouver que, pout tout couple (x, y) de points de E,

$$d(x, \mathrm{P}) \leqslant d(x, y) + d(y, \mathrm{P})$$

En déduire que la fonction $x \longmapsto d(x, \mathrm{P})$ est lipschitzienne sur E dans le rapport 1.

Tournez la page S. V. P.

2. Propriétés élémentaires des zones d'attraction.

Soit a un point de P.

a. Caractérisation de la zone d'attraction de a à l'aide de demi-plans.

Soit x un point de E. Montrer qu'il est équivalent de dire :

α. Le point x appartient à Z (a);

β. Pour tout point b de P différent de a, le point x appartient au demi-plan fermé $H_b(a)$ limité par la médiatrice des points a et b et contenant a.

b. Montrer que a appartient à Z (a) et que Z (a) $\cap$ P est réduite au point a. Déterminer Z (a) lorsque a appartient à l'intérieur de P.

c. Montrer que la réunion des zones d'attraction Z (u), où u parcourt P, est égale à E.

d. Établir que Z (a) est une partie fermée de E.

e. Application à la recherche des lignes de distance.

Soit L (α) une ligne de distance à P. Montrer que L (α) $\cap$ Z (a) = $\Gamma(a, \alpha)$ $\cap$ Z (a), où $\Gamma(a, \alpha)$ désigne le cercle de centre a et de rayon α.

3. Exemples usuels de zones d'attraction et de lignes de distance.

a. Préciser sur des figures les zones d'attraction des points de P lorsque P est un demi-plan, une droite, un segment, un disque, un cercle.

b. Dans chacun de ces cas, déterminer les lignes de distance à P, et tracer sur les figures précédentes quelques-unes de ces lignes.

Déterminer aussi les points x de E tels que la distance $d(x, \text{P})$ soit atteinte en un point a et un seul.

4. Description géométrique des zones d'attraction.

Soit a un point de P.

a. Caractérisation géométrique des zones d'attraction.

Soit x un point de E distinct de a ; montrer qu'il est équivalent de dire :

α. Le point x appartient à Z (a) ;

β. Le disque ouvert de centre x et de rayon $\alpha = d(x, a)$ ne rencontre pas P.

b. Soit b un point de P distinct de a tel que le segment $[a, b]$ soit contenu dans P. Montrer que Z (a) $\cap$ Z (b) est vide.

c. On suppose que Z (a) contient un point x distinct de a. Montrer que pour tout point y de $[a, x]$ distinct de x, la distance $d(y, \text{P})$ est atteinte au seul point a ; en particulier Z (a) contient $[a, x]$.

d. Étant donné un vecteur unitaire $\vec{k}$, on note $\Delta(\vec{k})$ la demi-droite d'origine a constituée des points x tels que $\overrightarrow{ax} = \lambda \vec{k}$, où $\lambda \geqslant 0$. Montrer qu'il est équivalent de dire :

α. La zone d'attraction Z (a) contient $\Delta(\vec{k})$;

β. Pour tout point u de P, $\vec{k}.\overrightarrow{au} \leqslant 0$.

e. Donner un exemple d'une partie P et d'un point a de la frontière de P tel que Z (a) soit réduite au point a.

5. Propriétés topologiques des lignes de distance.

a. Montrer que, pour tout nombre réel $\alpha \geqslant 0$, B (α) est une partie fermée de E contenant P; comparer B (0) et P.

b. Soient α et β des nombres réels strictement positifs; montrer que B (B (α), β) = B $(\alpha + \beta)$.

c. Montrer que, pour tout nombre réel $\alpha > 0$, la ligne de distance L (α) est une partie fermée de E, et que l'intérieur de L (α) est vide (on pourra utiliser 4.*c*).

d. On suppose que P est distincte de E. Montrer que l'ensemble I des nombres réels strictement positifs α tels que L (α) soit non vide est un intervalle non vide d'origine 0, et que, si P est compacte, I $=]0, +\infty[$. Donner un exemple de partie P telle que I $=]0, 1]$ et un exemple de partie P telle que I $=]0, 1[$.

6. Cas des parties convexes.

On suppose que P est convexe et distincte de E.

a. Prouver que, pour tout point x de E n'appartenant pas à P, la distance $d(x, \mathrm{P})$ est atteinte en un point a de P et un seul. Montrer que P est contenue dans le demi-plan constitué des points u de E tels que $\overrightarrow{ax} . \overrightarrow{au} \leqslant 0$, et que Z (a) contient la demi-droite d'origine a passant par x.

b. Montrer que, pour tout nombre réel $\alpha > 0$, B (α) est une partie convexe de E et que L (α) est la frontière de B (α).

c. *Les résultats de cette question ne sont pas utilisés dans la suite du problème.*

On suppose que P est une partie convexe compacte d'intérieur non vide, dont la frontière C admet des points anguleux $b_0, b_1, \ldots, b_n$, où $b_n = b_0$, chacun des arcs C_j de C d'origine b_j et d'extrémité b_{j+1}, où $0 \leqslant j \leqslant n-1$, étant de classe C^∞. En tout point a de C_j, on note $\overrightarrow{k_j}(a)$ le vecteur unitaire normal à C_j au point a tel que P soit contenue dans le demi-plan $\overrightarrow{k_j}(a) . \overrightarrow{au} \leqslant 0$.

Montrer que si a appartient à C_j, $a \neq b_j$, $a \neq b_{j+1}$, Z (a) est égale à la demi-droite $\Delta(\overrightarrow{k_j}(a))$. Déterminer Z (a) lorsque a est un des points b_j.

Prouver enfin que, pour tout $\alpha > 0$, la ligne de distance L (α) est de classe C^1.

II. Médiatrice de deux parties

1. Propriétés topologiques de la médiatrice.

On désigne par A et B des parties fermées non vides de E.

a. Montrer que pour tout point a de A et pour tout point b de B le segment $[a, b]$ coupe la médiatrice M (A, B) en au moins un point.

b. Montrer que la partie M (A, B) est fermée et contient A $\cap$ B.

c. On suppose que A et B sont disjointes; prouver que M (A, B) est d'intérieur vide (on pourra utiliser I.4.*c*).

2. Médiatrice et lignes de distance.

Soit P une partie fermée non vide de E.

a. Soit A une partie fermée non vide de P. On appelle *zone d'attraction de* A *relative* à P l'ensemble Z(A) des points x de E tels que $d(x, \mathrm{P}) = d(x, \mathrm{A})$. (Lorsque A est réduite à un point a, on retrouve Z (a).)

Montrer que Z (A) est une partie fermée de E contenant A et que Z (A) est la réunion des zones d'attraction Z (a), où a parcourt A.

Soit alors L (P, α) une ligne de distance à P; montrer que L $(\mathrm{P}, \alpha) \cap$ Z (A) $=$ L $(\mathrm{A}, \alpha) \cap$ Z (A).

b. On suppose que P est la réunion de deux parties fermées non vides A et B.

Montrer qu'un point x de E appartient à la zone d'attraction Z (A) (relative à P) si, et seulement si, $d(x, \mathrm{A}) \leqslant d(x, \mathrm{B})$. En déduire que Z (A) $\cup$ Z (B) $=$ E et que Z (A) $\cap$ Z (B) $=$ M (A, B).

c. On suppose plus généralement que P est la réunion de parties fermées non vides $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$. Étant donné un élément j de $[1, n]$, montrer qu'un point x de E appartient à la zone d'attraction Z (A_j) si, et seulement si, pour tout $i \neq j$, $d(x, \mathrm{A}_j) \leqslant d(x, \mathrm{A}_i)$.

En déduire une méthode d'obtention d'une ligne de distance L (P, α) connaissant les zones d'attraction Z (A_j) et les lignes de distance L (A_j, α).

Tournez la page S. V. P.

3. Médiatrice et symétries.

Soit A et B des parties fermées non vides de E, et $P = A \cup B$.

a. On suppose que A et B sont invariantes par une isométrie h de E (c'est-à-dire que $h(A) = A$ et $h(B) = B$). Montrer que Z (A), Z (B) et M (A, B) sont aussi invariantes par h.

b. On suppose qu'une symétrie orthogonale h (c'est-à-dire, soit une symétrie centrale, soit une réflexion) échange A et B; montrer qu'elle échange aussi Z (A) et Z (B), que M (A, B) est invariante par h et que M (A, B) contient les points fixes de h.

c. On suppose enfin qu'une réflexion h d'axe D échange A et B et que A est contenue dans un des demi-plans ouverts limités par D. Prouver que Z (A) est le demi-plan fermé limité par D contenant A; en déduire que M (A, B) = D.

4. Exemples d'emploi de médiatrices pour la recherche de lignes de distance.

Soient a et b deux points distincts de E.

a. Préciser sur une figure l'ensemble M (A, B), les zones Z (A) et Z (B), ainsi que les lignes de distance à $P = A \cup B$ lorsque A et B sont réduites respectivement aux points a et b. (On prendra $d(a, b) = 4$, l'unité graphique étant le centimètre.)

b. Même question lorsque A est réduite au point a, et que B est la droite orthogonale en b à $\overrightarrow{ab}$.

c. Même question lorsque A et B sont des droites sécantes en un point o.

d. On considère un carré $acbd$ admettant ab pour diagonale. Soit C le quart de cercle de centre d ayant pour extrémités a et b, A et B les demi-droites portées respectivement par ac et bc, d'origine a et b, et ne contenant pas c. Placer A, B, C sur une même figure, préciser les zones d'attraction des parties A, B, C relatives à $P = A \cup B \cup C$, ainsi que les lignes de distance à P. Ces lignes sont-elles des courbes de classe C^1 ?

e. On considère maintenant un triangle aba' rectangle en a et isocèle; soit b' le symétrique de a' par rapport au milieu de ab. On prend pour partie A la réunion du segment $[a, a']$ et du quart de cercle de centre b ayant pour extrémités a et b', pour partie B la symétrique de A par rapport au milieu de ab. Placer A et B sur une même figure, déterminer la médiatrice M (A, B) et tracer quelques lignes de distance à $P = A \cup B$.

III. Lignes de partage entre deux parties

Soient A et B deux parties fermées non vides de E disjointes.

On se propose d'étudier les lignes de partage C (λ) entre A et B.

1. Distance de deux parties.

On appelle distance de A et B le nombre réel positif δ défini par la relation $\delta = \inf_{u \in A,\, v \in B} d(u, v)$.

a. Prouver que si l'une des deux parties A et B, par exemple B, est compacte, alors il existe un point a de A et un point b de B tels que $d(a, b) = \delta$.

b. Donner un exemple où les parties A et B sont convexes et où $\delta = 0$.

c. Prouver que pour tout point x de E,

$$d(x, A) + d(x, B) \geqslant \delta \quad \text{et} \quad d(x, A) + d(x, B) > 0$$

2. Propriétés topologiques des lignes de partage.

a. Montrer que pour tout point a de A et pour tout point b de B le segment $[a, b]$ coupe toute ligne de partage C (λ). On suppose en outre que $d(a, b) = \delta$; montrer que, pour tout élément λ de [0, 1], le point c_λ défini par la relation $\overrightarrow{ac_\lambda} = \lambda\, \overrightarrow{ab}$ appartient à la ligne de partage C (λ).

b. Prouver que, pour tout $\lambda \in]0, 1[$, l'ensemble C (λ) est une partie fermée de E d'intérieur vide.

3. Mise en œuvre de lieux géométriques usuels pour la recherche de lignes de partage.

   a. Indiquer la nature des lignes de partage de deux points, puis d'un point et d'une droite.

   b. On munit E d'un repère orthonormal $(o, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $a = (2, 0)$, $a' = (2, 4)$ et leurs symétriques b et b' par rapport à o. Placer ces points sur une figure, l'unité graphique étant le centimètre. Soit A le segment $[a, a']$ et B le segment $[b, b']$. Tracer la médiatrice de A et B, c'est-à-dire la ligne de partage $C\left(\frac{1}{2}\right)$, et les lignes de partage $C\left(\frac{1}{4}\right)$ et $C\left(\frac{3}{4}\right)$.

4. Fonction canonique de partage.

   Soit f la fonction numérique définie sur E par la relation

$$f(x) = \frac{d(x, \text{A})}{d(x, \text{A}) + d(x, \text{B})}.$$

   Cette fonction, à valeurs dans $[0, 1]$, est appelée fonction canonique de partage, car, pour tout élément λ de $[0, 1]$, la ligne de niveau $f(x) = \lambda$ n'est autre que la ligne de partage $C(\lambda)$.

   a. Montrer que f est continue sur E.

   b. On suppose que la distance δ de A et B est strictement positive. Montrer que f est lipschitzienne dans le rapport $\frac{1}{\delta}$.

5. Détermination des fonctions de partage.

   On appelle fonction de partage une fonction continue sur E, à valeurs dans $[0, 1]$, admettant pour lignes de niveau les lignes de partage, s'annulant sur A et prenant la valeur 1 sur B.

   a. Soit ω un homéomorphisme strictement croissant de $[0, 1]$ sur lui-même. Montrer que $\omega \circ f$ est une fonction de partage.

   b. Inversement soit g une fonction de partage. On désigne par ω la fonction qui à tout élément λ de $[0, 1]$ associe la valeur de g sur $C(\lambda)$. Pour simplifier, on suppose que B est compacte.

   Montrer que $g = \omega \circ f$, que ω est injective et que $\omega(0) = 0$ et $\omega(1) = 1$.

   On considère un segment $[a, b]$, où $a \in \text{A}$ et $b \in \text{B}$, tel que $d(a, b) = \delta$, et, pour tout élément λ de $[0, 1]$, on définit c_λ comme au 2.*a*. Montrer que $\omega(\lambda) = g(c_\lambda)$; en déduire que ω est un homéomorphisme strictement croissant de $[0, 1]$ sur lui-même.

   c. On suppose encore que B est compacte, et que g est une fonction de partage lipschitzienne dans un rapport ρ. Montrer que ω est lipschitzienne dans le rapport $\rho\,\delta$. En déduire que $\rho\,\delta \geqslant 1$; ainsi ρ est nécessairement supérieur à $\frac{1}{\delta}$.

   Prouver enfin que si $\rho = \frac{1}{\delta}$, alors, pour tout élément λ de $[0, 1]$, $\omega(\lambda) = \lambda$. Ainsi, f est la seule fonction de partage lipschitzienne dans le rapport $\frac{1}{\delta}$.

CAPES externe 1987 composition 1

SESSION DE 1987

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

L'usage des instruments de calcul, en particulier des calculatrices électroniques de poche — y compris calculatrice programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Tournez la page S. V. P.

NOTATIONS ET OBJECTIF DU PROBLEME

Dans tout ce problème on désigne par c un nombre réel positif ou nul, et par C^{∞} l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles ou complexes, indéfiniment dérivables sur l'intervalle $[c,+\infty[$.

On désigne par E le sous-espace vectoriel de C^{∞} constitué des fonctions f admettant 0 pour limite en $+\infty$ ainsi que toutes leurs dérivées successives $f^{(p)}$.

Pour tout élément f de E, on pose

$$N_{\infty}(f) = \sup_{t \geqslant c} |f(t)|,$$

et

$$N_1(f) = \int_c^{+\infty} |f(t)|\,dt$$

lorsque cette intégrale converge.

On désigne par E_+ la partie de E constituée des fonctions f à valeurs réelles positives et telles que, pour tout entier $p \geqslant 1$, $(-1)^p f^{(p)}$ soit à valeurs réelles positives.

On note D et Δ les endomorphismes de E qui à tout élément f associent les fonctions définies par les relations $Df(x)=f'(x)$ et $\Delta f(x)=f(x)-f(x+1)$. Enfin, l'application identique de E est notée I. On observera que les endomorphismes D et Δ commutent, ce qu'on écrira $D\Delta=\Delta D$.

L'objectif de ce problème est d'étudier l'opérateur Δ, ce qui fait l'objet de la partie II, et d'exploiter cet opérateur pour construire et étudier un procédé d'accélération de convergence des séries alternées, dû à L.Euler, ce qui fait l'objet de la partie III. Dans la partie I, on explore quelques propriétés de E et de E_+ utiles pour la suite.

I - ETUDE DE LA DOMINATION PAR UN ELEMENT DE E_+.

1. *Stabilité de* E_+.

a) Prouver que E est une sous-algèbre de l'algèbre C^{∞}.

b) Prouver que si φ et ψ sont des éléments de E_+, alors $\varphi+\psi$ et $\varphi\psi$ appartiennent encore à E_+, ainsi que $\lambda\varphi$, où λ est réel positif.

Tournez la page S. V. P.

c) Prouver que, pour tout élément φ de E_+, $-D\varphi$ et $\Delta\varphi$ appartiennent encore à E_+.

2. *Etude d'exemples.*

a) Déterminer les nombres réels α tels que la fonction $x \mapsto e^{-\alpha x}$ appartienne à E_+.

b) Déterminer les nombres réels a et α tels que la fonction $x \mapsto (x-a)^{-\alpha}$ appartienne à E_+.

c) Prouver que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ n'appartient pas à E_+.

3. *Domination par un élément de* E_+.

Soit φ un élément de E_+. On note $M(\varphi)$ l'ensemble des éléments f de C^∞ tels que, pour tout $p \geqslant 0$, $|D^p f| \leqslant |D^p \varphi|$, et $B(\varphi)$ l'ensemble des éléments f de C^∞ tels que, pour tout $p \geqslant 0$, il existe un nombre réel $\alpha_p > 0$ tel que $|D^p f| \leqslant \alpha_p |D^p \varphi|$.

a) Prouver $B(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de E, et que, pour tout élément f de $B(\varphi)$, l'intégrale $\int_c^{+\infty} |D^p f(t)|dt$ est convergente.

b) Soient φ et Ψ des éléments de E_+. Montrer que si f appartient à $M(\varphi)$ et g à $M(\Psi)$, alors f+g appartient à $M(\varphi+\Psi)$, fg appartient à $M(\varphi\Psi)$, et λf appartient à $M(|\lambda|\varphi)$, pour tout nombre complexe λ.

c) Prouver que, si f appartient à $M(\varphi)$, alors Df appartient à $M(|D\varphi|)$.

d) Soit f un élément de $M(\varphi)$; prouver que, pour tout nombre réel $x \geqslant c$,

$$|f(x)-f(x+1)| \leqslant \varphi(x) - \varphi(x+1).$$

A cet effet, on pourra utiliser la relation

$$f(x+1)-f(x) = \int_x^{x+1} f'(t)dt.$$

Etablir que Δf appartient à $M(\Delta\varphi)$.

e) Soit φ un élément de E_+. Prouver que $\Delta\varphi$ appartient à $M(|D\varphi|)$ et, plus généralement, que pour tout $p \geqslant 1$, $\Delta^p \varphi$ appartient à $M(|D^p \varphi|)$.

4. *Etude d'exemples.*

a) Soit $z=a+ib$ un nombre complexe, où a et b sont réels.

Montrer que, si $a<c$, alors, pour tout entier $k\geqslant 1$, $x\mapsto \frac{1}{(x-z)^k}$ appartient à $M\left(\frac{1}{(x-a)^k}\right)$.

b) Soit plus généralement P un polynôme unitaire à coefficients réels ou complexes de degré $n\geqslant 1$, dont toutes les racines ont une partie réelle inférieure ou égale à a. Montrer que, si $a<c$, $x\mapsto \frac{1}{P(x)}$ appartient à $M\left(\frac{1}{(x-a)^n}\right)$

Examiner le cas de la fonction $x\mapsto \frac{1}{x^2+1}$.

c) Soit R une fraction rationnelle de degré $-n$, où $n>0$, dont tous les pôles sont simples et ont une partie réelle inférieure ou égale à a. Montrer que si $a<c$, il existe un nombre réel $k>0$ tel que $x\mapsto R(x)$ appartienne à $M\left(\frac{k}{(x-a)^n}\right)$. Pour cela, on pourra se ramener au cas où $n=1$, en considérant $x\mapsto (x-a)^{n-1}R(x)$.

Examiner le cas de la fonction $x\mapsto \frac{x}{x^2+1}$.

d) Soient $\gamma=\alpha+i\beta$ un nombre complexe tel que $\alpha>0$ et $0\leqslant\beta<2\pi$, et g un élément 1-périodique de $C^{\infty}(\mathbb{R})$. Prouver que la fonction $x\mapsto f(x)=e^{-\gamma x}g(x)$ appartient à $B(e^{-\alpha x})$.

Montrer, en revanche, que, sauf dans le cas où $\beta=0$ et g est constante, il n'existe pas de nombre réel $k>0$ tel que f appartienne à $M(ke^{-\alpha x})$. A cet effet, on pourra développer g en série de Fourier sous la forme

$$g(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g)e^{2i\pi nx}, \text{ où } c_n(g)=\int_0^1 g(t)e^{-2i\pi nt}dt,$$

calculer D^pf en dérivant terme à terme, l'écrire sous la forme $D^pf(x)=e^{-\gamma x}g_p(x)$, et calculer $|c_n(g_p)|$.

I - ETUDE DE L'OPERATEUR Δ.

1. *Etude de l'opérateur* D.

a) Déterminer le noyau de l'endomorphisme D.

b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de D. Quels sont les vecteurs propres appartenant à E_+?

c) Montrer que l'image de D n'est autre que le sous-espace vectoriel E_1 de E constitué des fonctions g telles que $\int_c^{+\infty} g(t)dt$ converge.

d) Comparer $D(E_+)$ et $E_+ \cap E_1$.

e) Soit Ψ un élément de $E_+ \cap E_1$, et g un élément de $M(\Psi)$. Montrer qu'il existe un élément φ et un seul de E_+ tel que $D\varphi = -\psi$ et un élément f et un seul de E tel que $Df=g$, et que, dans ces conditions, f est un élément de $M(\varphi)$.

f) Enoncer et démontrer un résultat analogue lorsque g appartient à $B(\Psi)$.

22. <u>*Comparaison de Δ et de D.*</u>

Soit f un élément de E.

a) Prouver que $N_\infty(\Delta f) \leqslant N_\infty(Df)$,

et, plus généralement, que, pour tout entier $p \geqslant 1$,

(1) $$N_\infty(\Delta^p f) \leqslant N_\infty(D^p f).$$

b) On suppose que l'intégrale $\int_c^{+\infty} |Df(t)|dt$ converge.

Soit χ la fonction définie sur $[c,+\infty[$ par la relation $\chi(x)=\int_x^{+\infty} |Df(t)|dt$.

Prouver que, pour tout $t \geqslant c$, $|\Delta f(t)| \leqslant \Delta\chi(t)$ et que, pour tout $x \geqslant c$,

$$-\int_c^x \Delta\chi(t)dt \leqslant \int_c^{c+1} \chi(t)dt \leqslant \chi(c).$$

En déduire que $|\Delta f|$ appartient à E_1 et que $N_1(\Delta f) \leqslant N_1(Df)$.

c) On suppose que f appartient à $M(\varphi)$, où φ est un élément de E_+.

Prouver que pour tout $p \geqslant 1$, $|\Delta^p f|$ appartient à E_1 et que

(2) $$N_1(\Delta^p f) \leqslant N_1(D^p f).$$

3. <u>*Valeurs propres de l'endomorphisme Δ.*</u>

a) Déterminer le noyau de l'endomorphisme Δ.

b) Déterminer les valeurs propres λ et les vecteurs propres de Δ : Si $\lambda \neq 1$, on montrera d'abord que les vecteurs propres de Δ considéré comme endomorphisme de C^∞ sont les fonctions $f_\gamma(x)$ de la forme $f_\gamma(x)=e^{-\gamma x}g(x)$, où $\gamma=\alpha+i\beta$, $0 \leqslant \beta < 2\pi$, et g est une fonction 1-périodique de classe C^∞ non nulle ; on déterminera ensuite γ pour que f_γ appartienne à E. On étudiera enfin le cas où $\lambda=1$.

c) Soit h une fonction 1-périodique de classe C^∞ à valeurs réelles positives. Prouver que les coefficients de Fourier de h satisfont aux inégalités

$$c_o(h) \geq o \text{ et, pour tout } n \neq o,\ |c_n(h)| \leq c_o(h).$$

A cet effet, on pourra écrire, que pour tout $n \neq o$ et tout nombre réel δ,

$\int_o^1 h(t)\left[1-\cos(2\pi nt+\delta)\right]dt \geq o$, et exprimer cette intégrale à l'aide de $c_o(h)$, $c_n(h)$ et $\overline{c_n(h)}$.

d) En déduire que, si $\lambda \neq 1$, les vecteurs propres de Δ appartenant à E_+ sont de la forme $x \longmapsto ke^{-\alpha x}$, où $\alpha > o$ et $k > o$. Pour cela, on observera que si f_γ appartient à E_+, alors $\varphi = f_\gamma^2 = f_\gamma \overline{f_\gamma}$ appartient aussi à E_+, on calculera $D^p\varphi$ en développant $g\overline{g}$ en série de Fourier, et on montrera que, pour tout $n \neq o$, $c_n(g\overline{g}) = o$ en appliquant le résultat du c) à des fonctions h convenables.

4. *Image de l'endomorphisme Δ.*

a) Prouver que si $\varphi \in E_+$, alors $\Psi = \Delta\varphi$ appartient à $E_+ \cap E_1$ et que, pour tout $x \geq c$,

(3) $$\varphi(x) = \sum_{n=o}^{+\infty} \Psi(x+n),$$

cette série étant convergente.

En déduire que, si f appartient à $M(\varphi)$, alors $g = \Delta f$ appartient à $M(\Psi)$ et que, pour tout $x \geq c$,

(3') $$f(x) = \sum_{n=o}^{+\infty} g(x+n),$$

cette série étant absolument convergente.

b) Réciproquement, soit Ψ un élément de $E_+ \cap E_1$, montrer que la série (3) est normalement convergente sur $[c,+\infty[$, et que, si φ désigne sa somme,

$$\varphi(x) \leq \Psi(x) + \int_x^{+\infty} \Psi(t)dt.$$

Montrer finalement que φ appartient à E_+ et que c'est l'unique élément de E_+ tel que $\Delta\varphi = \Psi$.

c) Soit, plus généralement, g un élément de $M(\Psi)$, où $\Psi \in E_+ \cap E_1$. Prouver que la série (3') est normalement convergente sur $[c,+\infty[$ que sa somme f appartient à $M(\varphi)$ et que f est l'unique élément de E tel qu $\Delta f = g$.

d) Enoncer et démontrer un résultat analogue lorsque g appartient à $B(\psi)$.

Tournez la page S. V. P.

III - ACCELERATION DE CONVERGENCE DES SERIES ALTERNEES.

Dans cette partie, on suppose que $c=0$.

1. *Encadrement du reste lorsque le terme général appartient à* E_+.

Soit φ un élément de E_+.

a) Montrer que la série alternée $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \varphi(k)$ est convergente. On note $S(\varphi)$ sa somme. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $S_n(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \varphi(k)$ et $R_n(\varphi) = (-1)^{n+1} [S(\varphi) - S_n(\varphi)]$.

b) Prouver que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$0 \leq R_n(\varphi) = \sum_{q=0}^{+\infty} \Delta\varphi(n+2q+1) \ ;$$

en déduire que la suite $R_n(\varphi)$ est décroissante.

c) Etablir que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$R_n(\varphi) + R_{n+1}(\varphi) = \varphi(n+1).$$

d) Prouver finalement que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$(4) \quad \frac{1}{2}\varphi(n+1) \leq R_n(\varphi) \leq \frac{1}{2}\varphi(n).$$

2. *Majoration du reste par domination.*

Soit f un élément de E appartenant à $M(\varphi)$, où φ appartient à E_+.

a) Prouver que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k f(k)$ converge ; pour cela, on pourra d'abord établir que la série $\sum_{q=0}^{+\infty} \Delta f(2q)$ est absolument convergente.

On pose alors

$$(5) \quad S(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k f(k),$$

et on définit $S_n(f)$ et $R_n(f)$ comme au 1.a).

b) Prouver que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$(6) \quad |R_n(f)| \leq \frac{1}{2}\varphi(n).$$

3. *Accélération de convergence.*

Soit φ un élément de E_+ tel que, pour tout entier $p \geq 0$, $|D^{p+1}\varphi|$ soit négligeable devant $|D^p\varphi|$ au voisinage de $+\infty$, et f un élément de $M(\varphi)$.

On se propose d'accélérer la convergence de $S_n(f)$ vers $S(f)$ en déterminant un développement asymptotique du reste $R_n(f)$; à cet effet, on exprime $R_n(f)$ en fonction de $R_n(\Delta f)$, et on itère ce processus.

a) *Description du procédé d'accélération de convergence.*

Prouver que, pour tout entier $n \geq 0$,

$R_n(f) = \frac{1}{2} f(n+1) + \frac{1}{2} R_n(\Delta f)$.

En déduire que, pour tout entier $p \geq 1$ et tout entier $n \geq 0$,

(7) $R_n(f) = U_p f(n+1) + \frac{1}{2^p} R_n(\Delta^p f)$,

où U_p est l'endomorphisme de E définit par la relation

(8) $U_p = \frac{1}{2} I + \frac{1}{4} \Delta + \frac{1}{8} \Delta^2 + \ldots + \frac{1}{2^p} \Delta^{p-1}$.

On pose alors

(9) $S_n^p(f) = S_n(f) + (-1)^{n+1} U_p f(n+1)$.

b) *Majoration du reste associé à ce procédé.*

Etablir que

(10) $|S(f) - S_n^p(f)| \leq \frac{1}{2^{p+1}} |D^p \varphi(n)|$.

Prouver que, si φ est à valeurs strictement positives,

(11) $|S(\varphi) - S_n^p(\varphi)| \sim \frac{1}{2^{p+1}} |D^p \varphi(n)|$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Pour cela, on établira d'abord que, pour tout entier $k \geq 0$ et tout nombre réel $b \geq 0$, $D^k \varphi(n+b) \sim D^k \varphi(n)$; on montrera ensuite que, pour tout nombre réel $x \geq 0$, $|D^k \varphi(x+k)| \leq \Delta^k \varphi(x) \leq |D^k \varphi(x)|$; on utilisera enfin l'encadrement (4).

c) *Stabilité de ce procédé.*

Soit F l'espace des fonctions continues bornées sur $[0, +\infty[$.

On considère Δ et U_p comme des endomorphismes de F.

Montrer que, pour tout élément h de F,

$$N_\infty(U_p h) \leq \frac{p}{2} N_\infty(h).$$

En déduire la précision à laquelle on obtient $U_p f(n+1)$ lorsque les valeurs de f sont calculées à la précision 10^{-r}.

Ecrire un algorithme permettant de calculer $U_p f(n+1)$ à partir des valeurs $f(n+1)$, $f(n+2), \ldots, f(n+p)$.

Tournez la page S. V. P.

d) Indiquer comment on peut étendre les résultats précédents lorsque φ est définie sur $[d,+\infty[$, où $d>o$, et que $n \geq d$.

4. *Etude d'un exemple.*

On prend $f(x)=\dfrac{1}{x^3+1}$, et on se propose de calculer $S(f)$ à la précision 10^{-8}.

a) Montrer que, sur $[1,+\infty[$, f appartient à $M(\varphi)$, où $\varphi(x)=\dfrac{1}{(x-\frac{1}{2})^3}$ .Calculer $\varepsilon_n^p=\dfrac{1}{2^{p+1}}|D^p\varphi(n)|$.

b) Déterminer un entier n_p tel que $\varepsilon_{n_p}^p \leq \frac{1}{2}\,10^{-8}$. Quel choix pour p est-il pertinent ?

c) Le choix de p et de n_p étant ainsi effectué, calculer $S_{n_p}^p(f)$ à la précision $\frac{1}{2}\,10^{-8}$, ce qui fournit $S(f)$ à la précision 10^{-8}. (On donnera toutes les justifications utiles concernant l'obtention effective de cette précision).

CAPES externe 1987 composition 2

SESSION DE 1987

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

L'usage des instruments de calcul, en particulier des calculatrices électroniques de poche — y compris calculatrice programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Tournez la page S. V. P.

NOTATIONS ET OBJECTIF DU PROBLEME

On se place dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{e_1}, \vec{e_2})$, et on note C le cercle de centre O et de rayon 1. Pour tout nombre réel t, on note M_t le point de C d'affixe e^{it}. On suppose donné un entier naturel $n \geqslant 1$.

Pour toute partie S de C ayant n éléments $A_1, A_2, \ldots A_n$ dont les affixes respectives sont $a_1, a_2, \ldots a_n$, on désigne par $P_S(X)$ le polynôme à coefficients complexes défini par la relation

(1) $$P_S(X)=(X-a_1)(X-a_2)\ldots(X-a_n),$$

et on désigne par f_S la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation

(2) $$f_S(t)=\|\overrightarrow{A_1M_t}\| \cdot \|\overrightarrow{A_2M_t}\| \ldots \|\overrightarrow{A_nM_t}\| .$$

L'objectif du problème est d'étudier les périodes de la fonction f_S, ainsi que son maximum, selon la nature de la configuration géométrique $S=\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.

I - ETUDE DES PERIODES DE f_S.

On désigne par G_S l'ensemble des périodes de f_S, c'est-à-dire des nombres réels α tels que, pour tout nombre réel t, $f_S(t+\alpha)=f_S(t)$.

Pour tout nombre réel $b>0$, on note $b\mathbb{Z}$ le sous-groupe du groupe additif $\mathbb{R}$ constitué des nombres $q\,b$, où q parcourt $\mathbb{Z}$.

1. *Etude de la correspondance entre* S, f_S *et* P_S.

a) Montrer que, pour tout nombre réel t,

(3) $$f_S(t)=|P_S(e^{it})|.$$

En déduire que 2π est une période de f_S.

b) Caractériser les points M_t tels que $f_S(t)=0$.

c) Soient S et T deux parties de C ayant n éléments.

Prouver que $P_S=P_T$ si et seulement si $S=T$ et que $f_S=f_T$ si et seulement si $S=T$.

Tournez la page S. V. P.

2. *Effet d'une rotation sur* S.

Soit α un nombre réel, r_α la rotation de centre O dont l'angle admet α pour mesure, et $S_\alpha = r_\alpha(S)$ l'image de S par r_α.

a) Calculer l'affixe du point $r_\alpha(A_j)$.

b) Prouver que

$$P_{S_\alpha}(X) = e^{in\alpha}\, P_S(Xe^{-i\alpha}),$$

et que, pour tout nombre réel t,

$$f_{S_\alpha}(t) = f_S(t-\alpha).$$

3. *Caractérisation des périodes de* f_S.

Soit α un nombre réel. Prouver que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

a. le nombre α est une période de f_S ;

b. $$P_S(X) = e^{in\alpha}\, P_S(Xe^{-i\alpha}) \;;$$

c. la partie S est globalement invariante par la rotation r_α, c'est-à-dire $r_\alpha(S)=S$.

4. *Structure du groupe des périodes* G_S.

a) Prouver que G_S est un sous groupe du groupe additif $\mathbb{R}$ et que G_S contient $2\pi\mathbb{Z}$.

b) Pour tout élément j de $[1,n]$, on désigne par θ_j l'unique élément de $[0,2\pi[$ tel que $a_j = e^{i\theta_j}$, et on suppose que les points $A_1,\ldots,A_n$ sont rangés de telle sorte que $\theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n$.

Montrer que si f_S admet une période α appartenant à $]0,2\pi[$, alors il existe un élément j de $[2,n]$ tel que $\alpha = \theta_j - \theta_1$.

c) En déduire que G_S admet un plus petit élément strictement positif, noté α_S.
Montrer que $G_S = \alpha_S\mathbb{Z}$.

d) Prouver que α_S est de la forme $\alpha_S = \frac{2\pi}{p_S}$, où p_S est un entier strictement positif.

e) A l'aide de la question 3, montrer que $e^{in\alpha_S} = 1$.

Prouver finalement que α_S est de la forme $\alpha_S = \frac{2\pi}{p_S}$, où p_S est un diviseur de n ;
en particulier $\alpha_S \geqslant \frac{2\pi}{n}$.

5. *Caractérisation géométrique du cas* $\alpha_S = \frac{2\pi}{n}$.

On suppose que $n \geq 2$.

a) On suppose que S est un polygone régulier convexe, c'est-à-dire de la forme $S=\{A_1,A_2,\dots,A_n\}$, où pour tout $j \in [1,n-1]$, $A_{j+1}=r_{\frac{2\pi}{n}}(A_j)$.

Calculer $P_S(X)$, $f_S(t)$ et α_S.

A cet effet, on pourra se ramener au cas où $a_1=1$, et montrer alors que $P_S(X)=X^n-1$.

b) Prouver que $\alpha_S = \frac{2\pi}{n}$ si et seulement si $S=\{A_1,A_2,\dots A_n\}$ est un polygone régulier convexe.

6. *Caractérisation géométrique des cas où* $\alpha_S < 2\pi$.

Pour chaque cas étudié, on fera une figure, en prenant 4cm pour unité graphique.

a) Lorsque n est un nombre premier, caractériser les configurations S tels que $\alpha_S < 2\pi$.

b) On suppose que n=4. Caractériser les configurations S telles que $\alpha_S < 2\pi$, en distinguant deux cas selon que $p_S=4$ ou $p_S=2$. Préciser alors la forme de $P_S(X)$.

c) Etudier de même le cas où n=6, en distinguant les cas $p_S=6$, $p_S=3$ et $p_S=2$.

d) Soit plus généralement p un diviseur de n , où $p \neq 1$. Caractériser les configurations S telles que $\frac{2\pi}{p}$ soit une période de f_S ; caractériser aussi cette propriété à l'aide du polynôme $P_S(X)$. Parmi ces configurations, caractériser celles pour lesquelles $\alpha_S = \frac{2\pi}{p}$.

II - ETUDE DU MAXIMUM DE f_S.

On désigne par E_n l'ensemble des parties S de C ayant n éléments. Pour tout élément S de E_n, on note F_S la fonction qui, à tout point M de C, associe

$$F_S(M) = \|\overrightarrow{A_1M}\| . \|\overrightarrow{A_2M}\| \dots \|\overrightarrow{A_nM}\| .$$

1. *Etude du maximum de* F_S.

a) Prouver que la fonction f_S est continue bornée sur $\mathbb{R}$, et atteint sa borne supérieure, notée K_S, en au moins un point t de $[0,2\pi[$.

b) Etablir que

$$K_S = \sup_{M \in C} F_S(M).$$

c) Prouver que pour toute rotation r_α,

$$K_{S_\alpha}=K_S, \text{ où } S_\alpha=r_\alpha(S).$$

2. *Majoration de* K_S.

a) Prouver que, pour tout élément S de E_n,

(4) $$K_S\leq 2^n.$$

b) Etablir que

(5) $$\sup_{S\in E_n} K_S=2^n.$$

Existe-t-il un élément S de E_n tel que $K_S=2^n$?

Dans toute la suite, on suppose que $n\geq 2$.

3. *Calcul de* K_S *lorsque* S *est un polygone régulier.*

a) Prouver que si pour tout élément j de $[0,n-1]$, $a_{j+1}=e^{\frac{2ij\pi}{n}}$, alors pour tout nombre réel t,

$$f_S(t)=2\left|\sin\frac{nt}{2}\right|.$$

Construire la courbe représentative de f_S sur l'intervalle $[0,2\pi]$ dans le cas où n=3.

b) En déduire que, si $S=\{A_1,A_2,\ldots A_n\}$ est un polygone régulier convexe, alors $K_S=2$, et montrer qu'il existe exactement n points $B_1,B_2,\ldots B_n$ de C tels que $F_S(B_j)=2$. Indiquer comment le polygone $\{B_1B_2,\ldots,B_n\}$ se déduit du polygone S.

Lorsque n=3, placer sur une figure les points A_1,A_2,A_3 et B_1,B_2,B_3.

4. *Calcul des coefficients d'un polynôme en fonction de ses valeurs sur les racines de l'unité.*

Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré n et dont le coefficient de X^n est égal à 1. On écrit P sous la forme

$$P=X^n+b_{n-1}X^{n-1}+\ldots+b_{n-k}X^{n-k}+\ldots+b_o.$$

Pour tout élément j de $[0,n-1]$, on pose $z_{j+1}=e^{\frac{2ij\pi}{n}}$.

a) Pour tout entier naturel k, calculer la somme

$$z_1^k+z_2^k+\ldots+z_n^k.$$

On distinguera deux cas selon que k appartient à $n\mathbb{Z}$ ou non.

b) En déduire que,

(6) $n(b_o+1)=P(z_1)+P(z_2)+\dots+P(z_n)$

et que, pour tout élément k de $[1,n-1]$,

(7) $n\, b_{n-k}=z_1^kP(z_1)+z_2^kP(z_2)+\dots+z_n^kP(z_n)$.

5. *Maximum de la somme de n nombres complexes.*

Soit K un nombre réel strictement positif et $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ des nombres complexes non nuls tels que, pour tout élément j de $[1,n]$, $|\lambda_j|\leq K$.

Montrer que

$$|\lambda_1+\dots+\lambda_n|\leq nK,$$

avec égalité si et seulement si, pour tout j, $|\lambda_j|=K$ et $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n$.

On pourra d'abord caractériser les cas où $|\lambda_1+\dots+\lambda_n|=|\lambda_1|+\dots+|\lambda_n|$.

6. *Minoration de* K_S.

Soit S un élement de E_n.

a) Calculer $P_S(0)$ en fonction de $a_1,a_2,\dots,a_n$. Que vaut $|P_S(0)|$?

Montrer qu'il existe une rotation r_α telle que $P_{S_\alpha}(0)=1$.

b) On se place dans le cas où $P_S(0)=1$.

En utilisant les résultats établis aux questions 4 et 5. Démontrer que $2\leq K_S$ et que $K_S=2$ si et seulement si,pour tout j,$|P_S(z_j)|=K_S$ et $P_S(z_1)=P_S(z_2)=\dots=P_S(z_n)$.

En déduire que si $K_S=2$, alors $P_S(X)=X^n+1$.

c) Etablir finalement que, pour tout élément S de E_n, $K_S\geq 2$, et que $K_S=2$ si et seulement si S est un polygone régulier convexe.

7. *Lien entre le maximum* K_S *et la période* p_S.

Pour tout diviseur p de n, $p\neq 1$, on note $E_{n,p}$ l'ensemble des élements S de E_n tel que $\frac{2\pi}{p}=\alpha_S$.

Calculer les nombres

$$\sup_{S\in E_{n,p}} K_S \quad \text{et} \quad \inf_{S\in E_{n,p}} K_S.$$

Capes 1988, épreuve I

Ce travail fait à partir d'une photocopie peut présenter quelques erreurs, me les signaler à l'adresse suivante : **jeaneric.richard(a)wanadoo.fr** (changer (a) en @). Bon courage ! Version du 18 janvier 2009 à 16h26.

Notations et objectifs du problème

On note (u_p) la suite définie pour tout entier $p \geqslant 1$ par la relation

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}. \qquad (1)$$

La somme γ de la série de terme général u_p s'appelle la constante d'Euler et, pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$\gamma_n = \sum_{p=1}^{p=n} u_p \qquad \text{et} \qquad r_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p. \qquad (2)$$

On désigne par S et R les fonction s définies respectivement sur $]-\infty\,;-\infty[$ et sur $]0\,;+\infty[$ par les relations

$$\mathrm{S}(x) = \int_0^x \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{R}(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t. \qquad (3)$$

Enfin On note Γ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par la relation

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t. \qquad (4)$$

Dans la partie I, on étudie la convergence de la série et des intégrales précédentes, on établit une expression intégrale de γ à l'aide des fonctions S et R, et on relie γ à la valeur de la dérivée Γ' de Γ au point 1.
la partie II décrit un procédé d'approximation de γ par accélération de convergence de la suite (γ_n).
La partie III décrit un autre procédé d'approximation de γ, fondé sur une développement de S en série entière et sur un développement asymptotique de R.

I. Définition et expressions intégrales de la constante d'Euler

1. Convergence de la série définissant γ.

a. Prouver que, pour tout $p \geqslant 1$,

$$0 \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Établir que (γ_n) est une suite croissante, que cette suite converge et que $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

b. Établir que, pour tout $p \geqslant 1$,

$$u_p = \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{u}{p+u}\,\mathrm{d}u. \qquad (5)$$

En déduire que, pour tout $p \geqslant 2$,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right)$$

et que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{2(n+1)} \leqslant r_n \leqslant \frac{1}{2n}.$$

c. On approche γ par γ_n. déterminer un entier n permettant d'obtenir la précision 10^{-2} ; même question pour le précision 10^{-8}.(On ne demande pas d'effectuer le calcul de γ_n.)

d. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$\gamma_{n,\,1} = \gamma_n + \frac{1}{2(n+1)}.$$

Prouver que $0 \leqslant \gamma - \gamma_{n,\,1} \leqslant \dfrac{1}{2n^2}$.

e. Reprendre la question **??** lorsqu'on approche γ par $\gamma_{n,\,1}$; déterminer une valeur décimale approchée de γ à la précision 10^{-2}.

2. Expression intégrale de γ à l'aide de S et R.

a. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$$f(t) = \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} \quad \text{si } t \neq 1 \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Établir la convergence des intégrales (**??**) et prouver que S et R sont de classe C^1 respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $]0\,;+\infty[$.

c. Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v}\,\mathrm{d}v.$$

Á cet effet, on pourra calculer la somme

$$1 + (1-v) + \cdots + (1-v)^{n-1}.$$

d. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n = \int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}\,\mathrm{d} - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t}\,\mathrm{d}t,$$

où e_n est la fonction définie sur $[0\,;n]$ par la relation

$$e_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.$$

e. Établir que, pour tout réel v,

$$1 + v \leqslant \mathrm{e}^v. \tag{6}$$

f. Établir que pour tout $n \geqslant 1$, et pour tout réel t tel que $0 \leqslant t \leqslant n$,

$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \mathrm{e}^{-t} \leqslant e_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

$\left(\text{On pourra appliquer (\textbf{??}) en prenant } v = \dfrac{t}{n} \text{ et } v = -\dfrac{t}{n}.\right)$

En déduire que, dans les mêmes conditions

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} - e_n(t) \leqslant \frac{t^2}{n}\mathrm{e}^{-t}.$$

g. Montrer finalement que

$$\gamma = \mathrm{S}(1) - \mathrm{R}(1). \tag{7}$$

3. Expression de γ à l'aide de la dérivée de Γ.

a. Établir que, pour tout réel $x > 0$, l'intégrale (**??**) est convergente.

b. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note Γ_n la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par la relation

$$\Gamma_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \mathrm{e}^{-t} t^x \,\mathrm{d}t.$$

Prouver que Γ_n est de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$.

c. Montrer que Γ_n converge vers Γ uniformément sur tout intervalle compact $[a\,;b]$ contenu dans $]0\,;+\infty[$.

d. Pour tout réel x, on pose

$$F(x) = \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^x \ln t \,\mathrm{d}t.$$

Établir la convergence de cette intégrale. Prouver que Γ est de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$ et que $\Gamma' = F$.
En particulier

$$\Gamma'(1) = \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln t \,\mathrm{d}t. \tag{8}$$

e. Á partir des relations (**??**) et (**??**), montrer que $\Gamma'(1) = \gamma$.

II. Approximation de γ par accélération de convergence de la suite γ_n

Pour tout entier $k \geqslant 0$, on désigne par φ_k la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par les relations :

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{t(t+1)\dots(t+k)} \quad \text{si } k \geqslant 1 \quad \text{et } \varphi_0(t) = \frac{1}{t}.$$

Enfin, pour tout entier $j \geqslant 1$, on note N_j le polynôme défini par les relations

$$N_j(X) = X(1-X)(2-X)\dots(j-1-X) \quad \text{si } j \geqslant 2 \quad \text{et} \quad N_1(X) = X.$$

1. Sommation des séries télescopiques.

On note Δ l'endomorphisme de l'espace vectoriel E des fonctions numériques f continues sur $]0\,;+\infty[$ et tendant vers 0 en $+\infty$ défini par la relation $\Delta f(x) = f(x) - f(x+1)$.

a. Soit f une élément de E. Établir le convergence de la série de terme général $\alpha_p = \Delta f(p)$. Calculer la somme de cette série et le reste à l'ordre n de cette série, c'est à dire $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} \Delta f(p)$, où $n \geqslant 0$.

b. Calculer, pour tout $k \geqslant 1$, $\Delta\varphi_{k-1}$. Établir la convergence de la série de terme général $\varphi_k(p)$, où $p \geqslant 1$, et prouver que, pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} \varphi_k(p) = \frac{1}{k}\frac{n!}{(n+k)!}.$$

2. Accélération de convergence : premier pas.

L'idée consiste à écrire le terme général u_p de la série donnant γ, qui est équivalent à $\dfrac{1}{2p^2}$, comme somme de deux termes d'ont l'un est télescopique et l'autre est de l'ordre de $\dfrac{1}{p^3}$. Á cet effet, on part de la formule (**??**) et on approche sur $[0\,;1]$, $\dfrac{1}{p+u}$ par une constante en écrivant que

$$\frac{1}{p+u}=\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+1}\frac{1-u}{p+u}.$$

a. Montrer que, pour tout $p\geqslant 1$,

$$u_p=\frac{1}{2}\frac{1}{p(p+1)}+\frac{1}{p(p+1)}\int_0^1\frac{\mathrm{N}_2(u)}{p+u}\,\mathrm{d}u.$$

b. En déduire que, pour tout $n\geqslant 1$,

$$r_n=\frac{1}{2(n+1)}+r_{n,\,1},\qquad \text{où } 0\leqslant r_{n,\,1}\leqslant\frac{1}{12n(n+1)}.\tag{9}$$

3. Accélération de convergence : k–ième pas.

Pour tout entier $j\geqslant 1$, on pose

$$\lambda_j=\int_0^1\mathrm{N}_j(u)\,\mathrm{d}u.$$

a. Montrer que, pour tout entier $k\geqslant 1$ et tout entier $p\geqslant 1$,

$$u_p=\frac{\lambda_1}{p(p+1)}+\frac{\lambda_2}{p(p+1)(p+2)}+\cdots+\frac{\lambda_k}{p(p+1)\dots(p+k)}+\rho_{p,k},$$

$$\text{où } \rho_{n,k}=\frac{1}{p(p+1)\dots(p+k)}\int_0^1\frac{\mathrm{N}_{k+1}(u)}{p+u}\,\mathrm{d}u.$$

b. Établir enfin que, pour tout entier $k\geqslant 1$, et tout entier $n\geqslant 1$,

$$r_n=\frac{\lambda_1}{n+1}+\frac{\lambda_2}{2(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{\lambda_k}{k(n+1)(n+2)\dots(n+k)}+r_{n,k},\tag{10}$$

$$\text{où } 0\leqslant r_{n,k}\leqslant\frac{\lambda_{k+1}}{(k+1)(n+1)(n+2)\dots(n+k)}.$$

c. Á partir de (**??**), construire une suite $(\gamma_{n,k})$ telle que, pour tout $n\geqslant 1$, $0\leqslant\gamma-\gamma_{n,k}\leqslant r_{n,k}$.

4. Calcul des nombres γ_n par emploi d'une série génératrice.

a. Prouver que, pour tout entier $n\geqslant 1$,

$$\frac{(n-1)!}{6}\leqslant\lambda_{n+1}\leqslant\frac{n!}{6}.$$

En déduire le rayon de convergence de la série entière

$$1+\lambda_1x-\frac{\lambda_2}{2!}x^2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{\lambda_n}{n!}x^n+\cdots$$

Soit $\mathrm{G}(x)$ la somme de cette série.

b. Écrire le développement en série entière de la fonction $x \longmapsto (1+x)^u$ où u est un réel strictement positif, et où $|x| < 1$. Prouver que, pour x fixé, on peut intégrer terme à terme par rapport à u sur l'intervalle $[0\,;1]$.
En déduire, si $x \neq 0$,

$$G(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

c. Expliciter un système triangulaire permettant de calculer les nombres λ_n par récurrence.

5. Application numérique.

On se propose d'obtenir une valeur décimale approchée de γ à la précision 10^{-8}. On prend $k = 4$.

a. Calculer $\lambda_1,\ \lambda_2, \lambda_3,\ \lambda_4$ et majorer λ_5.

b. Déterminer un enter n tel que $r_{n,\,4} \leqslant 7\times 10^{-9}$.

c. n étant ainsi fixé, calculer $\gamma_{n,\,4}$ à la précision 2×10^{-9}. On précisera l'algorithme utilisé pour calculer $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}$ et on justifiera que la précision demandée est effectivement obtenue.

III. Approximation de γ par développement de S en série entière

La méthode consiste à évaluer γ en fonction de $S(x)$ et $R(x)$, pour x assez grand pour que $R(x)$ soit petit et, x étant fixé, d'approcher $S(x)$ à l'aide d'un développement en série entière.

1. Nouvelle expression intégrale de γ.

Á partir de la formule (**??**), prouver que, pour tout nombre réel $x > 0$,

$$\gamma = S(x) - R(x) - \ln x.$$

2. Évaluation asymptotique de $R(x)$.

a. Montrer que, pour tout $k \geqslant 1$ et tout nombre réel x strictement positif,

$$R(x) = e^{-x}\sum_{j=0}^{j=k-2}\frac{(-1)^j j!}{x^{j+1}} + R_k(x) \quad \text{où} \quad R_k(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^k}\,dt. \tag{11}$$

(Lorsque $k = 1$ on convient que R_1=R.)

b. Prouver que, dans ces mêmes conditions,

$$|R_k(x)| \leqslant (k-1)!\frac{e^{-x}}{x^k} \tag{12}$$

* et que $|R_k(x)|$ est équivalent à $(k-1)!\dfrac{e^{-x}}{x^k}$ lorsque $x \to +\infty$.

c. Montrer que, x étant fixé, $|R_k(x)| \to +\infty$ lorsque $k \to +\infty$.(on pourra minorer l'intégrale donnant R_k en intégrant sur $[x\,;2x]$.)
Montrer enfin que $|R_k(x)| \leqslant e^{-(2k-1)}$.
Á cet effet, on établira que $\ln k! \leqslant (k+1)\ln k - k + 1$.

3. Approximation de $S(x)$ par développement en série entière.

a. Prouver que S est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et que pour tout réel x,

$$S(x) = x - \frac{x^2}{2 \times 2!} + \frac{x^3}{3 \times 3!} + \cdots + (-1)^{p-1} \frac{x^p}{p \times p!} + \cdots$$

b. On suppose désormais que $x \geqslant 1$, et on pose $a_p(x) = \dfrac{x^p}{p \times p!}$. Montrer que la suite $p \mapsto a_p(x)$ est décroissante à partir du rang $p = [x]$ où $[x]$ désigne la partie entière de x.

c. Soit n un entier tel que $n \geqslant [x]$. On pose

$$S_n(x) = x - \frac{x^2}{2 \times 2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1) \times (n-1)!}.$$

Prouver que $|S(x) - S_n(x)| \leqslant \dfrac{x^n}{n \times n!}$, puis que $|S(x) - S_n(x)| \leqslant \dfrac{x^n e^{n-1}}{n^{n+1}}$.

4. Obtention d'une grande précision pour γ.

On se propose de décrire deux méthodes de calcul d'une valeur décimale approchée de γ à la précision 10^{-100}.

a. On prend $k = 1$. Déterminer un nombre entier x tel que $|R(x)| \leqslant \dfrac{1}{3} 10^{-100}$. Ce nombre x étant ainsi fixé, déterminer un entier n tel que $|S(x) - S_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{3} 10^{-100}$.

b. On prend $k = x$. Déterminer k de telle sorte que $|R_k(x)| \leqslant \dfrac{1}{3} 10^{-100}$. Ces nombres x et k étant ainsi fixés, déterminer un entier n tel que $|S(x) - S_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{3} 10^{-100}$.

c. Les nombres k, x, n étant fixés, expliciter des algorithmes performants pour le calcul de $S(x)$ et celui de $R(x)$-$R_k(x)$. 5il n'est pas demandé d'étudier les problèmes posés par les erreurs d'arrondi.)

1988.

PREMIERE PARTIE

SOLUTION DE ANTOINE DELCROIX SUR MEGAMATHS

I 1°) Convergence de la série définissant γ.

a) On a, pour tout $p \geq 1$ et tout t appartenant à $[p, p+1]$:

$$\frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{p}$$

Car $t \to \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. D'où :

$$\frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{p}$$

On en déduit : $0 \leq \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$.

soit : $\forall p \geq 1 \quad 0 \leq u_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$ (*)

On déduit de (*) que (γ_n) est croissante (car : $\gamma_{n+1} - \gamma_n = u_{n+1} \geq 0$, pour $n \geq 1$) et que :

$$0 \leq \sum_{p=1}^{N} u_p \leq 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1. \quad (**)$$

Donc, pour tout $n \geq 1$ γ_n est majoré par 1. La suite $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ croissante et majorée est convergente. D'après (**) sa limite γ vérifie : $0 < \gamma \leq 1$, par prolongement d'inégalité.

b) On a, pour $p \geq 1$, la suite d'égalités :

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} = \frac{1}{p} - \int_0^1 \frac{du}{u+p} = \int_0^1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{u+p}\right) du = \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{u}{u+p} du.$$

Comme la fonction $u \to u+p$ est décroissante sur $[0,1]$ on a :

$\forall p \geq 1 \quad \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{du}{p+1} \leq \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{u}{u+p} du \leq \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{du}{p}$

d'où : $\forall p \geq 1 \quad \frac{1}{2}\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p+1} \leq u_p \leq \frac{1}{2}\frac{1}{p^2}$

Or pour tout $p \geq 1$ on a : $\frac{1}{p}\frac{1}{p+1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$ d'où pour $p \geq 2$:

$$\frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{p\ p-1} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$$

On a donc bien : $\forall p \geq 1 \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leq u_p \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right)$

On a, alors, pour $n \geq 1$ et $N \geq n+1$:

$$\frac{1}{2}\sum_{p=n+1}^{N}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leq \sum_{p=n+1}^{N} u_p \leq \frac{1}{2}\sum_{p=n+1}^{N}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right)$$

Soit : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1}\right) \leq \sum_{p=n+1}^{N} u_p \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right)$

Car passant à la limite sur N, il vient :

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq r_n \leq \frac{1}{2n} \quad (***)$$

c) On a, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq \gamma - \gamma_n = r_n \leq \frac{1}{2n}$. Pour obtenir une précision de 10^{-p} il suffit de prendre n tel que :

$$\frac{1}{2n} \leq 10^{-p},$$

soit $n \geq \frac{1}{2} 10^{+p}$

I.1.-Suite c) Suite : pour $p = 2$, on trouve $n \geq 50$ et pour $p = 8$ on obtient $n \geq \frac{1}{2} 10^8$.

- **Remarque :** Approcher γ par γ_n est très mauvais numériquement. Cette méthode est dite d'ordre 1 : la précision est de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{n}$.

d) De la relation (***) il vient, pour $n \geq 1$:

$$0 \leq \gamma - \gamma_n - \frac{1}{2(n+1)} \leq \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}$$

soit $0 \leq \gamma - \gamma_{n,1} \leq \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2(n+1)n}$

On obtient, puisque $\frac{1}{2(n+1)n} \leq \frac{1}{2n^2}$ la relation :

$$0 \leq \gamma - \gamma_{n,1} \leq \frac{1}{2n^2} \quad (d)$$

e) Pour rendre $\gamma - \gamma_{n,1}$ inférieur ou égal à 10^{-p} il suffit cette fois de prendre n tel que : $n^2 \geq \frac{1}{2} 10^{+p}$

On trouve : $n \geq 8$ pour $p = 2$ et $n \geq 7072$ pour $p = 8$.

On a : $\gamma_{8,1} = \sum_{i=1}^{8} \frac{1}{i} - \ln 9 + \frac{1}{18}$

On trouve, à la calculatrice comme valeur approchée de $\gamma_{8,1}$ le nombre $\overline{\gamma_{8,1}} = 0.576$ avec de plus :

$$\overline{\gamma_{8,1}} \leq \gamma_{8,1} \leq 0.577 = \overline{\gamma_{8,1}} + 10^{-3},$$

car la décimale suivante de $\gamma_{8,1}$ est "1".

d'Après la relation (d) on a :

$$\gamma_{8,1} \leq \gamma \leq \gamma_{8,1} + \frac{1}{2\,8^2}$$

d'où $\overline{\gamma_{8,1}} \leq \gamma \leq \overline{\gamma_{8,1}} + 10^{-3} + \frac{1}{128}$

Or : $\frac{1}{128} \leq \frac{1}{125} = 8\ 10^{-3}$ donc : $10^{-3} + \frac{1}{128} \leq 10^{-3} + 8\,10^{-3} < 10^{-2}$

On obtient $\overline{\gamma_{8,1}} \leq \gamma \leq \overline{\gamma_{8,1}} + 10^{-2}$.

Et en remplaçant $\overline{\gamma_{8,1}}$ par sa valeur, on voit que : $0.57 \leq \gamma \leq 0.59$

Voici enfin la conclusion : $|\gamma - 0.58| \leq 10^{-2}$

- **Remarques** 1) en concours une rédaction plus sommaire serait admise : il s'agit de vous montrer (au moins une fois !) un maniement très rigoureux des valeurs approchées.

2) la relation (d) montre que la méthode développée dans cette question est d'ordre 2

2e) Expression intégrale de γ à l'aide de S et R.

a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$, comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$. On a par ailleurs : $1-e^{-t} \sim t$ au voisinage de zéro : donc $\lim_{t\to 0} f(t) = 1 = f(0)$, ce qui assure la continuité de f en zéro.

b) Comme f est le prolongement par continuité en zéro de la fonction $t \to \frac{1-e^{-t}}{t}$ (Remarque : non définie en zéro) on a :

$$S(x) = \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt = \int_0^x f(t)\,dt.$$

La fonction S est alors définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, car la fonction $t \to f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour la définition de la fonction R on remarque qu'au voisinage de $+\infty$: $\frac{e^{-t}}{t} = o(t^{-2})$, ce qui assure la convergence de l'intégrale : $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$.

- Remarque : la fonction g $t \to e^{-t}/t$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, mais l'intégrale définissant R est une intégrale généralisée. On peut néanmoins affirmer que g est de classe C^1 comme le montre le raisonnement suivant.

→ Soit $\alpha > 0$. On a pour $x \in]0,\alpha[$ $R(x) = \int_x^\alpha e^{-t}/t\,dt + \int_\alpha^{+\infty} e^{-t}/t\,dt$. Dans cette relation $\int_\alpha^{+\infty} e^{-t}/t\,dt$ est une constante et $x \to \int_x^\alpha e^{-t}/t\,dt$ intégrale sur un compact : Donc R est de classe C_1 sur $]0,\alpha[$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$ (car : $\mathbb{R}^+ = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}^{+*}}]0,\alpha[$).

- Remarque : autre méthode : soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et h tque $x+h \in \mathbb{R}^{+*}$, on calcule directement $\frac{1}{h}(R(x+h) - R(x))$ qui vaut : $\frac{1}{h}\int_{x+h}^x e^{-t}/t\,dt$. D'après le premier théorème de la moyenne, il existe $\theta(h)$ tel que : $\frac{1}{h}\int_{x+h}^h e^{-t}/t\,dt = -g(\theta_h)$ $\quad (g(t) = e^{-t}/t)$. Comme g est continue $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(R(x+h) - R(x))$ est : $-g(x)$. On en déduit que R est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée $-g$ qui est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$: la fonction R est bien de classe C^1.

c) On a, pour $v \neq 0$, $1 + (1-v) + \ldots + (1-v)^{n-1} = \frac{1-(1-v)^n}{v}$ (2-c)

Pour $0 \leq i \leq n-1$, on a $\int_0^1 (1-v)^i\,dv = \frac{1}{1+i}$. L'égalité (2-c) se prolonge en $v=0$, par continuité on a donc :

$$\int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v}\,dv = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1+i}$$

d) - Remarque la notation $e_n(t)$ du texte est malheureuse ! En l'écrivant vite elle "converge" très vite vers $\ln$...

→ le changement de variable $v = \frac{t}{n}$ donne :

$$\int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v}\,dv = \int_0^n \frac{1-(1-\frac{t}{n})^n}{t}\,dt = \int_0^n \frac{1-e_n(t)}{t}\,dt.$$

On a alors, pour $n \geq 1$ les égalités :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \ln n = \int_0^n \frac{1-e_n(t)}{t}\,dt - \int_1^n \frac{dt}{t}$$

$$= \int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}\,dt - \int_1^n \frac{e_n(t)-1}{t}\,dt - \int_1^n \frac{dt}{t}$$

les deux dernières intégrales étant des intégrales de fonctions continues sur un compact on obtient :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \ln n = \int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}\,dt - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t}\,dt$$

- Remarque : ce découpage est imposé par le fait suivant : On ne peut pas écrire $\int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{t}\,dt - \int_0^1 \frac{e_n(t)}{t}\,dt$, puisque ces intégrales divergent.

→ e) La droite d'équation $y = 1+v$ est la tangente à l'origine du graphe de la fonction $v \to e^v$. Cette fonction est (comme pour être) convexe. Elle est, en particulier au dessus de sa tangente en $v=0$. d'où : $\forall v \in \mathbb{R}$ $\quad 1+v \leq e^v$

y = e^v
y = 1+v
v

f) On a pour tout $t \in [0,n]$, d'après (6) : $1 + \frac{t}{n} \leq e^{(t/n)}$ d'où (car $0 \leq 1+t/n$) : $0 \leq (1+\frac{t}{n})^n \leq e^t$.

Comme : $0 \leq 1 - t/n$, on a $(1 - t^2/n^2)^n \leq e^t(1-t/n)^n$

En appliquant de nouveau (6) avec $v = -t/n$ il vient : $(1-t/n)^n \leq e^{-t}$

D'où la double inégalité : $(1-t^2/n^2)^n e^{-t} \leq (1-t/n)^n \leq e^{-t}$.

On l'écrit sous la forme : $\quad -e^{-t} \leq e_n(t) \leq -(1-t^2/n^2)^n e^{-t}$ (2f)

En ajoutant à (2-f) e^{-t} on a : $0 \leq e^{-t} - e_n(t) \leq (1-(1-\frac{t^2}{n^2})^n)e^{-t}$

On remarque que la fonction $x \to (1-x)^n$ est convexe sur l'intervalle $]-\infty, 1]$, son graphe est au dessus de toutes ses tangentes ; en particulier en zéro. On a : $\forall x \in]-\infty\, 1]$, $(1-x)^n \geq -nx$.

On en déduit que : $1-(1-x)^n \leq nx$.

En remplaçant on obtient finalement

$$0 \leq e^{-t} - e_n(t) \leq \frac{t^2}{n}e^{-t}$$

2 - suite g) On a $\gamma_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln(n+1)$, donc d'après 2-d)

$\forall n \geq 1 \quad \gamma_n + \ln(n+1) - \ln n = \int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}\,dt + \int_1^n \frac{e_n(t)}{t}\,dt$.

Comme : $\lim_{n\to+\infty} \ln((n+1)/n) = 0$ Il reste à voir que la limite de $S_n = \int_0^1 (1-e_n(t))/t\,dt$ (resp $R_n = \int_1^n e_n(t)/t\,dt$) existe et vaut $S(1) = \int_0^1 (1-e^{-t})/t\,dt$ (resp $R(1) = \int_1^{+\infty} e(t)/t\,dt$)

On remarque que : $\forall t \in]0,1] \quad (1-e_n(t))/t - (1-e^{-t})/t = (e(t)-e_n(t))/t$

donc, d'après le 2-f : $0 \leq (1-e_n(t))/t - (1-e^{-t})/t \leq (t e^{-t})/n$.

En passant aux intégrales (Remarque : ceci ne pose pas de problème les fonctions sont prolongeables par continuité) on obtient :

$$0 \leq S_n - S(1) \leq \frac{1}{n}\int_0^1 t e^{-t}\,dt \leq \frac{1}{n}.$$

donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = S(1)$.

De la même façon on a : $\forall t \in [1,n] \quad 0 \leq e(t) - e_n(t) \leq (t e^{-t})/n$

d'où : $0 \leq \int_1^n \frac{1}{t}e(t)\,dt - \int_1^n e_n(t)/t\,dt \leq \frac{1}{n}\int_1^n t e^{-t}\,dt \leq \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} t e^{-t}\,dt < +\infty$.

On a alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_1^n \frac{1}{t}e(t)\,dt - \int_1^n \frac{1}{t}e_n(t)\,dt\right) = 0$. Comme $\lim_{n\to+\infty}\int_1^n e(t)\,dt$ existe (c'est $R(1)$) on en déduit que $\lim_{n\to+\infty}\int_1^n e_n(t)/t\,dt$ existe : ces deux limites sont alors égales d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = R(1)$$

■ Remarque : Permutter les signes "lim" et "intégrales" peut se faire sous des hypothèses précises : Revoir le TD N°3, pour trouver des contre-exemples. La méthode suggérée par le texte montre la convergence uniforme de $t \mapsto (1-e_n(t))/t$ vers $t \mapsto (1-e(t))/t$ sur l'intervalle $]0,1]$, et même sur $[0,1]$ si on considère les prolongements par continuité.

3°) Expression de γ à l'aide de la dérivée de Γ

a) Posons $f(t,x) = e^{-t}t^{x-1}$. Pour x fixé, appartenant à $]0,+\infty[$ on a : $e^{-t}t^{x-1} \sim t^{x-1}$ (en 0). Ceci établit la convergence de l'intégrale $\int_0^1 f(t,x)\,dt$. Sous les mêmes hypothèses on a $e^{-t}t^{x-1} = o(t^{-2})$ en $+\infty$ qui établit la convergence de $\int_1^{+\infty} f(t,x)\,dt$. Donc $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} f(t,x)\,dt$ est bien définie

b) La fonction $(t,x) \to f(t,x)$ du 3-a) est continue sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$. Alors $\Gamma_n(x)$ est continue, puisque l'intervalle d'intégration est compact.

3-b suite La fonction f admet sur $\mathbb{R}^{+*}$ une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ qui est continue sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$: donc $\Gamma_n(x)$ est de classe C^1 et $\forall n \geq 1, \quad \Gamma'_n(x) = \int_{1/n}^{n} e^{-t}t^{x-1}\ln t\,dt$.

c) • Remarque : Il faut noter que le problème est un problème de convergence de suite de fonctions et non d'intégrales

→ Soit donc $[a,b]$ un intervalle compact. On a pour $x \in [a,b]$.

$$0 \leq \Gamma(x) - \Gamma_n(x) = \int_0^{1/n} e^{-t}t^{x-1}\,dt + \int_n^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt.$$

Or pour $t \in]0,1]$, on a $t^{x-1} \leq t^{a-1}$ et pour $t \in [1,+\infty[$ on a $t^{x-1} \leq t^{b-1}$ d'où :

$$0 \leq \Gamma(x) - \Gamma_n(x) \leq \int_0^{1/n} e^{-t}t^{a-1}\,dt + \int_n^{+\infty} e^{-t}t^{b-1}\,dt$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{1/n} e^{-t}t^{a-1}\,dt = 0$ et $\lim_{n\to+\infty}\int_n^{+\infty} e^{-t}t^{b-1} = 0$ on a : $\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in[a,b]} |\Gamma(x) - \Gamma_n(x)|\right) = 0$

Ce qui traduit la convergence uniforme de Γ_n vers Γ sur $[a,b]$.

d) La fonction $(t,x) \to g(t,x) = e^{-t}t^{x-1}\ln t$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ et on a, pour x fixé >0, les propriétés suivantes.

• En zéro $g(t,x) = o(t^{x/2-1})$ car $\ln t = o(t^{-x/2})$ en zéro. Ceci assure la convergence de $\int_0^1 g(t,x)\,dt$ (car $x/2 - 1 > -1$).

• En $+\infty$ $g(t,x) = o(t^{-2})$ (car $\ln t = o(t)$ et $e^{-t}t^{x-1} = o(t^{-3})$) Ceci assure la convergence de $\int_1^{+\infty} g(t,x)\,dt$. La fonction F est donc bien définie sur $\mathbb{R}^{+}$.

On vient donc de montrer que la suite de fonctions (Γ'_n), définie ci dessus convergeait simplement vers F, sur $\mathbb{R}^{+*}$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{1/n}^{n} e^{-t}t^{x-1}\ln t\,dt = F(x).$$

Si on réussit à montrer que $(\Gamma'_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers F par exemple sur tout compact $[a,b]$ on pourra en déduire (que la fonction Γ est de classe C^1 sur $[a,b]$ et de dérivée F

■ Remarques 1) dans le c) on a montré que la suite (Γ_n) a pour limite Γ, limite uniforme sur les compacts

On majore donc $\Gamma'_n(x) - F(x)$ sur un compact $[a,b]$ fixé inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$.

On a $|\Gamma'_n(x) - F(x)| \leq \int_0^{1/n} |e^{-t}t^{x-1}\ln t|\,dt + \int_n^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\ln t\,dt$,

pour $n \geq 1$,

3.d-Suite) Comme dans 3-c) on en déduit la majoration

$$|\Gamma'_n(x) - F(x)| \leq \int_0^{1/n} e^{-t}t^{a-1}|\ln t|\,dt + \int_n^{+\infty} e^{-t}t^{b-1}\ln t\,dt.$$

La convergence de l'intégrale $\int_0^1 e^{-t}t^{a-1}\ln t\,dt$ (déjà montrée) entraîne que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{1/n} e^{-t}t^{a-1}|\ln t|\,dt = 0$. La convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{b-1}\ln t\,dt$ entraîne que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_n^{+\infty} e^{-t}t^{b-1}\ln t\,dt = 0$. On en déduit la convergence uniforme de Γ'_n vers F sur le compact $[a,b]$.

- Remarque - point de rigueur - $\ln t$ garde un signe constant sur $]0,1]$ ce qui fait que convergence et convergence absolue se confondent pour l'intégrale $\int_0^1 e^{-t}t^{a-1}\ln t\,dt$.

Par l'argument usuel, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

e) On remarque que $\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt$.

Posons $A(\alpha) = \int_\alpha^1 e^{-t}\ln t\,dt$, pour $\alpha \in]0,1]$

et $B(\beta) = \int_1^\beta e^{-t}\ln t\,dt$, pour $\beta \in [1,+\infty[$.

Pour tout $\alpha \in]0,1]$, une intégration par parties donne :

$$A(\alpha) = [(1-e^{-t})\ln t]_\alpha^1 - \int_\alpha^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt, \text{ car } t \to 1-e^{-t}$$

est une primitive de e^{-t}.

On a alors $\lim\limits_{\alpha\to0^+}\int_\alpha^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt = -S(1)$ (la convergence a été prouvée)

et $\lim\limits_{\alpha\to0}(1-e^{-\alpha})\ln\alpha = 0$ car $1-e^{-\alpha} \sim +\alpha$ en zéro.

d'où $\lim\limits_{\alpha\to0^+} A(\alpha) = -S(1)$.

Pour $\beta > 1$ on a : $B(\beta) = -e^{-\beta}\ln\beta + \int_1^\beta \frac{e^{-t}}{t}\,dt$, en intégrant par partie.

Comme $\lim\limits_{\beta\to+\infty} e^{-\beta}\ln\beta = 0$ et $\lim\limits_{\beta\to+\infty}\int_1^\beta \frac{e^{-t}}{t}\,dt = R(1)$

on obtient $\lim\limits_{\beta\to+\infty} B(\beta) = R(1)$

Enfin : $\Gamma'(1) = \lim\limits_{\alpha\to0^+} A(\alpha) + \lim\limits_{\beta\to+\infty} B(\beta) = -S(1) + R(1) = -\gamma$.

- Remarque J'ai procédé avec beaucoup de soin dans ces intégrations par parties, dont le résultat repose sur un bon choix de primitives.

II Approximation de γ par accélération de convergence de la série (γ_n)

1. a. - Remarque ; ambiguïté du texte : la série $\sum \Delta f(p)$ n'est définie que pour $p \geq 1$.

On a alors $\sum\limits_{p=1}^n a_p = \sum\limits_{p=1}^n (f(p) - f(p+1)) = f(1) - f(n+1)$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1) = 0$ et $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} a_p = f(1)$. Le reste d'ordre n s'écrit $r_n = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} a_p - \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} a_p = f(1) - (f(1) - f(n+1)) = f(n+1)$

1. b. - On a $\Delta\varphi_{k-1}(x) = \varphi_{k-1}(x) - \varphi_k(x) = \dfrac{k}{x(x+1)\cdots(x+k)} = k\varphi_k(x)$.

On a : $\varphi_k(x) = \frac{1}{k}\Delta\varphi_{k-1}(x)$. La série $\sum_{p\geq1}\Delta\varphi_{k-1}(p)$ est convergente car φ_{k-1} appartient à E (on applique 1.a.). Donc la série $\sum_{p\geq1}\varphi_k(p)$ l'est aussi. Toujours d'après 1.a. on a :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty}\varphi_k(p) = \frac{1}{k}\varphi_{k-1}(n+1) = \frac{1}{k}\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} = \frac{n!}{(n+k)!}\frac{1}{k}$$

—//—

2. a. - La formule donnée dans le chapeau de cette question 2 donne immédiatement le résultat :

$$u_p = \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{u}{p+u}\,du = \frac{1}{p(p+1)}\int_0^1 u\,du + \frac{1}{p(p+1)}\int_0^1 \frac{u(1-u)\,du}{p+u} = \text{le résultat !}$$

2. b. - On a $r_n = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} u_p = \frac{1}{2}\sum\limits_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p(p+1)} + \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p(p+1)}\int_0^1 \frac{N_2(u)}{p+u}\,du$

(les deux séries du membre de droite convergent)

On a : $\frac{1}{2}\sum\limits_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{2}\sum\limits_{p=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{2(n+1)}$ (calcul déjà fait)

On a donc $r_{n,1} = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p(p+1)}\int_0^1 \frac{N_2(u)}{p+u}\,du$ qu'il s'agit de majorer. On a : $\forall u \in [0,1]$ $\frac{1}{p+u} \leq \frac{1}{p}$ d'où :

$r_{n,1} \leq \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p^2(p+1)}\int_0^1 N_2(u)\,du$. On a $\int_0^1 N_2(u)\,du = \frac{1}{6}$

Finalement $r_{n,1} \leq \frac{1}{6}\sum\limits_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p^2(p+1)} \leq \frac{1}{6}\sum\limits_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{(p-1)p(p+1)}$

Clen appliquant II.1.b. avec $\left(\sum\limits_{p=n+1}^{+\infty}\varphi_k(p-1)\right)$ on obtient

$$\frac{1}{6}\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{(p-1)(p)(p+1)} = \frac{1}{6}\sum_{p=n+1}^{+\infty}\varphi_2(p-1) = \frac{1.1}{6\,2}\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{12}\frac{1}{n(n+1)}$$

D'où le résultat.

3.a. – Pour le faire proprement on peut faire une récurrence. On vérifie d'abord que la formule demandée correspond pour $k=1$ avec celle montrée en II.2.a.

On remarque que $N_{k+2}(u) = (k+1-u)N_{k+1}(u)$ et en remplaçant $N_{k+1}(u)$ par $N_{k+2}(u)/(k+1-u)$ dans la formule du texte on obtient :

$$P_{p,k} = 1/(p(p+1)\cdots(p+k))\int_0^1 \frac{N_{k+2}(u)\,du}{(k+1-u)(p+u)}$$

$$= 1/(p(p+1)\cdots(p+k)(p+k+1))\int_0^1 \frac{(p+k+1)N_{k+2}(u)\,du}{(k+1-u)(p+u)}$$

Or (petite astuce !) $p+k+1 = k+1-u+p+u$

d'où : $$P_{p,k} = \frac{\lambda_{k+1}}{p(p+1)\cdots(p+k+1)} + P_{p,k+1}$$

On conclut en remplaçant $P_{p,k}$ dans la formule donnant u_p :

$$u_p = \sum_{j=1}^{k+1}\frac{\lambda_j}{p\cdots(p+j)} + P_{p,k+1}$$

3.b. – Comme dans II.2. il s'agit de relier les $(u_p)_{p\geq 1}$ à la suite des fonctions φ_j ; on remarque que :

$\forall p\geq 1\ \forall k\geq 1$ $$u_p = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j\varphi_j(p) + P_{p,k}$$

D'où : $$\sum_{p=n+1}^{n+m} u_p = \sum_{p=n+1}^{n+m}\left(\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\varphi_j(p) + \sum_{p=n+1}^{n+m}P_{p,k}\right)\ (m\geq 1)$$

Puis (*) $$\sum_{p=n+1}^{n+m} u_p = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j\sum_{p=n+1}^{n+m}\varphi_j(p) + \underline{\sum_{p=n+1}^{n+m}P_{p,k}}\ (m\geq 1)$$

On doit majorer le terme souligné : on a :

$$P_{p,k} = \frac{1}{p(p+1)\ \ (p+k)}\int_0^1\frac{N_{k+1}(u)}{p+u}du \leq \frac{1}{p^2(p+1)\cdots(p+k)}\int_0^1 N_{k+1}(u)\,du$$

(car sur $[0,1]$ $N_{k+1}(u)\geq 0$ et $\frac{1}{p+u}\leq\frac{1}{p}$). D'où :

$$0\leq P_{p,k}\leq\frac{\lambda_{k+1}}{(p-1)p\cdots(p+k)} = \lambda_{k+1}\varphi_{k+1}(p-1)$$

IX

Le terme souligné se majore en :

$$0\leq\sum_{p=n+1}^{n+m}P_{p,k}\leq\lambda_{k+1}\sum_{p=n+1}^{n+m}\varphi_{k+1}(p-1)\leq\lambda_{k+1}\sum_{p=n+1}^{+\infty}\varphi_{k+1}(p-1)$$

qui est donné par le II.1.b.

d'où : $\forall m\geq 1$: $$\sum_{p=n+1}^{n+m}P_{p,k}\leq\frac{\lambda_{k+1}}{k+1}\frac{(n-1)!}{(n+k)!}$$

Chacune des k séries $\sum_{p\geq 1}\varphi_j(p)$ est convergentes ($\varphi_j(p)\sim\frac{1}{p^{j+1}}$ en $+\infty$) il en résulte en faisant tendre m vers l'infini dans (*) :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty}u_p = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j\sum_{p=n+1}^{+\infty}\varphi_j(p) + \sum_{p=n+1}^{+\infty}P_{p,k}$$

Or d'après II.1.b. $\sum_{p=n+1}^{+\infty}\varphi_j(p) = \frac{1}{j}\frac{n!}{(n+j)!}$

d'où enfin : $$r_n = \sum_{j=1}^{k}\frac{\lambda_j\,n!}{j(n+j)!} + r_{n,k}.$$

avec $$0\leq r_{n,k}\leq\frac{\lambda_{k+1}}{k+1}\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)}$$

3.c. – le procédé est une généralisation de celui du I.1.d.

On pose pour $n\in\mathbb{N}^*$ $$\gamma_{n,k} = \gamma_n + \frac{\lambda_1}{n+1} + \frac{\lambda_2}{2(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{\lambda_k}{k(n+1)\cdots(n+k)}$$

On a alors : $$\gamma-\gamma_{n,k} = \gamma-\gamma_n - \sum_{j=1}^{k}\frac{\lambda_j}{j(n+1)\cdots(n+j)} = r_n - \sum_{j=1}^{k}\frac{\lambda_j}{j(n+1)\cdots(n+j)} = r_{n,k}$$

4.a. – On a : $\lambda_{n+1} = \int_0^1 u(1-u)(2-u)\cdots(n-u)\,du$ et l'on majore chaque $j-u$ ($2\leq j\leq n$) par j. D'où $\lambda_{n+1}\leq n!\int_0^1 u(1-u)\,du$

d'où : $\lambda_{n+1}\leq\frac{1}{6}n!$. En changeant u en $1-u$ il vient :

$$\lambda_{n+1} = \int_0^1(1-u)u(1+u)\cdots(n-1+u)\,du \geq (n-1)!\int_0^1 u(1-u)\,du \geq \frac{1}{6}(n-1)!$$

On utilise le critère de Cauchy pour trouver le rayon de convergence de la série on a : $$\left(\frac{1}{6(n-1)n}\right)^{\frac{1}{n}}\leq\left(\frac{\lambda_n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}\leq\left(\frac{1}{6(n+1)}\right)^{\frac{1}{n}}$$

les membres de gauche et droite tendent vers 1 :

X

4.a. (suite) – le Rayon de convergence est donc 1.

4.b. – On a pour $|x| < 1$:

$$(1+x)^u = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{u(u-1)\cdots(u-k+1)}{k!} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} N_k(u) \frac{x^k}{k!}$$

| Attention au $(-1)^{k+1}$!)

On considère alors la fonction $\varphi : u \to 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{N_k(u) x^k}{k!}$: comme pour $u \in [0,1]$ on a $|N_k(u)| \leq k!$, il vient :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \in [0,1] \quad \left| (-1)^{k+1} \frac{N_k(u)}{k!} x^k \right| \leq |x|^k$$

La série définissant φ converge normalement sur $[0,1]$, puisque par hypothèse $|x|$ est inférieure à 1. Les fonctions N_k étant continues on peut intégrer terme à terme d'où :

$$\int_0^1 (1+x)^u du = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \left(\int_0^1 N_k(u)\, du \right) \frac{x^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{\lambda_k x^k}{k!} = G(x).$$

On a, pour $|x| < 1$: $\int_0^1 (1+x)^u du = \frac{1}{\ln(1+x)} \Big[(1+x)^u \Big] = \frac{x}{\ln(1+x)}$

| Remarque : par ailleurs $G(0) = 1$.

4.c. – On utilise l'égalité $x = \ln(1+x)\, G(x)$.

Soit encore : $x = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \right) \left(1 + \sum_{\ell=1}^{+\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{\lambda_\ell x^\ell}{\ell!} \right)$

On a alors en développant le deuxième membre de l'égalité précédente $x = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \sum_{\ell,k \geq 1} (-1)^{\ell+k} \frac{\lambda_\ell x^{k+\ell}}{k\, \ell!}$

D'où : $\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} = \sum_{\ell,k \geq 1} (-1)^{\ell+k} \frac{\lambda_\ell x^{k+\ell}}{k\, \ell!}$

On récrit la double série de l'égalité précédente en regroupant les m. puissances de x : $\sum_{\ell,k \geq 1} (-1)^{\ell+k} \frac{\lambda_\ell x^{k+\ell}}{k\, \ell!} = \sum_{m=2}^{+\infty} (-x)^m \sum_{\ell=1}^{m-1} \frac{\lambda_\ell}{(m-\ell)\, \ell!}$

d'où : $\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{x^m}{m} = \sum_{m=2}^{+\infty} x^m \sum_{\ell=1}^{m-1} \frac{\lambda_\ell}{(m-\ell)\, \ell!}$

d'où
$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} \\ \frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2} = \frac{1}{3} \\ \cdots\cdots \\ \frac{\lambda_1}{m-1} + \frac{\lambda_2}{(m-2)2!} + \cdots \frac{\lambda_{m-1}}{(m-1)!} = \frac{1}{m} \end{cases}$$

5 – Application numérique

5.a. – Le système triangulaire du 4.c. permet de calculer les λ_i (on l'écrit pour $m = 5$) ; on obtient :

$$\lambda_1 = 1/2\ ;\ \lambda_2 = 1/6\ ;\ \lambda_3 = 1/4\ ;\ \lambda_4 = 19/30$$

On peut majorer λ_5 en se rappelant que : $\lambda_5 = \int_0^1 u(1-u)(2-u)(3-u)(4-u)\, du$

On a, par exemple : $\lambda_5 \leq 4! \int_0^1 u(1-u)\, du = 4$.

| Mais, il n'est pas très coûteux de calculer exactement λ_5 (surtout avec une calculatrice programmable) on obtient $\lambda_5 = \frac{9}{4}$

5.b. – Selon la question II.3.b. : $r_{n,4} \leq \frac{\lambda_5}{5n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$

On peut majorer λ_5 par 4 et $r_{n,4}$ par : $r_{n,4} \leq \frac{4}{5n^5}$: On constate que pour $n \geq 41$ on a $r_{n,4} \leq 7.10^{-9}$.

Mais en utilisant $\lambda_5 = \frac{9}{4}$ et en utilisant $r_{n,4} \leq \frac{\lambda_5}{5n(n+1)(\ldots)(n+4)}$ on constate que $n \geq 35$ suffit pour obtenir la précision voulue : d'où un gain non négligeable de calculs et une limitation du nombre d'erreurs d'arrondi.

5.c. – Selon la question II.3.c. on a :

$$r_{n,4} = r_n + \frac{\lambda_1}{n+1} + \frac{\lambda_2}{2(n+1)(n+2)} + \frac{\lambda_3}{3(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{\lambda_4}{4(n+1)\cdots(n+4)}$$

en prenant $n = 35$.

- Calcul de r_n. On a $r_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

En supposant disposer d'une calculatrice calculant à 10^{-11} près, la somme $\sum_{k=1}^{35} \frac{1}{k}$ est connue à 3.5×10^{-10} près (en supposant que les additions s'effectuent sans erreur d'arrondi). Si le logarithme de 36 est connu à 10^{-10} près (ce qui est raisonnable) r_n peut être calculé à mieux que 10^{-9} près.

- Calcul de $r_{n,4}$. On peut exprimer $r_{n,4} - r_n$ sous forme d'une fraction rationnelle : $r_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{3305269}{236882880}$

(les r_i sont calculés au II.5.a.)

En supposant que le calcul du quotient se fait à 10^{-10} près on obtient au total $r_{n,4}$ avec une précision meilleure que $2\,10^{-9}$ comme demandé.

D'après II.5.b. on a $|r_{n,4} - \gamma| = |r_{n,4}| \leq 7\,10^{-9}$ (pour $n = 35$) on voit qu'on connaît γ avec une précision supérieure à 10^{-8} puisque : $2\,10^{-9} + 7\,10^{-9} \leq 10^{-8}$.

Remarque : la plupart des calculatrices calculent avec 11 décimales mais n'en affichent que huit. On peut extraire ces décimales cachés en soustrayant à la valeur calculée la valeur affichée à l'écran.

Ici on trouve $\gamma = 0,57721566 \pm 10^{-}$ à 10^{-8} près.

III Approximation de γ par développement en série entière de S.

III.1. – Nouvelle expression intégrale de γ.

On a $\gamma = R(1) - S(1) = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}dt - \int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$

$$= \int_1^x \frac{1-e^{-t}}{t}dt - \int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt - \int_1^x \frac{1-e^{-t}}{t}dt + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt$$

$$= R(x) - S(x) - \ln x.$$

III.2. – Evaluation asymptotique de $R(x)$.

2.a. – la formule est vraie pour $k = 1$ (à savoir $R(x) = R_1(x)$!).

On la suppose vraie pour k et on la montre pour $k+1$ ($k \geq 1$).

On a : $R(x) = e^{-x}\sum_{j=0}^{k-2}\frac{(-1)^j j!}{x^{j+1}} + R_k(x)$. On intègre $R_k(x)$ par parties

$$R_k(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^k}dt = (-1)^{k-1}(k-1)!\left[\left[-\frac{e^{-t}}{t^k}\right]_x^{+\infty} - k\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^{k+1}}dt\right.$$

(les intégrales et le terme tout intégré convergent). D'où :

$$R_k(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\,\frac{e^{-x}}{x^k} + (-1)^k k!\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^{k+1}}dt \quad (*)$$

d'où :

$$R(x) = e^{-x}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(-1)^j j!}{x^{j+1}} + R_{k+1}(x).$$

2.b. – Comme $t \to t^{-k}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ on a :

$\int_x^{+\infty}(e^{-t}/t^k)\,dt \leq \frac{1}{x^k}\int_x^{+\infty}e^{-t}dt = \frac{e^{-x}}{x^k}$. D'où : $|R_k(x)| \leq (k-1)!\,\frac{e^{-x}}{x^k}$

– D'après (*) on a $\left(|R_k(x)| - \frac{(k-1)!e^{-x}}{x^k}\right)\Big/\left(\frac{(k-1)!e^{-x}}{x^k}\right)$

$= \frac{x^k|R_{k+1}(x)|}{(k-1)!\,e^{-x}}$. Comme $|R_{k+1}(x)| \leq k\,e^{-x}/x^{k+1}$, il vient.

$$\left(|R_k(x)| - \frac{(k-1)!e^{-x}}{x^k}\right)\Big/\left(\frac{(k-1)!\,e^{-x}}{x^k}\right) = o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ en } +\infty.$$

d'où enfin $|R_k(x)| \sim \frac{(k-1)!\,e^{-x}}{x^k}$ en $+\infty$

2.c. – On a $\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^k}dt \geq \int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t^k}dt \geq \frac{1}{(2x)^k}\int_x^{2x}e^{-t}dt = \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{(2x)^k}$

d'où $|R_k(x)| \geq (k-1)!\left(\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{(2x)^k}\right)$

On sait alors que pour $a \in \mathbb{R}^{+*}$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{a^n} = +\infty$

Remarque : on le redémontre en montrant que si $u_n = \frac{n!}{a^n}$ alors $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}/u_n) = +\infty$

2.c. suite •) Inégalité $\ln k! \leq (k+1)\ln k - k + 1$.

1ère Méthode : par récurrence sur k : l'inégalité est vraie pour $k = 1$ (le vérifier). On la suppose vraie pour k et on la démontre pour $k+1$. On a $\ln(k+1)! = \ln(k+1) + \ln(k!)$

$$\leq \ln(k+1) + (k+1)\ln k - k + 1,$$

par hypothèse de récurrence. On écrit alors :

$$(k+1)\ln k = (k+1)\ln\left((k+1)\frac{k}{k+1}\right) = (k+1)\ln(k+1) + (k+1)\ln\left(1-\frac{1}{k+1}\right)$$

De l'inégalité $\ln(1-x) \leq -x$, vraie pour $x \in [0,1[$ (la vérifier) on déduit alors : $(k+1)\ln\left(1-\frac{1}{k+1}\right) \leq -1$. D'où enfin :

$$\ln(k+1)! \leq (k+2)\ln(k+1) - (k+1) + 1.$$

2ème Méthode : Méléard et Piquet (3ème édition du Leroy-Bruhl) utilisent la propriété illustrée sur le dessin ci-contre :

$$\ln k! = \sum_{j=2}^{k} \ln j \leq \int_2^{k+1} \ln t\, dt$$

Or $\int_2^{k+1} \ln t\, dt = [t\ln t - t]_2^{k+1} = (k+1)\ln(k+1) - 2\ln 2 - k + 1$

d'où $\ln k! \leq (k+1)\ln k + (k+1)\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - 2\ln 2 - k + 1$

On vérifie alors que : $(k+1)\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - 2\ln 2 \leq 0$ dès que $k \geq 3$

•) On a alors en utilisant (12) et la majoration précédente :

$$\ln|R_k(k)| \leq k\ln(k-1) - k + 2 - k\ln k = -2k + 2 + k\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$$

pour $k \geq 2$. De nouveau $\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \leq -\frac{1}{k}$ car $\frac{1}{k} \in [0,1[$ d'où

$$\ln|R_k(k)| \leq -2k + 1 \quad (k \geq 2).$$

Pour $k = 1$ un calcul direct de $R_1(1)$ montre que le résultat reste vrai ; d'où : $|R_k(k)| \leq e^{-2k+1}$ $(k \geq 1)$.

III. 3. Approximation de $S(x)$ par développement en série entière

3.a. — On a $S(x) = \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}\, dt$. L'Application $t \to e^{-t}$ est développable en série entière, avec un rayon de convergence infini. Le premier terme de cette série est 1. Il en résulte que l'Application $t \to \frac{1-e^{-t}}{t}$ est également développable

3 a. (suite). – avec un rayon de convergence infini. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad \frac{1-e^{-t}}{t} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{p-1} \frac{t^{p-1}}{p!}$$

Cette série converge normalement sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$ (car son Rayon de convergence est infini) : on peut donc permuter les signes somme et intégrale ; d'où :

$$S(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{p-1} \frac{x^p}{p\, p!} \qquad (*)$$

3.b. – La suite $(a_p(x))_{p\in\mathbb{N}}$ se présentant comme un quotient on étudie $a_{p+1}(x) / a_p(x) = \frac{px}{(p+1)^2}$

On a : $\frac{px}{(p+1)^2} \leq 1 \iff px \leq (p+1)^2$

$$\iff x \leq p + 2 + \frac{1}{p} \iff x - 2 \leq p + \frac{1}{p}.$$

On a donc, à coup sûr pour $p \geq [x] - 1$: $a_p(x) \leq a_{p+1}(x)$.

Donc a fortiori pour $p \geq [x]$ $a_p(x) \leq a_{p+1}(x)$.

3.c. – On reconnaît en la série de l'égalité (*) une série alternée dont le terme général décroît à partir du rang $[x]$ et tend vers 0 (x est fixé). On en déduit que pour $n \geq [x]$, on a :

$$|S(x) - S_n(x)| \leq \frac{x^n}{n\, n!}$$

Remarque : Revoir le très important théorème sur les séries alternées.

Pour obtenir la dernière inégalité on compare la croissance de $n!$ et de n^n. On a :

$$\ln n! \geq \sum_{j=1}^{n} \ln j \geq \int_1^n \ln t\, dt$$

(selon l'argument du III.2.c.)

On a : $\int_1^n \ln t\, dt = [t\ln t - t]_1^n = n\ln n - (n-1)$

D'où : $\ln n! \geq n\ln n - (n-1)$. Puis $n! \geq n^n e^{-(n-1)}$

On a donc : $|S(x) - S_n(x)| \leq \frac{x^n e^{n-1}}{n^{n+1}}$

III.4. Obtention d'une grande précision pour γ.

4.a. •) Pour $k = 1$ l'inégalité (12) donne : $R(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}$

Il suffit donc de trouver un entier x tel que : $\frac{e^{-x}}{x} \leq \frac{1}{3}10^{-100}$

Soit encore x tel que $x e^{x} \geq 3\,10^{100}$. Comme l'exponentielle croît plus vite on commence par exemple par chercher x' tel que $e^{x'} \geq 3\,10^{100}$. On trouve $x' \geq 23.2$. Quelques essais montrent qu'alors $x = 226$ est la plus petite valeur vérifiant $x e^{x} \geq 3\,10^{100}$.

Remarque : comme $\exp(226)$ n'est pas calculable par de nombreuses calculettes on vérifie en fait que :

$$\ln(x e^{x}) = \ln x + x \geq \ln 3\,10^{100} = \ln 3 + 100 \ln 10.$$

le logarithme a, d'une certaine façon, été inventé pour éviter de manier des grands nombres !

•) D'après la majoration du III 3.c. il s'agit de trouver n tel que : $\frac{226^{n} e^{n-1}}{n^{n+1}} \leq \frac{1}{3}10^{-100}$. soit encore :

$$(n+1)\ln n - n(1 + \ln 226) \geq 100 \ln 10 + \ln 3 - 1 \quad (**)$$

Un programme calculant le premier membre de $(**)$ avec test d'arrêt dès que l'inégalité est réalisé montre que $n = 810$ convient.

4.b. Pour $k = x$, l'égalité du III 2.c. montre que $|R_k(k)| \leq e^{-(2k-1)}$ et donc il suffit de prendre k tel que $e^{-(2k-1)} \leq \frac{1}{3}10^{-100}$. Sans difficulté ici $k \geq 117$ convient. Pour ce choix de k $|S(117) - S_n(117)| \leq \frac{1}{3}10^{-100}$ est réalisé dès que $n \geq 499$ (à l'aide du III.3.c. de nouveau).

4.c. On rappelle que $\gamma = S(x) - R(x) - \ln x$.

•) Dans le 4.a. on remplace γ par $S_n(x) - \ln x$ avec $x = 226$ et $n = 810$

4.c.-Suite

•) Dans le 4.b.) on remplace γ par $S_n(x) - \tilde{R}_k(x) - \ln x$ avec $\tilde{R}_k(x) = e^{-x} \sum_{j=0}^{j=k-2} \frac{(-1)^{j} j!}{x^{j+1}}$ en prenant $x = k = 117$ et $n = 499$.

•) Principe de calcul de $S_n(x)$.

On utilise trois variables, un compteur (j) une variable temporaire (T) et S (recueillant le résultat). On peut décrire le principe de calcul dans une boucle:

- Initialisation $T := x$ $S := x$ $j := 1$
- Tant que $j \leq n-2$. faire
  - $j := j+1$
  - $T := -T * x / j$
  - $S := S + T/j$.

•) Principe de calcul de $\tilde{R}_k(x)$: il est analogue

On utilise trois variables, le compteur j, le temporaire T et le résultat R On a alors le schéma suivant:

- Initialisation $j := 0$; $R := \frac{1}{k}$ $T := \frac{1}{k}$
- Tant que $j \leq k-2$ faire
  - $j := j+1$
  - $T := -T * j / k$
  - $R := R + T$
- multiplier par R par e^{-k}.

(On rappelle que $x = k$ dans la méthode décrite).

•) Remarque: Ces méthodes posent d'assez gros problèmes de calcul numériques : l'ordre de grandeur des nombres traités (méthode du 4.a.) peut devenir très grand (10^{98}) et la précision demandée très importante (de l'ordre de 110 décimales).

Capes 1988, épreuve II

Ce travail fait à partir d'une photocopie peut présenter quelques erreurs, me les signaler à l'adresse suivante :
jeaneric.richard(a)wanadoo.fr (changer (a) en @). Bon courage ! Version du 22 septembre 2010 à 13h45.

NOTATIONS ET OBJECTIF DU PROBLÈME

On désigne par $\mathscr{C}_n$ l'ensemble des configurations $P = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ constituées de n points, distincts ou non, du plan orienté. Dans tout le problème, n est un entier supérieur ou égal à 3.
Lorsque les points $A_1, A_2, \dots, A_n$ ne sont pas alignés, on dit que $P = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ est un *polygone*, dans le cas contraire, on dit que la configuration P est *aplatie*.
L'ensemble des polygones, éléments de $\mathscr{C}_n$, est noté $\mathscr{P}_n$; en particulier l'ensemble des *triangles* est noté $\mathscr{P}_3$, l'ensemble des *quadrilatères* est noté $\mathscr{P}_4$.
On dit qu'un polygone $P = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ est *régulier*, s'il existe une rotation r telle que $r(A_j) = A_{j+1}$ si $1 \leqslant j \leqslant n-1$ et $r(A_n) = A_1$.
On sait qu'une telle rotation est unique, qu'une mesure de son angle est de la forme $\dfrac{2k\pi}{n}$ où $1 \leqslant k \leqslant n-1$; son centre est appelé centre de P.
Le choix d'une origine O et d'une base orthonormée directe permet d'identifier le plan à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes en associant à tout point A de coordonnées $(x\ ;\ y)$ son affixe $z = x + iy$. Á toute configuration $P = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ est ainsi associée bijectivement un élément $u = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ de $\mathbb{C}^n$ qu'on appellera encore affixe de P ; inversement, on dira que P est l'image de u.
On désigne par d l'opérateur de *décalage* qui à toute configuration $P = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ associe la configuration $d(P) = (A_2, A_3, \dots, A_n, A_1)$ et par m l'opérateur de passage aux milieux qui à $P = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ associe $(B_1, B_2, \dots, B_n)$ où, pour tout élément $K \in [\![1, n-1]\!]$, B_k est le milieu du segment $[A_k, A_{k+1}]$, et où B_n est le milieu du segment $[A_n, A_1]$.

Dans toute la suite on note D et M les endomorphismes du $\mathbb{C}$−espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ définis par les relations :

$$D(z_1, z_2, \dots, z_n) = (z_2, z_3, \dots, z_n, z_1)\ ; \qquad M = \frac{1}{2}(I + D),$$

où I désigne l'application identique de $\mathbb{C}^n$.
Dans ces conditions, pour toute configuration P d'affixe u, les configurations $d(P)$ et $m(P)$ admettent pour affixes respectives $D(u)$ et $M(u)$.

L'objectif du problème est d'étudier l'opération m de passage aux milieux. Dans le partie I., on examine l'effet du passage aux milieux sur la barycentration, ainsi que la compatibilité avec les similitudes.
La partie II.est consacrée aux propriétés du passage aux milieux dans le cas des polygones réguliers, qui jouent un rôle fondamental pour l'ensemble du problème. Dans la partie III., on étudie la bijectivité du passage aux milieux. Enfin dans la partie IV., on caractérise les polygones dont la forme est stable par passage aux milieux.

I.- EFFET DE LA BARYCENTRATION ET COMPATIBILITÉ AVEC LES SIMILITUDES DU PLAN.

Pour toute transformation affine (bijective) t du plan, et pour toute configuration $P = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ on note tP la configuration $(A'_1, A'_2, \dots, A'_n)$ oú $A'_j = t(A_j)$.

1. Isobarycentre de $m(P)$; compatibilité avec les translations.

Soit $P = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ une configuration et G l'isobarycentre de P, défini par la relation :

$$\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_1} + \cdots + \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}.$$

a) Déterminer l'isobarycentre de $m(P)$.

b) Soit t une translation du plan. Comparer $m(tP)$ et $tm(P)$. Déterminer l'isobarycentre de $m(tP)$.

2. Interprétation dans $\mathbb{C}^n$.

On note e_0 l'élément de $\mathbb{C}^n$ défini par la relation $e_0 = (1, 1, \dots, 1)$ et H l'hyperplan de $\mathbb{C}^n$ d'équation :

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 0.$$

a) Montrer que $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}e_0 \oplus H$ et expliciter les projecteurs associés à cette décomposition en somme directe. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathbb{C}e_0$ et H sont stables par l'endomorphisme M.

b) soit P une configuration d'affixe $u = (z_1, z_2, \dots, z_n)$. Déterminer l'affixe λ de l'isobarycentre G de P. Caractériser géométriquement les configurations P telles que $u \in H$ et celles qui vérifient la relation $u = \alpha e_0$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$.

3. Compatibilité avec les similitudes.

Soit $P = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ une configuration d'affixe $u = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$. On note $\overline{P}$ la configuration d'affixe $\overline{u} = (\overline{z_1}, \overline{z_2}, \cdots, \overline{z_n})$ et, pour tout nombre complexe a, on note aP la configuration d'affixe $au = (az_1, az_2, \cdots, az_n)$.

a) Par quelles transformations géométriques simples du plan, $\overline{P}$ et aP se déduisent-elles de P ?

b) Comparer $m(\overline{P})$ et $\overline{m(P)}$, ainsi que $m(aP)$ et $am(P)$.

II.- Polygone des milieux d'un polygone régulier et similitudes directes.

Dans toute la suite du problème, on note ω la racine n-ième de l'unité définie par la relation $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$.

Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on note R_k la configuration ayant pour affixe :

$$e_k = (1, \omega^k, \omega^{2k}, \dots, \omega^{(n-1)k}).$$

1. Interprétation dans $\mathbb{C}^n$ des polygones réguliers.

a) Prouver que si $k \neq 0$ et $2k \neq n$, R_k est un polygone régulier de centre O. Déterminer l'isobarycentre de R_k. Quelle est la nature de R_0 et de R_k lorsque $2k = n$?

b) Inversement, montrer que pour tout polygone régulier $P = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ de centre O, il existe un entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$ et $2k \neq n$, et une similitude directe s, de centre O, tels que $P = sR_k$. Déterminer l'isobarycentre de P.

2. Polygone des milieux d'un polygone régulier.

a) Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, calculer $D(e_k)$ et $M(e_k)$.

b) En déduire que les endomorphismes D et M sont diagonalisables et déterminer leurs valeurs propres.

c) Prouver que, si $2k \neq n$, $m(R_k)$ se déduit de R_k par une similitude directe de centre O dont on précisera le rapport ρ_k et une mesure θ_k de l'angle.

d) En déduire que la configuration des milieux $Q = m(P)$ d'un polygone régulier P est encore un polygone régulier et indiquer comment Q se déduit de P.

3. Caractérisation des polygones P dont le polygone des milieux est directement semblable à P.

a) Soit $P = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ un polygone dont l'isobarycentre est O, d'affixe u.
Montrer que $m(P)$ est directement semblable à P si, et seulement si, u est vecteur propre de M. En déduire que P est de la forme $P = aR_k$, où $0 < k \leqslant n-1$, $2k \neq n$, et où a est un nombre complexe non nul.

b) Déterminer les polygones P tels que $m(P)$ soit directement semblable à P.

III.- Bijectivité du passage aux milieux.

1. Cas des triangles.

a) Soit $P = (A_1, A_2, A_3)$ un triangle et G son isobarycentre. Construire le triangle $m(P) = (B_1, B_2, B_3)$.
Prouver que $dm(P)$ se déduit de P par une homothétie h de centre G dont on indiquera le rapport λ.

b) En déduire que m induit une bijection $\mathscr{P}_3$. Étant donné un triangle $Q = (B_1, B_2, B_3)$ indiquer une construction géométrique de l'unique triangle $P = (A_1, A_2, A_3)$ tel que $m(P) = Q$.

2. Cas des quadrilatères.

a) Soient $P = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ une configuration, G son isobarycentre et $m(P) = (B_1, B_2, B_3, B_4)$. Prouver que $\overrightarrow{A_1A_3} = 2\overrightarrow{B_1B_2} = 2\overrightarrow{B_4B_3}$; ainsi (B_1, B_2, B_3, B_4) est un parallélogramme (éventuellement aplati) dont on indiquera le centre de symétrie. Placer P et $m(P)$ sur une même figure.

b) Inversement, soient $Q = ((B_1, B_2, B_3, B_4)$ un parallélogramme et s_1, s_2, s_3, s_4 les symétries centrales par rapport à chacun des sommets. Calculer $s_2 \circ s_1$ et $s_4 \circ s_3$ et montrer que $s_4 \circ s_3 \circ s_2 \circ s_1$ est l'identité du plan. En déduire que pour tout point A_1 du plan, il existe une configuration $P = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ et une seule telle que $m(P) = Q$ et indiquer une construction géométrique des points A_2, A_3, A_4.

c) *Exemple où Q est aplati et où P ne l'est pas.* On donne les points B_1, B_2, B_3, B_4 par leurs coordonnées $(-3 ; 0)$, $(1 ; 0)$, $(3 ; 0)$ et $(-1 ; 0)$. Construire P sachant que A_1 a pour coordonnées $(-4 ; 1)$.

d) *Exemple où Q est non aplati et où les sommets de P ne sont pas distincts deux à deux.* Étant donné un parallélogramme non aplati Q, déterminer une configuration $P = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ telle que $m(P) = Q$ et $A_1 = A_2$. Peut-il arriver que $A_1 = A_3$?

e) Prouver que m induit une bijection de l'ensemble des parallélogrammes sur lui-même. Á cet effet, on pourra d'abord montrer que qu'étant donné un parallélogramme $P = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ d'isobarycentre G et $m(P) = (B_1, B_2, B_3, B_4)$, alors $\overrightarrow{GA_1} = \overrightarrow{B_2B_1}$.

3. Bijectivité du passage au milieu dans le cas où n est impair.
On écrit n sous la forme $n = 2p + 1$ où $p \geqslant 1$.

a) Déterminer le noyau de l'endomorphisme M_0 de H induit par M.

b) En déduire que m est une bijection de $\mathscr{C}_n$. Prouver que m induit une bijection de $\mathscr{P}_n$.

c) Soit $Q = (B_1, B_2, \dots, B_{2p+1})$ une configuration d'affixe $v = (b_1, b_2, \dots, b_{2p+1})$ et d'isobarycentre O, $P = (A_1, A_2, \dots, A_{2p+1})$ l'unique configuration telle que $m(P) = Q$ et $u = (z_1, z_2, \dots, z_{2p+1})$ l'affixe de P. Écrire le système linéaire traduisant l'équation $m(P) = Q$. Prouver que

$$z_1 = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots + b_{2p+1}. \tag{1}$$

Indiquer un algorithme permettant de construire géométriquement A_1, puis P, connaissant Q.

d) *Expression de l'inverse de* M_0. Soit D_0 l'endomorphisme de H induit par D.

Calculer $(I + D_0)(I - D_0 + D_0^2 + \cdots + D_0^{2p})$. En déduire M_0^{-1} en fonction de D_0. Retrouver ainsi la formule (1).

4. Bijectivité du passage au milieu dans le cas où n est pair.

On écrit n sous la forme $n = 2p$ où $p \geqslant 2$; dans ces conditions $e_p = (1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1)$. On note F l'hyperplan de $\mathbb{C}^n$ d'équation :

$$z_1 - z_2 + z_3 - z_4 + \cdots + z_{2p-1} - z_{2p} = 0.$$

a) Déterminer le noyau de l'endomorphisme M_0 induit par M sur H. Montrer que M_0 stabilise $F \cap H$ et induit un automorphisme M_{00} de $F \cap H$; en déduire l'image de M_0.

b) Soit $Q = (B_1, B_2, \dots, B_{2p})$ une configuration d'affixe $v = (b_1, b_2, \dots, b_{2p})$ et d'isobarycentre G. Montrer que v appartient à F si, et seulement si, les isobarycentres de $(B_1, B_3, \dots, B_{2p-1})$ et de $(B_2, B_4, \dots, B_{2p})$ coïncident avec G. On note $\mathscr{E}_{2p}$ l'ensemble des configurations satisfaisant à cette propriété.

c) Prouver que, pour toute configuration $Q = (B_1, B_2, \dots, B_{2p})$ de $\mathscr{E}_{2p}$

d) *Expression de l'inverse de* M_{00}. Montrer que le polynôme $X^{2p} - 1$ est divisible par $X^2 - 1$. Soit V le quotient. Montrer qu'il existe un polynôme A de degré $2p - 3$ et une constante B tels que $A(1 + X) + BV = 1$. Calculer B puis A. Soit D_{00} l'endomorphisme de $F \cap H$ induit par D. Prouver que $V(D_{00}) = 0$; en déduire M_{00}^{-1} en fonction de D_{00}.

IV.- Caractérisation des polygones dont la forme est stable par passage aux milieux.

On munit $\mathbb{C}^n$ du produit scalaire hermitien défini par :

$$(u|u') = \frac{1}{n}\left(\overline{z_1}z_1' + \overline{z_2}z_2' + \cdots + \overline{z_n}z_n'\right).$$

On note $u \mapsto \|u\|$ la norme hermitienne associée.

1. Décomposition canonique de $\mathbb{C}^n$.

a) Montrer que la base $(e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ est orthonormale.

b) Comparer e_{n-k} et $\overline{e_k}$; calculer $D(\overline{e_k})$ et $M(\overline{e_k})$.

c) Pour tout entier k tel que $1 \leqslant k < \dfrac{n}{2}$, on note E_k le plan vectoriel de $\mathbb{C}^n$ engendré par e_k et $\overline{e_k}$, on note E la somme des sous espaces E_k. Montrer que E est somme directe orthogonale des plans E_k.

Prouver enfin que $E = H$ si n est impair et $E = F \cap H$ si n est pair.

d) Prouver que, pour tout k, les endomorphismes D et M stabilisent E_k, et que, pour tout élément v de E_k,

$$\|M(v)\| = \rho_k \|v\|.$$

2. Interprétation complexe des transformations affines du plan fixant O.

Soit t une transformation du plan dans lui-même fixant O, et T l'application de $\mathbb{C}$ dans lui-même qui à tout nombre complexe $z = x + iy$ d'image A associe l'affixe $z' = x' + iy'$ de $A' = t(A)$.

a) Prouver que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) l'application T est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ (autrement dit t est affine) ;

ii) il existe des nombres complexes a et b tels que, pour tout nombre complexe z,

$$T(z) = az + b\overline{z}.$$

On explicitera a et b en fonction des coefficients de la matrice associée à T dans le base $(1, i)$.

b) Dans ces conditions, montrer que T est un automorphisme si, et seulement si, $|a| \neq |b|$.

3. Stabilité des polygones affines des polygones réguliers.

On note $\mathscr{A}_n$ l'ensemble des éléments P de $\mathscr{P}_n$ de la forme $P = \tau R$ où R est un polygone régulier et τ une transformation affine du plan. Étant donnés un endomorphisme $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ et un élément $u = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ de $\mathbb{C}^n$, on pose $T(u) = (T(z_1), T(z_2), \ldots, T(z_n))$. Enfin, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k < \frac{n}{2}$, on note S_k la similitude directe du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ telle que $S_k(e_k) = M(e_k)$.

a) Soit $P = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ une configuration d'affixe $u = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ et d'isobarycentre O. Montrer qu'il est équivalent de dire :

i) P est un élément de $\mathscr{A}_n$;

ii) il existe une entier k, où $1 \leqslant k < \frac{n}{2}$, et des nombres complexes α et β tels que :

$$u = \alpha e_k + \beta \overline{e_k} \qquad \text{et} \qquad |\alpha| \neq |\beta|.$$

b) Étant donné un entier k tel que $1 \leqslant k < \frac{n}{2}$, montrer que pour tout élément u_k de E_k, il existe un endomorphisme W_k du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ et *un seul* tel que $u_k = W_k(e_k)$.

c) Prouver que pour tout élément P de $\mathscr{A}_n$, $Q = m(P)$ appartient encore à $\mathscr{A}_n$, et qu'il existe une transformation affine t et une seule du plan telle que $tP = m(P)$.

d) Inversement, soit P un polygone d'affixe u admettant O pour isobarycentre et tel que $m(P) = tP$ où t est une transformation affine. Soit T l'endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ associé à t.

Prouver d'abord que u appartient à E. Montrer qu'il existe un entier k tel que u appartienne à E_k.

Á cet effet, on écrira u sous la forme $u = \sum W_k(e_k)$ où $1 \leqslant k < \frac{n}{2}$, et on montrera que pour tout k, $W_k S_k = T W_k$. On en déduira que si $W_j \neq 0$, W_j est un automorphisme et on comparera les déterminants de T et de S_j.

e) Prouver finalement que les éléments de $\mathscr{A}_n$ sont les seuls polygones P dont le polygone des milieux se déduit de P par une transformation affine.

Solution

Solution proposée par
Dany-Jack MERCIER
(Site internet MégaMaths)

[capesexterne1988comp2s.pdf]

I.1.a Posons $A_{n+k} = A_k$ pour $k \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{GB_i} + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{B_iA_i} = \vec{0}$$

De $\overrightarrow{B_iA_i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_{i+1}A_i}$ on tire $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{B_iA_i} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{A_iA_{i+1}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_{n+1}} = \vec{0}$,

de sorte que $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{GB_i} = \vec{0}$.

L'isobarycentre de $m(P)$ est donc égal à celui de P.

I.1.b t transforme le milieu B_k de $[A_kA_{k+1}]$ en le milieu de $[t(A_k)t(A_{k+1})]$

de sorte que $m(tP) = t\,m(P)$.

L'isobarycentre de $m(tP)$ est celui de tP d'après I.1.a. t affine conserve les barycentres, donc l'isobarycentre de tP est égal à $t(G)$.

Conclusion : l'isobarycentre de $m(tP)$ est $t(G)$

I.2.a

* $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}e_0 \oplus H$ puisque H est un hyperplan ne contenant pas e_0.

Si $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ s'écrit $z = \lambda e_0 + y$ avec $y = (y_1, \ldots, y_n) \in H$,

alors $z_i = \lambda + y_i \ \forall i$ et $y_1 + \cdots + y_n = 0$ entraîne $z_1 + \cdots + z_n - n\lambda = 0$,

soit $\lambda = \dfrac{z_1 + \cdots + z_n}{n}$.

La décomposition cherchée est donc :

$$z = \frac{z_1 + \cdots + z_n}{n} e_0 + y \quad \text{avec} \quad y = \left(z_1 - \frac{z_1 + \cdots + z_n}{n}, \ldots, z_n - \frac{z_1 + \cdots + z_n}{n}\right) \in H$$

* $M(e_0) = e_0$ de sorte que $\mathbb{C}e_0$ soit stable par M.

Si $z \in H$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ vérifie $z_1 + \cdots + z_n = 0$ donc en notant

$M(z) = z' \doteq (z'_1, \ldots, z'_n)$,

$$z'_1 + \cdots + z'_n = \frac{z_1 + z_2}{2} + \cdots + \frac{z_n + z_1}{2} = z_1 + \cdots + z_n = 0 \quad \text{et } M(z) \in H.$$

H sera donc stable par M.

I.2.b

* $\lambda = \frac{1}{n}(z_1 + \cdots + z_n)$ est l'affixe de l'isobarycentre de P

* $u \in H \iff z_1 + \cdots + z_n = 0 \iff \lambda = 0$

Les configurations P telles que $u \in H$ sont celles dont l'isobarycentre est l'origine O du repère.

* $u = \alpha e_0 \iff z_1 = \cdots = z_n = \alpha \iff P$ réduit à un point

I.3.a $\overline{P}$ est l'image de P par la réflexion d'axe Ox, tandis que aP est l'image de P par la similitude directe de centre O, de rapport $|a|$ et d'angle $\arg a$.

I.3.b Toute application affine f conserve les milieux des segments, ie vérifie : $m(fP) = f\,m(P)$.
I.3.a permet alors d'écrire $m(\overline{P}) = \overline{m(P)}$ et $m(aP) = a\,m(P)$.

II.1.a

* R_k est invariant par la rotation r de centre O et d'angle $k\frac{2\pi}{n}$, puisque $r(z) = \omega^k z$ entraine $r(\omega^{jk}) = \omega^k . \omega^{jk} = \omega^{(j+1)k}$.

De plus R_k n'est pas aplati car $1, \omega^k, \omega^{2k}$ ne sont pas alignés.
En effet, $1, \omega^k, \omega^{2k}$ sont sur le cercle trigonométrique et une droite coupe un cercle en au plus 2 points, de sorte que :

$$1, \omega^k, \omega^{2k} \text{ alignés} \iff \begin{cases} \omega^k = 1 \\ \text{ou} \\ \omega^{2k} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} k \equiv 0 \ [n] \\ \text{ou} \\ 2k \equiv 0 \ [n] \end{cases} \iff \begin{cases} k = 0 \\ \text{ou} \\ 2k = n \end{cases}$$

compte tenu de $0 \leq k \leq n-1$.

<u>Finalement R_k est un polygone régulier de centre O.</u>

* Soit G l'isobarycentre de R_k. r est affine, donc conserve le barycentre, et conserve R_k : on en déduit que $r(G)$ est le barycentre de R_k, soit $r(G) = G$, puisque $G = O$ car l'unique point invariant de r est O.

* <u>Cas particuliers</u> :

<u>Si $k=0$</u>, $e_0 = (1, 1, \ldots, 1)$ est réduit à 1 seul point.

<u>Si $2k=n$</u>, $\omega^k = e^{ik\frac{2\pi}{n}} = e^{i\pi} = -1$ d'où $e_k = (1, -1, 1, \ldots, (-1)^{n-1})$

Dans ces 2 cas particuliers, la configuration R_k est aplatie.

II.1.b

Il existe une rotation r de centre G, l'isobarycentre de $P = (A_1, \dots, A_n)$, d'angle $k\frac{2\pi}{n}$ avec $1 \le k \le n-1$ et $2k \ne n$ (sinon P serait aplati), telle que :

$$\begin{cases} r(A_i) = A_{i+1} & \text{pour tout } i \ne n \\ r(A_n) = A_1 \end{cases}$$

G est bien l'isobarycentre de $A_1, \dots, A_n$ puisque r laisse l'ensemble $\{A_1, \dots, A_n\}$ globalement invariant.

Soit ρ la rotation de centre O et d'angle $k\frac{2\pi}{n}$ laissant $R_k \doteq (C_1, \dots, C_k)$ globalement invariant.

Il existe une unique similitude directe s transformant O et C_1 en G et A_1.

Il faut montrer que : $A_j = s(C_j) \quad \forall j$

ie : $r^{j-1}(A_1) = s(\rho^{j-1}(C_1)) \quad \forall j$

$r^{j-1} \circ s(C_1) = s \circ \rho^{j-1}(C_1) \quad \forall j$

Cela sera assuré si on prouve le :

|| <u>lemme</u> : $r \circ s = s \circ \rho$

preuve : Les parties linéaires de $r \circ s$ et de $s \circ \rho$ sont $\vec{r} \circ \vec{s}$ et $\vec{s} \circ \vec{r}$, où $\vec{r}$ est la rotation vectorielle d'angle $k\frac{2\pi}{n}$. Elles coïncident donc, car le groupe des rotations du plan est commutatif.

De plus : $\begin{cases} r \circ s(O) = r(G) = G \\ s \circ \rho(O) = s(O) = G \end{cases}$

ce qui achève la démonstration.

II.2.a

$D(e_k) = (\omega^k, \omega^{2k}, \dots, \omega^{(n-1)k}, 1) = \omega^k(1, \omega^k, \dots, \omega^{(n-1)k}) = \omega^k e_k$

$M(e_k) = \frac{1}{2}(I + D)(e_k) = \frac{1}{2}(e_k + \omega^k e_k) = \frac{1+\omega^k}{2} e_k$

II.2.b D (resp. M) admet n sev $\mathbb{C}e_k$ $(0 \le k \le n-1)$ comme sev propres associés aux valeurs propres ω^k (resp. $\frac{1+\omega^k}{2}$) toutes distinctes 2 à 2.

<u>D et M seront donc diagonalisables.</u>

II.2.c Si $2k \neq n$, $m(R_k)$ est associé à $M(e_k) = \frac{1+\omega^k}{2} e_k$ donc se déduit de R_k par la similitude directe s_k de centre O définie par :

$$\boxed{s_k(z) = \frac{1+\omega^k}{2} z}$$

Son rapport est $\rho_k = \left|\frac{1+\omega^k}{2}\right|$ et son angle $\theta_k = \arg\left(\frac{1+\omega^k}{2}\right)$ que l'on détermine :

$$\frac{1+\omega^k}{2} = \frac{1+e^{ik\frac{2\pi}{n}}}{2} = e^{ik\frac{\pi}{n}} \frac{e^{-ik\frac{\pi}{n}}+e^{ik\frac{\pi}{n}}}{2} = \cos k\frac{\pi}{n} \cdot e^{ik\frac{\pi}{n}}$$

Soit $0 \leq k \leq n-1 \Rightarrow 0 \leq k\frac{\pi}{n} \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)\pi < \pi$ d'où 2 cas :

* Si $\cos k\frac{\pi}{n} \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq k\frac{\pi}{n} \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq k \leq \frac{n}{2}$ alors $\begin{cases} \rho_k = \cos k\frac{\pi}{n} \\ \theta_k = k\frac{\pi}{n} \end{cases}$
* Si $\cos k\frac{\pi}{n} < 0 \Leftrightarrow \frac{n}{2} < k < n$ alors $\begin{cases} \rho_k = -\cos k\frac{\pi}{n} \\ \theta_k = k\frac{\pi}{n} + \pi \end{cases}$

II.2.d

* Soit P un polygone régulier. II.1.b montre l'existence d'une similitude directe s telle que $P = sR_k$, d'où :

$$Q = m(P) = m(sR_k) = s(mR_k) \qquad \text{(car } s \text{ affine)}$$

Comme $mR_k = s_k R_k$ d'après II.2.c :

$$Q = s(s_k R_k) = s s_k s^{-1} P$$

<u>mP se déduit de P par la similitude $s s_k s^{-1}$ de centre G</u> l'isobarycentre de P (car $s s_k s^{-1}(G) = s s_k(O) = s(O) = G$) et de partie linéaire $\vec{s}\,\vec{s_k}\,\vec{s}^{-1} = \vec{s}\,\vec{s}^{-1}\,\vec{s_k} = \vec{s_k}$ (les similitudes vect. directes du plan forment un groupe commutatif).

<u>$s s_k s^{-1}$ est donc de rapport ρ_k et d'angle θ_k</u>.

> <u>Autre façon de mq mP est un polygone régulier</u> : Il existe une rotation r tq $r(A_j) = A_{j+1}$, $\forall j$, où $P = (A_1, \ldots, A_n$ … r conserve les milieux, donc si B_j est … de $[A_j A_{j+1}]$, $r(B_j) = B_{j+1}$ et $m(P) = (B$ … sera un polygone régulie…

* <u>mP est un polygone régulier</u> : Cela résulte de $mP = s s_k s^{-1} P$ et du lemme :

<u>LEMME</u> : Si σ est une similitude directe et P un polygone régulier, alors σP est aussi un polygône régulier.

preuve : On cherche une rotation ρ tq $\sigma P = \rho(\sigma P) \Leftrightarrow P = \sigma^{-1}\rho\sigma P$. On sait l'existence d'une rotation r d'angle $k\frac{2\pi}{n}$ telle que $P = rP$. Il suffit donc de choisir $\rho = \sigma r \sigma^{-1}$ et de constater que ρ est bien une rotation d'angle $k\frac{2\pi}{n}$ (car $\vec{\rho} = \vec{\sigma}\,\vec{r}\,\vec{\sigma}^{-1} = \vec{r}$, les similitudes vect. planes directes commutant entre elles) laissant σP invariant. Enfin σP n'est pas aplatie (sinon σ^{-1} affine bijective entraînerait $\sigma^{-1}(\sigma P) = P$ aplatie, absurde). CQFD

II.3.a s est une similitude directe
P d'affixe $u = (z_1, \dots, z_n)$

$m(P) = sP \iff M(u) = (s(z_1), \dots, s(z_n))$

s transformant P en $m(P)$, elle laissera fixe l'isobarycentre O commun à P et $m(P)$ donc s'écrira : $s(z) = \lambda z$ $\lambda \in \mathbb{C}$. Ainsi :

$$m(P) = sP \iff M(u) = \lambda(z_1, \dots, z_n) = \lambda u \iff u \text{ vecteur propre de } M.$$

Les sev propres de M sont les $\mathbb{C}e_k$ $(0 \leq k \leq n-1)$ (II.2), donc il existera $a \in \mathbb{C}$ et $k \in [0, n-1]$ tq $u = ae_k = a(1, \omega^k, \dots, \omega^{(n-1)k})$, donc $\boxed{P = aR_k}$

NB : P étant un polygone, on constate à posteriori, comme au II.1.a, que $k \neq 0$ et $2k \neq n$ (sinon P serait aplati...)

II.3.b * Si P est un polygone régulier, $m(P)$ se déduit de P par une similitude directe (II.2.d).

* Réciproquement, si $m(P)$ est dir. semblable à P, notons s la sim. dir. telle que $m(P) = sP$. Ramenons-nous au cas où l'isobarycentre de P est O par translation : soit G l'isob. de P et t la translation de vecteur $\vec{OG}$. $P = tP_1$ où P_1 est un polygone d'isob. O. Alors : $m(tP_1) = stP_1 \Rightarrow t(mP_1) = stP_1 \Rightarrow \boxed{mP_1 = t^{-1}stP_1}$ montre que $m(P_1)$ est dir. semblable à P_1 ($t^{-1}st$ étant une sim. directe). Le II.3.a entraine alors l'existence de $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $P_1 = aR_k$.

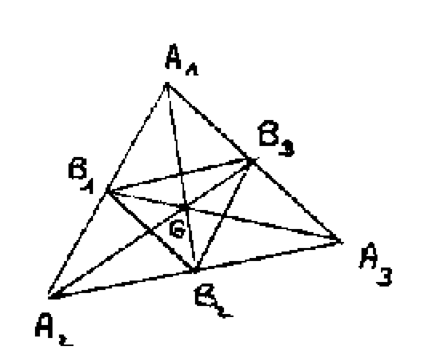
Donc $P = taR_k$ se déduit de R_k par une sim. dir. ta. P sera donc un polygone régulier (cf lemme du II.2.d)

Cl : $\boxed{m(P) \text{ dir. semblable à } P \iff P \text{ polygone régulier} \iff P = sR_k \text{ où } s \text{ est une sim. directe.}}$

(la première équivalence : II.1.b ; la seconde : lemme du II.2.d)

III.1.a $dm(P) = (B_2, B_3, B_1)$

L'homothétie h de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ transforme (A_1, A_2, A_3) en $dm(P)$ puisque les médianes A_1B_2, A_2B_3, A_3B_1 d'un triangle se coupent au $\frac{1}{3}$ de la base de chacune d'elle.



III.1.b d est manifestement bijective de $\mathcal{P}_3$ sur $\mathcal{P}_3$. Soit $Q \in \mathcal{P}_3$:

$$m(P) = Q \iff dm(P) = dQ \underset{(\text{III.1.a})}{\iff} hP = dQ \iff P = h^{-1}dQ$$

$m : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ sera bien une bijection, et la construction de l'antécédent P de Q par m provient de l'écriture $P = h^{-1}dQ$.

‖ P est l'image par l'homothétie h^{-1} de centre G et de rapport -2 du triangle $dQ = (B_2, B_3, B_1)$.

III.2.a

$\overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} = 2\overrightarrow{B_1A_2} + 2\overrightarrow{A_2B_2} = 2\overrightarrow{B_1B_2}$

de même $\overrightarrow{A_1A_3} = 2\overrightarrow{B_4B_3}$.

L'isobarycentre du parallélogramme $B_1B_2B_3B_4$ est égal à G d'après I.1. C'est le centre de symétrie de ce parallélogramme.

III.2.b

$$* \begin{cases} s_2 \circ s_1 = t_{2\overrightarrow{B_1B_2}} \\ s_4 \circ s_3 = t_{2\overrightarrow{B_3B_4}} \end{cases} \Rightarrow s_4 s_3 s_2 s_1 = t_{2(\overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{B_3B_4})} = t_{\vec{0}} = Id$$

* Soit A_1 fixé. Si $P = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ vérifie $m(P) = Q$, nécessairement :

$$\begin{cases} A_2 = s_1(A_1) \\ A_3 = s_2(A_2) \\ A_4 = s_3(A_3) \end{cases} \quad (*)$$

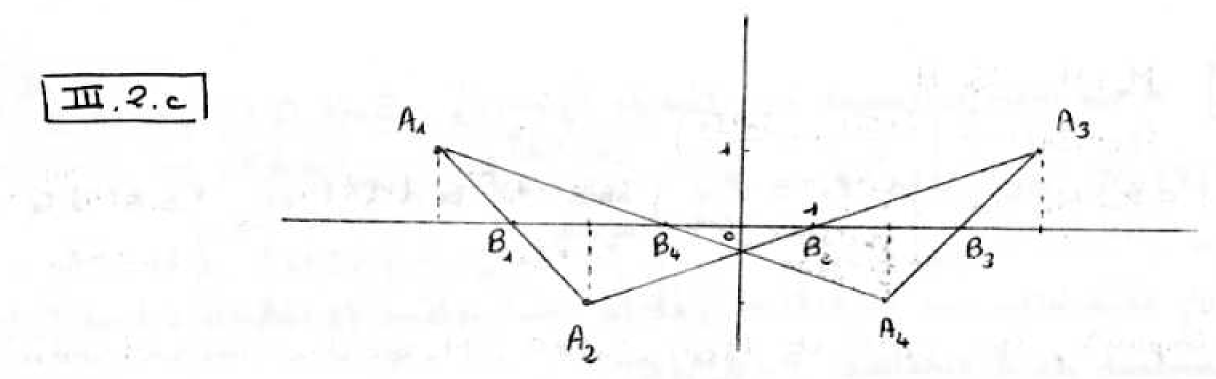
L'unicité de P est assurée, et la construction de A_2, A_3, A_4 est triviale.

Réciproquement, P défini par $(*)$ convient puisqu'alors :

$$\begin{cases} B_1 \text{ milieu de } A_1A_2 \\ B_2 \quad \text{''} \quad A_2A_3 \\ B_3 \quad \text{''} \quad A_3A_4 \end{cases}$$

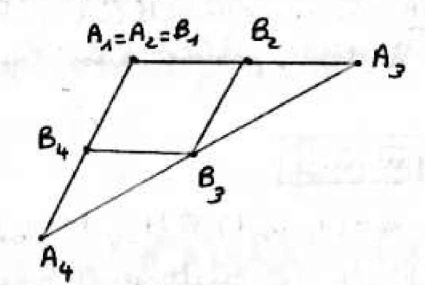
et $\underbrace{s_4 s_3 s_2 s_1(A_1)}_{A_4} = Id(A_1) = A_1 \Rightarrow s_4(A_4) = A_1 \iff B_4$ milieu de A_1A_4.

III.2.c



III.2.d * On prend $A_1 = B_1$ de sorte que $s_1(A_1) = A_2 = A_1$.

* Si $A_1 = A_3$, alors $\vec{0} = \overrightarrow{A_1A_3} = 2\overrightarrow{B_1B_2} = 2\overrightarrow{B_4B_3}$ donc $B_1 = B_2$ et $B_4 = B_3$. Le parallélogramme Q serait aplati, ce qui est exclu par l'hypothèse.

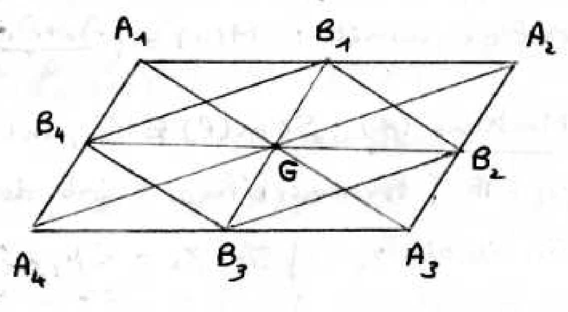


III.2.e

* Si $P = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ est un parallélogramme d'isob. G, alors :

$$\overrightarrow{GA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_3A_1} = \overrightarrow{B_2B_1}$$ car B_1 et B_2 sont les milieux de $[A_1A_2]$ et $[A_2A_3]$

* m transforme une conf. en un parall. d'après (III.2.a), donc définit une application de l'ens. $\mathcal{P}_a$ des parall. dans lui-m̂. Si $Q \in \mathcal{P}_a$ et si A_1 est fixé, il existe une et une seule conf. $P = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ telle que $m(P) = Q$.



(III.2.b). Imposer à P d'être un parallélogramme nous conduit à choisir A_1 tel que $\overrightarrow{GA_1} = \overrightarrow{B_2B_1}$.

Il reste seulement à vérifier que $P = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ tel que $m(P) = Q$ et $\overrightarrow{GA_1} = \overrightarrow{B_2B_1}$ est bien un parallélogramme :

$\overrightarrow{GA_1} = \overrightarrow{B_2B_1}$ montre que $GA_1B_1B_2$ est un parall., donc $\overrightarrow{GB_2} = \overrightarrow{A_1B_1}$.

De $\overrightarrow{B_4G} = \overrightarrow{GB_2} = \overrightarrow{A_1B_1}$ et $\overrightarrow{GB_2} = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{B_1A_2}$ on déduit que $B_4GB_1A_1$ et $GB_2A_2B_1$ sont des parallélogrammes, donc $\overrightarrow{B_4A_1} = \overrightarrow{GB_1} = \overrightarrow{B_2A_2}$.

Par suite : $\overrightarrow{A_4A_1} = 2\overrightarrow{B_4A_1} = 2\overrightarrow{B_2A_2} = \overrightarrow{A_3A_2}$

et $A_1A_2A_3A_4 \in \mathcal{P}_a$. CQFD

III.3.a $M_o : H \longrightarrow H$

$(z_1,\dots,z_n) \longmapsto \left(\frac{z_1+z_2}{2},\dots,\frac{z_n+z_1}{2}\right)$

$(z_1,\dots,z_n) \in \operatorname{Ker} M_o \iff \begin{cases} z_1+z_2=0 \\ \dots \\ z_{n-1}+z_n=0 \\ z_n+z_1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z_k=(-1)^{k-1} z_1 \quad (1\leq k\leq n) \\ z_n+z_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_n=(-1)^{n-1} z_1 = z_1 \\ z_n=-z_1 \end{cases}$

(car n impair), donc $z_1=0$ et $(z_1,\dots,z_n)=0$. M_o est donc un endomorphism[e] injectif de H, soit un automorphisme de H.

NB : On n'a pas utilisé l'hyp. $(z_1,\dots,z_n)\in H$ dans ce qui précède, de sorte que la m̂ dém. prouve aussi que $M : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ est un automorphisme.

III.3.b

* $e_o=(1,\dots,1)\notin H$, $M(e_o)=e_o$ et $\mathbb{C}^n = H \oplus \mathbb{C}e_o$. $M_o \doteq M|_H : H\to H$ et $M|_{\mathbb{C}e_o}=Id$ étant des automorphismes, $M:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ en sera un, donc $m : \mathcal{C}_n \to \mathcal{C}_n$ sera bij[ective].

* m induit une bijection de $\mathcal{P}_n$ dans $\mathcal{P}_n$: il s'agit de prouver que
  (1) $\forall P\in\mathcal{P}_n \quad m(P)\in\mathcal{P}_n$
  (2) $m:\mathcal{P}_n\to\mathcal{P}_n$ est injectif } évident comme restriction de $m:\mathcal{C}_n\to\mathcal{C}_n$ à $\mathcal{P}_n$.
  (3) $m:\mathcal{P}_n\to\mathcal{P}_n$ est surjectif.

Montrons (3) : $m:\mathcal{C}_n\to\mathcal{C}_n$ étant surj., si $Q\in\mathcal{P}_n$ il existe $P\in\mathcal{C}_n$ tq $m(P)=Q$. Alors $P\in\mathcal{P}_n$ sinon P serait aplati, donc d'affixe :

$u=(\lambda_1 z_o,\dots,\lambda_n z_o) \qquad z_o\in\mathbb{C}, \quad \lambda_i\in\mathbb{R}$

(on suppose ici que l'isob. de P est O, sinon on s'y ramène par translation), et l'on aurait : $M(u)=\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}z_o,\dots,\frac{\lambda_n+\lambda_1}{2}z_o\right)$, soit $Q=m(P)$ aplati, absu[rde].

Montrons (1) : Si $m(P)\notin\mathcal{P}_n$, $m(P)$ serait aplati et $M(u)=(\mu_1 z_o,\dots,\mu_n z_o)$ où $\mu_k\in\mathbb{R}$ (tjrs sous l'hyp. l'isob. de P est O, sinon … translation).

On aurait : $\begin{cases} z_1+z_2 = 2\mu_1 z_o \\ \dots \\ z_n+z_1=2\mu_n z_o \end{cases}$ (S)

Ce système est de Cramer (car admet une unique sol. $(z_1,\dots,z_n)$, $m:\mathcal{C}_n\to\mathcal{C}_n$ éta[nt] bijective), ce que l'on peut vérifier en développant son déterminant suivant la dernière ligne :

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}\cdot 1+1 = 2$ (car n impair)

En posant $z_k=\lambda_k z_o$, on obtient le système de Cramer :

$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 = 2\mu_1 \\ \dots \\ \lambda_n+\lambda_1=2\mu_n \end{cases}$

Donc $(z_1,\dots,z_n)=(\lambda_1 z_o,\dots,\lambda_n z_o)$ sera l'unique solution de (S), et P, d'affixe

III.3.c

$m(P) = Q \iff \forall k \in [1,n] \quad \frac{z_k + z_{k+1}}{2} = b_k$

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2b_1 & \\ z_2 + z_3 = 2b_2 & \times(-1) \\ \cdots & \cdots \\ z_{2p} + z_{2p+1} = 2b_{2p} & \times(-1)^{2p+1} \\ z_{2p+1} + z_1 = 2b_{2p+1} & \times(-1)^{2p+2} \end{cases}$$

$$2z_1 = 2(b_1 - b_2 + \dots - b_{2p} + b_{2p+1})$$

(1) $\quad z_1 = b_1 - b_2 + \dots - b_{2p} + b_{2p+1}$

Ainsi : $\quad A_1 = B_1 + \overrightarrow{B_2 B_3} + \overrightarrow{B_4 B_5} + \dots + \overrightarrow{B_{2p} B_{2p+1}}$

Les points $A_2, \dots, A_n$ se déduisent alors de A_1 par les symétries $s_1, \dots, s_{n-1}$ par rapport à $B_1, \dots, B_{n-1}$, car $A_{i+1} = s_i(A_i)$.

NB : Autre façon de construire P à partir de Q.
Tout revient à trouver un pt fixe A_1 de la transformation $s_n \circ \dots \circ s_1$ où s_i est la sym. /à pt B_i. n étant impair, $s_n \circ \dots \circ s_1$ sera une symétrie /à un p[t] que l'on détermine aisément en choisissant M, en construisant son image par $s_n \circ \dots \circ s_1$, puis en traçant le milieu de MM'.

III.3.d

$(I + D_0)(I - D_0 + D_0^2 + \dots + D_0^{2p}) = I + D_0^{2p+1} = I + D_0^n = 2I \quad$ car $D_0^n = I$

d'où $M_0 (I - D_0 + D_0^2 + \dots + D_0^{2p}) = I$

M_0 sera inversible et $M_0^{-1} = I - D_0 + D_0^2 + \dots + D_0^{2p}$

* Retrouvons (1) : $\quad \forall (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ d'isob. 0 $\quad u = M_0^{-1}(v) = (I - D_0 + D_0^2 + \dots + D_0^{2p})(v)$

d'où $z_1 = b_1 - b_2 + b_3 + \dots + b_{2p+1} \qquad (1)$.

III.4.a $n = 2p$.

* $M(H) \subset H$. Soit $M_0 = M|_H$.

$$u \in \operatorname{Ker} M_0 \Leftrightarrow \begin{cases} M_0(u) = 0 \\ u \in H \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_k + z_{k+1} = 0 \quad \forall k \\ z_1 + \cdots + z_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_k = (-1)^{k+1} z_1 \quad \forall k \\ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} z_1 = 0 \end{cases}$$

toujours vrai car n pair

Donc $\boxed{\operatorname{Ker} M_0 = \mathbb{C} e_p}$

* $$u \in F \cap H \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 + \cdots + z_n = 0 \\ z_1 - z_2 + \cdots + z_{2p-1} - z_{2p} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 + z_3 + \cdots + z_{2p-1} = 0 \\ z_2 + z_4 + \cdots + z_{2p} = 0 \end{cases}$$

Si $u \in F \cap H$, $M(u) = v = (z'_1, \dots, z'_n)$ vérifiera : (car $z'_k = \frac{z_k + z_{k+1}}{2}$)

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{p} z'_{2k} = \frac{z_1 + \cdots + z_n}{2} = 0 \\ \sum_{k=0}^{p-1} z'_{2k+1} = \frac{z_1 + \cdots + z_n}{2} = 0 \end{cases}$$

donc $M(u) \in F \cap H$. On a prouvé : $\boxed{M(F \cap H) \subset F \cap H}$

* $M_{00} \doteq M|_{F \cap H} : F \cap H \longrightarrow F \cap H$ est <u>bijective</u> car $\operatorname{Ker} M_{00} = \operatorname{Ker} M_0 \cap F = \mathbb{C} e_p \cap F = \{0\}$

(donc M_{00} injectif de $F \cap H$ dans lui-m, donc bij.)

* On a :

$$\begin{cases} M_0(F \cap H) = F \cap H \\ M_0(\mathbb{C} e_p) = \{0\} \end{cases}$$

$H = (F \cap H) \oplus \mathbb{C} e_p$ car $\begin{cases} \mathbb{C} e_p \cap (F \cap H) = \{0\} \\ \dim H = n-1 \\ \dim F \cap H = n-2 \\ \dim \mathbb{C} e_p = 1 \end{cases}$

Par suite : $\boxed{\operatorname{Im} M_0 = M_0(H) = F \cap H.}$

III.4.b

$v \in F \iff \dfrac{b_1+b_3+\dots+b_{2p-1}}{p} = \dfrac{b_2+b_4+\dots+b_{2p}}{p}$ exprime bien que l'isobarycentre de $(B_1, B_3, \dots, B_{2p-1})$ coïncide avec celui de $(B_2, B_4, \dots, B_{2p})$, et donc avec G

III.4.c

* Soient A_1 fixé et $P=(A_1,\dots,A_n)$

$m(P)=Q \iff A_{k+1} = s_k(A_k)$ où $s_k = $ sym./au pt B_k $(1 \leq k \leq 2p)$

$\iff A_1 = s_{2p} \circ s_{2p-1} \circ \dots \circ s_1(A_1)$ et $A_{k+1} = s_k(A_k)$ pour $1 \leq k \leq 2p-1$.

$s_{2p} \circ \dots \circ s_1$ est la composée d'un nbre pair de symétries centrales : c'est donc une translation de vecteur $2\overrightarrow{B_1B_2} + 2\overrightarrow{B_3B_4} + \dots + 2\overrightarrow{B_{2p-1}B_{2p}}$ d'affixe $-2(b_1-b_2+b_3-b_4+\dots-b_{2p}) = 0$ car $v \in F$. Donc $s_{2p}\circ\dots\circ s_1 = Id$ et tous les pts A_1 seront invariants par $s_{2p}\circ\dots\circ s_1$.

<u>Ccl</u> : $\forall Q \in \mathcal{E}_{2p} \quad \forall A_1 \quad \exists!\, P=(A_1,\dots,A_n) \quad m(P)=Q$

* $P \in \mathcal{E}_{2p} \Rightarrow m(P) \in \mathcal{E}_{2p}$?

Par translation (*), on peut supposer que l'isob. de P est O.
Si u est l'affixe de P :

$$\underset{\text{d'isob. O}}{P \in \mathcal{E}_{2p}} \iff u \in F\cap H \underset{\text{III.4.a}}{\iff} M(u) \in F\cap H \iff \underset{\text{d'isob. O}}{M(P) \in \mathcal{E}_{2p}}$$

($\uparrow$ $P \in \mathcal{E}_{2p}$, $\uparrow$ P d'isob. O)

(*) Si c'est démontré pour les configurations P d'isob. O, soit P une configuration de $\mathcal{E}_{2p}$ d'isob. G, et t la translation amenant G sur O. Le résultat prouvé pour tG donne : $m(tP) = t(mP) \in \mathcal{E}_{2p} \Rightarrow mP \in \mathcal{E}_{2p}$ d'après le lemme :

<u>lemme</u> : $P \in \mathcal{E}_{2p} \iff tP \in \mathcal{E}_{2p}$ où t est une translation qque.

(preuve : $P \in \mathcal{E}_{2p} \underset{\text{I.4.b}}{\iff}$ isob. $(A_1,\dots,A_{2p-1}) = $ isob $(A_2,\dots,A_{2p}) = G$

$\iff$ isob. $(B_1,\dots,B_{2p-1}) = $ isob $(B_2,\dots,B_{2p}) = tG$ où $tP = (B_1,\dots,B_{2p})$

$\iff tP \in \mathcal{E}_{2p}$ (car t affine conserve les barycentres)

* m est une bijection de $\mathcal{E}_{2p}$ dans lui-même :

On vient de voir que l'image d'un él. de $\mathcal{E}_{2p}$ par m était dans $\mathcal{E}_{2p}$. Inversement soit $Q \in \mathcal{E}_{2p}$. Cherchons $P \in \mathcal{E}_{2p}$ tel que $m(P) = Q$.

Par translation(**) on peut se ramener au cas où l'isobarycentre de Q est O, ie $v \in H$. Alors :

$$Q \in \mathcal{E}_{2p} \Leftrightarrow v \in F \cap H$$

M_{oo} est un automorphisme de $F \cap H$ (III.4.a) donc :

$$\exists!\ u \in F \cap H \qquad M_{oo}(u) = v$$

ie $\exists!\ P \in \mathcal{E}_{2p}$, P d'isobarycentre O, tel que $m(P) = Q$.

(**) Avec les notations : Q d'isob. G, t translation amenant G sur O, tQ sera d'isobarycentre O et :

$$Q \in \mathcal{E}_{2p} \underset{\text{(lemme du (*))}}{\Longrightarrow} tQ \in \mathcal{E}_{2p} \Rightarrow \exists!\ \tilde{P} \in \mathcal{E}_{2p} \quad m(\tilde{P}) = tQ$$

$$\Rightarrow \exists!\ \tilde{P} \in \mathcal{E}_{2p} \quad t^{-1}m(\tilde{P}) = m(t^{-1}\tilde{P}) = Q$$

$$\underset{\text{(lemme du (*))}}{\Rightarrow} \exists!\ P \in \mathcal{E}_{2p} \quad m(P) = Q$$

Le cas général se déduit bien du cas où Q est d'isobarycentre O par translation.

III.4.d

* $X^{2p} - 1 = (X^2 - 1)\underbrace{(X^{2(p-1)} + X^{2(p-2)} + \dots + X^2 + 1)}_{V}$

$1 + X$ et V sont premiers entre eux car $V(-1) \neq 0$, le Th. de Bezout montre l'existence de 2 polynômes A, B tels que :

$$A\,(1-X) + B\,V = 1$$

$$\begin{cases} \deg A < \deg V = 2p-2 \\ \deg B < \deg(1-X) = 1 \Rightarrow B = Cte \end{cases}$$

Comme $\deg BV = \deg V = 2p-2$, $A(1-X) = 1 - BV$ entraînera $\deg A = 2p-3$

* Si $X=-1$, $B.V(-1)=1 \Rightarrow B.p=1 \Rightarrow \boxed{B=\frac{1}{p}}$

* Donc $A.(1+X) = 1-\frac{1}{p}V = 1-\frac{1}{p}\left(X^{2(p-1)}+X^{2(p-2)}+\dots+X^2+1\right)$

$$= \frac{1}{p}\left((1-X^{2(p-1)})+\dots+(1-X^{2k})+\dots+(1-X^2)\right)$$

$$A = \frac{1}{p}\left(\frac{1-X^{2(p-1)}}{1+X}+\dots+\frac{1-X^{2k}}{1+X}+\dots+\frac{1-X^2}{1+X}\right)$$

Comme $1-X^{2k} = (1+X)(1-X+X^2-\dots-X^{2k-1})$, on obtient :

$$A = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1}\sum_{j=0}^{2k-1}(-1)^j X^j$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{2p-3}\underbrace{\left(\sum_{k\geq\frac{j+1}{2}}^{p-1}1\right)}_{\doteq c(j)}(-1)^j X^j$$

Si $j=2\ell$, $c(j)=(p-1)-(\ell+1)+1 = p-\ell-1$

Si $j=2\ell+1$, $c(j)=(p-1)-(\ell+1)+1 = p-\ell-1$ encore. Donc :

$$A = \frac{1}{p}\left(\sum_{\ell=0}^{p-1}c(2\ell)X^{2\ell} - \sum_{\ell=0}^{p-2}c(2\ell+1)X^{2\ell+1}\right)$$

$$= \frac{1}{p}\left(\sum_{\ell=0}^{p-1}(p-\ell-1)X^{2\ell} - \sum_{\ell=0}^{p-2}(p-\ell-1)X^{2\ell+1}\right)$$

$$\boxed{A = \frac{1}{p}\left(-X^{2p-3}+X^{2p-4}-2X^{2p-5}+2X^{2p-6}-\dots-(p-1)X+(p-1)\right)}$$

* Montrons que $V(D_{oo})=0$.

Or $\underbrace{D_{oo}^{2p}-I}_{=0 \text{ car } D_{oo}^n=I} = (D_{oo}^2-I)V(D_{oo})$ $(*)$

$D_{oo}(u) = (z_2,\dots,z_n,z_1)$

$D_{oo}^2(u) = (z_3,\dots,z_n,z_1,z_2)$

donc $(D_{oo}^2-I)(u) = (z_3-z_1, z_4-z_2,\dots,z_1-z_{n-1}, z_2-z_n)$

$(D_{oo}^2-I)(u)=0 \Leftrightarrow z_{k+2}=z_k\ \forall k \Rightarrow u=0$ car $u\in F\cap H$ se traduit par $\begin{cases} z_1+z_2+\dots+z_{2p}=0 \\ z_1-z_2+\dots-z_{2p}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1+z_3+\dots+z_{2p-1}=0 \\ z_2+z_4+\dots+z_{2p}=0\end{cases}$

$D_{\infty}^2 - I$ est un endomorphisme injectif de $F \cap H$, donc un automorphisme de $F \cap H$. (*) entraîne donc : $V(D_{\infty}) = 0$.

On déduit : $A(D_{\infty})\underbrace{(I + D_{\infty})}_{2M_{\infty}} + B(D_{\infty})\underbrace{V(D_{\infty})}_{=0} = I$

soit : $\boxed{M_{\infty}^{-1} = 2 \cdot A(D_{\infty})}$

IV.1.a Comme $\omega\bar{\omega} = 1$,

$(e_k|e_\ell) = \frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1} \bar{\omega}^{kt}\omega^{\ell t} = \frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\omega^{(\ell-k)t}$

Si $k \neq \ell$, $z \doteq \omega^{\ell-k}$ est une racine n-ième de l'unité distincte de 1, donc $\sum_{t=0}^{n-1} z^t = 0$ et $(e_k|e_\ell) = 0$.

$(e_k|e_k) = \frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\bar{\omega}^{kt}\omega^{kt} = 1$

Finalement, $(e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ est une b.o.

IV.1.b

* $e_{n-k} = (1, \omega^{n-k}, \omega^{2(n-k)}, \dots, \omega^{(n-1)(n-k)})$

$\bar{e}_k = (1, \overline{\omega^k}, \overline{\omega^{2k}}, \dots, \overline{\omega^{(n-1)k}})$

$\overline{\omega^{tk}} = \omega^{-tk} = \omega^{nt-tk} = \omega^{t(n-k)}$ prouve que $\boxed{e_{n-k} = \bar{e}_k}$

* $D(\bar{e}_k) = D(e_{n-k}) = (\omega^{n-k}, \omega^{2(n-k)}, \dots, \omega^{(n-1)(n-k)}, 1)$

$= \omega^{n-k}(1, \omega^{n-k}, \dots, \omega^{(n-1)(n-k)})$

$= \omega^{n-k} e_{n-k} = \boxed{\omega^{-k} e_{n-k}}$

donc $M(\bar{e}_k) = \frac{1}{2}(I + D)(\bar{e}_k) = \frac{1}{2}(e_{n-k} + \omega^{-k}e_{n-k}) = \boxed{\frac{1+\omega^{-k}}{2}e_{n-k}}$

IV.1.c

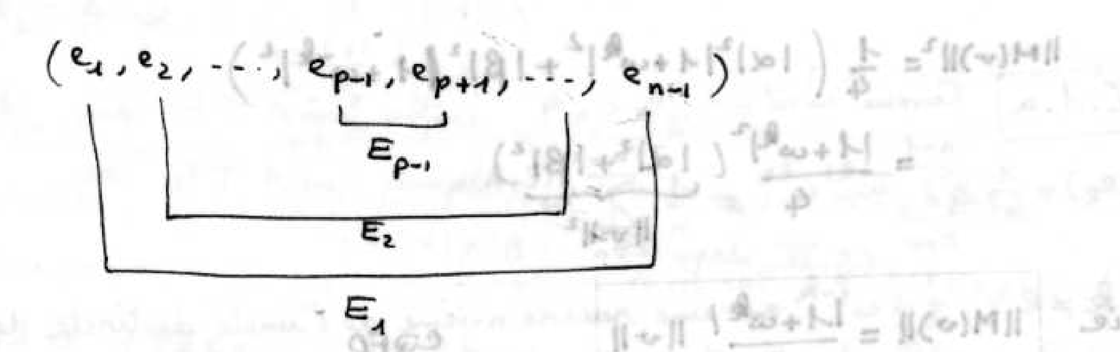
* $(e_0,\dots,e_{n-1})$ étant une b.o de $\mathbb{C}^n$, chaque plan $E_k = \mathbb{C}e_k \oplus \mathbb{C}\bar{e}_k = \mathbb{C}e_k \oplus \mathbb{C}e_{n-k}$ sera orthogonal à la somme $\underset{l\neq k}{+} E_l$, et E sera somme directe orth. des E_k.

* Si n impair, $n = 2p+1$ donc $E\left(\frac{n}{2}\right) = p \Rightarrow \dim E = 2p = n-1$.

Comme $e_k \in H$ pour tout $k \in \mathbb{N} \cap [1, \frac{n}{2}[$ (car $\sum_{t=0}^{n-1} \omega^{tk} = 0$), on aura $E \subset H$.

Comme $\dim E = \dim H = n-1$ on déduit $\boxed{E = H}$

* Si n pair, $n = 2p$ et une b.o. de E est :



On a :

$$\begin{cases} \dim E = n-2 \\ \dim F \cap H = n-2 \end{cases}$$

et $\forall k \in \mathbb{N} \cap [1, \frac{n}{2}[$ $\quad e_k \in F \cap H$. En effet :

$e_k = (1, \omega^k, \dots, \omega^{(n-1)k})$ vérifie $\sum_{t=0}^{n-1} \omega^{tk} = 0$ donc $e_k \in H$

$$\text{et } \sum_{t=0}^{n-1} (-1)^t \omega^{tk} = \sum \omega^{tp} \cdot \omega^{tk} = \sum_{t=0}^{n-1} \omega^{t(p+k)} \underset{(*)}{=} 0 \Rightarrow e_k \in F.$$

$$\left(\text{car } \omega = e^{i\frac{2\pi}{n}} = e^{i\frac{\pi}{p}} \Rightarrow \omega^p = -1\right)$$

On en déduit : $\boxed{E = F \cap H}$

((*) car $\omega^{p+k} \neq 1$. En effet : $\omega^{p+k} = 1 \Leftrightarrow n \mid p+k$, ~~or $n=2p$ donc $n \mid p+k \Rightarrow p \mid k$ absurde car $1 \leq k \leq p-1$~~ impossible car $1 \leq p+k < 2p = n$

IV.1.d

* $(e_k, \bar{e}_k)$ est une b.o. de E_k. On a vu (II.2.a et IV.1.b) que e_k et $\bar{e}_k = e_{n-k}$ étaient des vecteurs propres de D. Donc E_k reste stable par D et par $M = \frac{1}{2}(I+D)$.

* $\forall v \in E_k \quad v = \alpha e_k + \beta e_{n-k} \Rightarrow D(v) = \alpha \omega^k e_k + \beta \omega^{-k} e_{n-k}$

donc $M(v) = \frac{1}{2}\left((\alpha + \alpha\omega^k) e_k + (\beta + \beta\omega^{-k}) e_{n-k} \right)$

Le Th. de Pythagore donne :

$$\|M(v)\|^2 = \frac{1}{4}\left(|\alpha|^2 |1+\omega^k|^2 + |\beta|^2 |1+\omega^{-k}|^2 \right)$$
$$= \frac{|1+\omega^k|^2}{4} \underbrace{(|\alpha|^2 + |\beta|^2)}_{\|v\|^2}$$

ie $\boxed{\|M(v)\| = \frac{|1+\omega^k|}{2} \|v\|}$ CQFD

IV.2.a

t affine et $t(0)=0 \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow T(z) = x' + iy' = (\alpha x + \gamma y) + (\beta x + \delta y) i$$
$$T(z) = (\alpha + \beta i) x + (\gamma + \delta i) y$$
$$T(z) = (\alpha + \beta i) \frac{z + \bar{z}}{2} + (\gamma + \delta i) \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$\Leftrightarrow T(z) = \frac{1}{2}\left((\alpha + \delta) + (\beta - \gamma) i \right) z + \frac{1}{2}\left(\alpha - \delta + (\beta + \gamma) i \right) \bar{z}$$

Si t affine et $t(0) = 0$, alors $T(z) = az + b\bar{z}$ avec

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}(\alpha + \delta + (\beta - \gamma) i) \\ b = \frac{1}{2}(\alpha - \delta + (\beta + \gamma) i) \end{cases} \quad (*)$$

Réc., si a et b sont donnés, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ se déduisent de $(*)$. D'où l'équivalence

IV.2.b

$|a|^2=|b|^2 \Leftrightarrow (\alpha+\delta)^2+(\beta-\gamma)^2=(\alpha-\delta)^2+(\beta+\gamma)^2 \Leftrightarrow \alpha\delta-\beta\gamma=0$
$\Leftrightarrow$ T automorphisme. CQFD

IV.3.a

Tout polygone régulier R s'écrit $R=sR_k$ où s est une similitude directe (II.1.b) donc dire qu'il existe une transformation affine τ telle que $P=\tau R$ équivaut à affirmer l'existence de $k\in[1,n-1]$, $2k\neq n$ et d'une transf. affine τ telle que $P=\tau R_k$. Ainsi :

$P\in \mathcal{A}_n \Leftrightarrow \exists \tau$ transf. affine $P=\tau R_k$
$\Leftrightarrow \exists T$ transf. complexe $u=T(e_k)=\alpha e_k+\beta\bar{e}_k$ où $|\alpha|\neq|\beta|$ (d'après IV.2)

Ici $2k\neq n$ et $1\leq k\leq n-1$. Si $2k>n$, on peut prendre $k' \doteq n-k \in [1,\frac{n}{2}[$ et avoir : $T(e_k)=\alpha e_k+\beta\bar{e}_k=\alpha\bar{e}_{n-k}+\beta e_{n-k}=T'(e_{n-k})$ où l'on a posé $T'(z)=\beta z+\alpha\bar{z}$.

IV.3.b

Soit $u_k\in E_k$. $u_k=\alpha e_k+\beta\bar{e}_k$ où $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$.

W_k s'écrit $W_k(z)=az+b\bar{z}$ d'après IV.2.a, donc il suffit de choisir $a=\alpha$ et $b=\beta$ pour assurer $W_k(e_k)=u_k$.

Unicité : $W_k(e_k)=u_k \doteq \alpha e_k+\beta\bar{e}_k$ et W_k défini par $W_k(z)=az+b\bar{z}$ entraînent $\alpha e_k+\beta\bar{e}_k=ae_k+b\bar{e}_k$ d'où $a=\alpha$ et $b=\beta$ puisque $(e_k,\bar{e}_k)$ est une base de E_k.

IV.3.c

* $P \in \mathcal{A}_n$ donc il existe un polygone régulier R et une transformation affine τ tels que $P = \tau R$.

$$m(P) = m(\tau R) = \tau(mR)$$

et mR se déduit de R par une similitude directe s (II.2.d), d'où :

$$m(P) = \tau s R \Rightarrow \underline{m(P) \in \mathcal{A}_n}$$

τ est bijective car son image n'est pas incluse dans une dte (P n'étant pas aplati) donc : (on a déjà supposé que τ était une transformation affine)

$$m(P) = \tau s \tau^{-1} P$$

m(P) se déduit de P par la transformation affine $t = \tau s \tau^{-1}$, unique puisque parfaitement déterminée par les images de 3 pts de P formant une base affine du plan.

IV.3.d

* O est le barycentre de P donc $u = (z_1, \dots ; z_n)$ vérifie $z_1 + \dots + z_n = 0$ ie $u \in H$. Si n impair, on a donc $u \in E = H$ (IV.1.c)

Si n est pair, $m(P) = tP \Rightarrow P = t^{-1} m(P) = m(t^{-1} P)$ entraîne $u \in \mathrm{Im}\, M_0 = F \cap H$ d'après III.4.a, donc $\underline{u \in E}$.

* Décomposons u à l'aide de la somme directe :

$$E = E_1 \oplus \dots \oplus E_m \quad \text{où } m = E\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$u = \sum u_k = \sum_{k=1}^{m} W_k(e_k)$$

On a $M(u) = T(u)$

$$\sum M W_k(e_k) = \sum T W_k(e_k)$$

E_k est stable par M, $W_k(e_k) \in E_k$ car $W_k(e_k) = \alpha e_k + \beta \bar{e}_k$

et $T W_k(e_k) \in E_k$ (car comb. linéaire de e_k et $\bar{e}_k$) donc :

$$\boxed{\forall k \quad MW_k(e_k) = TW_k(e_k)}$$

Posons $\begin{cases} W_k(e_k) = \alpha e_k + \beta \bar{e}_k \\ T(z) = az + b\bar{z} \end{cases}$

$$M(\alpha e_k + \beta \bar{e}_k) = T(\alpha e_k + \beta \bar{e}_k)$$
$$= a(\alpha e_k + \beta \bar{e}_k) + b(\bar{\alpha}\bar{e}_k + \bar{\beta} e_k)$$
$$\alpha M(e_k) + \beta M(\bar{e}_k) = (a\alpha + b\bar{\beta}) e_k + (a\beta + b\bar{\alpha})\bar{e}_k$$

Compte tenu de $\begin{cases} M(e_k) = \dfrac{1+\omega^k}{2} e_k & (\text{II}.2.a) \\ M(\bar{e}_k) = \dfrac{1+\omega^{-k}}{2} \bar{e}_k & (\text{IV}.1.b) \end{cases}$, du fait que

$(e_k, \bar{e}_k)$ est libre, et en posant $\lambda_k = \dfrac{1+\omega^k}{2}$, on obtient :

$$\begin{cases} \alpha \lambda_k = a\alpha + b\bar{\beta} \\ \beta \bar{\lambda}_k = a\beta + b\bar{\alpha} \end{cases} \quad (*)$$

Calculons :

$$\begin{cases} W_k S_k(z) \underset{\text{II}.2.c}{=} W_k(\lambda_k z) = \alpha \lambda_k z + \beta \bar{\lambda}_k \bar{z} \\ T W_k(z) = T(\alpha z + \beta \bar{z}) = a(\alpha z + \beta \bar{z}) + b(\bar{\alpha}\bar{z} + \bar{\beta} z) \\ \qquad = (a\alpha + b\bar{\beta}) z + (a\beta + b\bar{\alpha})\bar{z} \end{cases}$$

Compte tenu de $(*)$, on tire :

$$\boxed{\forall k \quad W_k S_k = T W_k}$$

* Si $z \in \operatorname{Ker} W_k$ $\quad W_k S_k(z) = 0 \Rightarrow S_k(z) \in \operatorname{Ker} W_k$ montre que $\operatorname{Ker} W_k$ est stable par S_k.

Si W_k n'est ni nul, ni bijectif, son noyau sera une droite du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{C}$ et cette droite sera stable par S_k. S_k étant une similitude directe de centre O et d'angle non nul (modulo π), c'est absurde.

* Ainsi, si $W_k \neq 0$, W_k sera un automorphisme du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$ et

$$W_k S_k = T W_k \Rightarrow \det W_k . \det S_k = \det T . \det W_k$$

$$\det T = \det S_k = \rho_k^2 = \cos^2 k \frac{\pi}{n}$$

Il existe au plus un $k \in [1, \frac{n}{2}[$ tel que $\det T = \cos^2 k\frac{\pi}{n}$, donc il existe au plus un seul k tel que W_k soit bijective.

Concluons : $\underline{u = W_k(e_k) \in E_k}$ (pour k convenable)

IV.3.e

IV.3.c montre que si $P \in \mathcal{A}_n$, alors $m(P) = tP$ où t est une transformation affine.

Réciproquement, si $m(P) = tP$, l'affixe u de P vérifie $u \in E_k$ d'après IV.3.d, donc $P \in \mathcal{A}_n$ d'après IV.3.a.

CAPES externe 1989 composition 1

C.A.P.E.S.

Première composition

6511. *La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.*

L'usage des instruments de calcul, en particulier des calculatrices électroniques de poche – y compris calculatrices programmables et alphanumériques – à fonctionnement autonome, non imprimantes, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Notations et objectif du problème.

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et par I l'intervalle $[-1, +1]$ de $\mathbb{R}$. Pour p entier positif ou nul, on note $C^p(I)$ (resp. $C^\infty(I)$) l'espace des fonctions f réelles de classe C^p (resp. C^∞) sur I. On désigne par $\mathscr{E}(I)$, l'espace des fonctions continues par morceaux sur I. On rappelle la définition de telles fonctions : une fonction f, définie sur I, est dite continue par morceaux sur I s'il existe une subdivision $-1 = a_0 < a_1 < \cdots < a_s = 1$ de I telle que la restriction $f|]a_i, a_{i+1}[$ se prolonge en une fonction continue sur $[a_i, a_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, \ldots, s-1$. La k-ième dérivée de f est notée indifféremment $f^{(k)}$ ou $\dfrac{d^k f}{dx^k}$ avec, pour $k = 0$, la convention usuelle $\dfrac{d^0 f}{dx^0} = f$.

On notera $\mathscr{L}$ l'opérateur de Legendre, c'est-à-dire l'opérateur qui à une fonction f de classe C^2 associe la fonction $\mathscr{L}f = \dfrac{d}{dx}\left[(x^2-1)\dfrac{df}{dx}\right]$.

Le problème est centré sur le développement d'une fonction en série de Fourier-Legendre et sur des applications d'un tel développement. Dans la partie **II**, on obtient une expression de la distance $d_n(f)$ d'une fonction f continue par morceaux sur I à l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Ceci amène la considération de la série de Fourier-Legendre de f dont la convergence simple vers f sur $]-1, +1[$ est établie dans la partie **IV** lorsque f est K-lipschitzienne et dont les convergences quadratique et uniforme vers f sur I sont prouvées dans la partie **V** lorsque f est de classe C^∞. La partie **V** établit également une caractérisation, parmi les fonctions K-lipschitziennes, des fonctions de $C^\infty(I)$ à l'aide d'une propriété de « croissance » de la suite $(d_n(f))$. La partie **I** étudie quelques propriétés de l'opérateur et des polynômes de Legendre qui sont utiles pour la suite du problème. Enfin, la partie **III** est consacrée à des inégalités portant sur les normes d'un polynôme et de sa dérivée ; ces inégalités étant utiles notamment dans la partie **V**.

I. — Opérateur et polynômes de Legendre.

Dans cette partie, on étudie l'action de $\mathscr{L}$ sur l'espace vectoriel $\mathscr{P}$ des polynômes à une indéterminée et à coefficients réels. Plus précisément, on propose de déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres P_n de l'endomorphisme ainsi défini puis d'étudier quelques propriétés élémentaires des polynômes de Legendre P_n.

A. Valeurs propres de l'opérateur $\mathscr{L}$.

Pour n appartenant à $\mathbb{N}$, on considère l'espace vectoriel $\mathscr{P}_n$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n à une indéterminée et à coefficients réels.

1° Montrer que $\mathscr{L}$ induit un endomorphisme $\mathscr{L}_n$ de $\mathscr{P}_n$ et calculer la matrice L_n de $\mathscr{L}_n$ relativement à la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathscr{P}_n$.

2° Déterminer les valeurs propres de $\mathscr{L}_n$ et en déduire que $\mathscr{L}_n$ est diagonalisable.

B. Vecteurs propres de l'opérateur $\mathscr{L}$.

On considère les fonctions polynomiales U_n et P_n définies par

$$U_n(x) = (x^2 - 1)^n \qquad \text{et} \qquad P_n(x) = \frac{1}{2^n.n!}\frac{d^nU_n}{dx^n}(x),$$

en convenant que $U_0(x) = P_0(x) = 1$.

3° Montrer que les fonctions polynomiales P_{2n} et P_{2n+1} sont respectivement paire et impaire.

4° En utilisant la formule de Leibniz pour calculer $\frac{d^n}{dx^n}[(x-1)^n(x+1)^n]$, montrer que $P_n(1) = 1$.

5° Calculer P_1 et P_2.

6° ***a)*** Vérifier les relations

$$U'_{n+1}(x) - 2(n+1)xU_n(x) = 0 \tag{1}$$

$$(x^2 - 1)U'_n(x) - 2nxU_n(x) = 0. \tag{2}$$

b) En dérivant $(n+1)$ fois (1) et (2), montrer que la suite (P_n) vérifie

$$P'_{n+1}(x) = xP'_n(x) + (n+1)P_n(x) \tag{3}$$

$$\mathscr{L}P_n = n(n+1)P_n. \tag{4}$$

c) Déduire de ce qui précède, les valeurs propres et les vecteurs propres de $\mathscr{L}$ considéré comme endomorphisme de $\mathscr{P}$.

7° Pour n entier supérieur ou égal à 1, soit u la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$u(x) = [P_n(x)]^2 + \frac{(1-x^2)}{n(n+1)}[P'_n(x)]^2.$$

En utilisant la relation (4), montrer que u est monotone. En déduire que, pour tout élément x de I, $|P_n(x)| \leqslant 1$.

8° Montrer que, pour n entier supérieur ou égal à 1, P_n est exactement de degré n et calculer le coefficient a_n de x^n dans P_n.

En déduire que $\mathscr{P}_n = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathbb{R}\cdot P_k$ où $\mathbb{R}\cdot P_k$ désigne la droite vectorielle engendrée par P_k.

II. — Distance d'une fonction de $\mathscr{E}(I)$ a l'espace $\mathscr{P}_n$.

Pour f et g appartenant à $\mathscr{E}(I)$, on pose

$$(f|g) = \int_{-1}^{+1} f(x)g(x)\,dx, \qquad \|f\| = \left(\int_{-1}^{+1} |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

(Symboles qui définissent sur le sous-espace $C^0(I)$ un produit scalaire et la norme associée.)

1° Orthogonalité des polynômes P_n.

Montrer que pour m et n appartenant à $\mathbb{N}$, $(\mathscr{L}P_n|P_m) = (P_n|\mathscr{L}P_m)$. En déduire que $(P_n|P_m) = 0$ si m et n sont deux entiers distincts.

2° Calcul de $\|P_n\|$ et construction d'une suite orthonormale.

a) En utilisant l'orthogonalité démontrée précédemment, montrer que

$$\int_{-1}^{+1} P'_{n+1}(x)P_n(x)\,dx = (n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n}\|P_n\|^2. \tag{5}$$

(On convient que $a_0 = 1$.)

b) Montrer la relation

$$\int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2\,dx = 2 - 2\int_{-1}^{+1} xP_n(x)P'_n(x)\,dx. \tag{6}$$

c) En utilisant les relations (3), (5) et (6), montrer que $\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$.

d) En déduire que la suite de fonctions polynomiales réelles $(\tilde{P}_n)$, définies par

$$\tilde{P}_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, P_n(x),$$

est orthonormale pour le produit scalaire $(\,|\,)$.

3° Évaluation de la norme de $\mathscr{L}_n$

Montrer que $\|\mathscr{L}_n\| = \sup\{\|\mathscr{L}_n P\|,\ P \in \mathscr{P}_n,\ \|P\| = 1\} = n(n+1)$.
(On pourra exprimer le polynôme P sur la base orthonormale $(\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n)$ de $\mathscr{P}_n$.)

4° **Expression de $d_n(f)$.**

Pour f appartenant à $\mathscr{E}(\mathrm{I})$ et n appartenant à $\mathbb{N}$, on note $c_n(f) = \int_{-1}^{+1} f(x)\tilde{P}_n(x)\,dx$. La distance de f à $\mathscr{P}_n$ qui est définie par $d(f, \mathscr{P}_n) = \mathrm{Inf}\{\|f - P\|, P \in \mathscr{P}_n\}$ est notée plus simplement $d_n(f)$.

a) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \tilde{P}_k$ un élément de $\mathscr{P}_n$ et f un élément de $\mathscr{E}(\mathrm{I})$, montrer que

$$\|f - P\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} (c_k(f))^2 + \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - c_k(f))^2.$$

b) En déduire qu'il existe un élément unique Q de $\mathscr{P}_n$ tel que $\|f - Q\| = d_n(f)$.

Expliciter ce polynôme Q et montrer que $(d_n(f))^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} (c_k(f))^2$.

c) En déduire que $\lim_{n\to\infty} c_n(f) = 0$.

III. – Inégalités de Markov.

1° Soit θ et φ les fonctions définies sur l'intervalle $]-1, +1[$ par

$$\theta(x) = \frac{1}{4}\left\{\frac{2x}{1-x^2} + \ln\frac{1+x}{1-x}\right\}, \qquad \varphi(x) = (1 - x^2)\theta(x).$$

a) Calculer $\theta'(x)$.

b) Soit F une fonction réelle de classe C^1 sur I vérifiant $F(-1) = F(1) = 0$. Montrer que l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \theta'(x)|F(x)|^2\,dx$ a un sens et que

$$\int_{-1}^{+1} \theta'(x)|F(x)|^2\,dx = -2\int_{-1}^{+1} \theta(x)F(x)F'(x)\,dx.$$

c) En faisant apparaître la fonction $\frac{\theta}{\sqrt{\theta'}}$, montrer que

$$\left(\int_{-1}^{+1} |\theta(x)F(x)F'(x)|\,dx\right)^2 \leqslant \int_{-1}^{+1} |\varphi(x)F'(x)|^2\,dx \cdot \int_{-1}^{+1} \theta'(x)|F(x)|^2\,dx.$$

d) En déduire que

(7) $$\int_{-1}^{+1} \left(\frac{F(x)}{1-x^2}\right)^2 dx \leqslant 4\int_{-1}^{+1} |\varphi(x)F'(x)|^2\,dx.$$

2° Soit f une fonction réelle de classe C^2 sur I.

a) Montrer que, pour x appartenant à $]-1, +1[$, la dérivée de f au point x vérifie

(8) $$f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1}\int_{-1}^{x} \mathscr{L}f(t)\,dt.$$

b) En déduire qu'il existe une constante C positive, indépendante de f, telle que

(9) $$\|f'\| \leqslant C\|\mathscr{L}f\|.$$

3° Soit g une fonction réelle de classe C^1 sur I.

a) Montrer que, pour tout couple (x, y) d'éléments de I

(10) $$[g(x)]^2 \leqslant [g(y)]^2 + 2\,g\,\|g'\|.$$

b) En intégrant cette inégalité sur l'intervalle I, montrer que

(11) $$\sup_{x \in I} |g(x)| \leqslant \|g\| + \|g'\|.$$

4° Déduire de **III. 2°**, **III. 3°** et **II. 3°** qu'il existe des constantes C_1 et C_2 positives telles que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$ et tout polynôme P appartenant à $\mathscr{P}_n$, on ait

(12) $$\|P'\| \leqslant C_1 n^2 \|P\|.$$

(13) $$\sup_{x \in I} |P'(x)| \leqslant C_2 n^4 \sup_{x \in I} |P(x)|.$$

IV. — Développement d'une fonction lipschitzienne en série de polynômes de Legendre.

1° Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

a) Montrer que le polynôme $Q_n(x) = (n + 1)P_{n+1}(x) - (2n + 1)xP_n(x)$ appartient à $\mathscr{P}_n$.

b) Déduire de **II. 1°** que le polynôme xP_n est orthogonal au polynôme P_k si $k \leqslant n - 2$. En déduire qu'il existe deux réels λ et μ tels que

$$Q_n(x) = \lambda P_n(x) + \mu P_{n-1}(x).$$

c) Déduire de **I. 3°** et **I. 4°** que $\lambda = 0$, $\mu = -n$ et que l'on a la relation

(14) $$(n + 1)P_{n+1}(x) - (2n + 1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0.$$

d) En utilisant (14), montrer que

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1.3 \ldots (2n - 1)}{2.4 \ldots (2n)}.$$

2° Pour n appartenant à $\mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$.

a) Montrer que pour $n \geqslant 2$, $nI_n = (n - 1)I_{n-2}$ et que $I_{2n} \leqslant I_{2n-1}$.

b) Calculer I_{2n} et I_{2n-1}. En déduire, pour $n \geqslant 1$, l'inégalité $|P_{2n}(0)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

3° En exprimant $P'_{2n+1}(0)$ à l'aide de $P_{2n+2}(0)$ grâce aux relations (3) et (14), montrer que, pour n appartenant à $\mathbb{N}$,

$$|P'_{2n+1}(0)| \leqslant 2\sqrt{\frac{n + 1}{\pi}}.$$

4° Pour n entier supérieur ou égal à 1, on considère les fonctions v (resp. Φ) définies sur I (resp. $]-1, +1[$) par

$$v(x) = \sqrt{1 - x^2}\,P_n(x) \left(\text{resp. } \Phi(x) = \frac{1}{1 - x^2}\left[n(n + 1) + \frac{1}{1 - x^2}\right]\right).$$

a) Montrer que v est solution sur $]-1, +1[$ de l'équation différentielle $\dfrac{d^2v}{dx^2} + \Phi v = 0$.

b) Étudier les variations de la fonction w définie sur $]-1, +1[$ par

$$w(x) = [v(x)]^2 + \frac{[v'(x)]^2}{\Phi(x)}.$$

En déduire que pour x appartenant à $]-1, +1[$ et pour tout entier n supérieur ou égal à 1

(15) $$|P_n(x)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi n(1 - x^2)}}.$$

5° En utilisant la relation (14), montrer que pour tout couple (x, y) d'éléments distincts de $\mathbb{R}$

(16) $$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)P_k(x)P_k(y) = (n+1)\frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)}{x-y}.$$

On notera $K_n(x, y) = \frac{n+1}{2}\cdot\frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)}{x-y}$.

6° Soit f un élément de $\mathscr{E}(I)$. Pour n appartenant à $\mathbb{N}$, on pose $S_n f = \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\tilde{P}_k$.

a) Montrer que pour tout élément x de I, $S_n f(x) = \int_{-1}^{+1} K_n(x, y)f(y)\,dy$.

b) En déduire que $\int_{-1}^{+1} K_n(x, y)\,dy = 1$ et que, pour tout élément x de I,

$$S_n f(x) - f(x) = \int_{-1}^{+1} K_n(x, y)(f(y) - f(x))\,dy.$$

c) On suppose de plus que f est K-lipschitienne sur I, c'est-à-dire que pour tout couple (x, y) d'éléments de I, $|f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|$.

Montrer que, pour tout élément x de $]-1, +1[$ $\lim_{n\to\infty} S_n f(x) = f(x)$.

(On pourra décomposer l'intégrale $\int_{-1}^{+1}$ en $\int_{-1}^{x-\varepsilon} + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{+1}$ et utiliser **IV. 4° *b)*** et **II. 4° *c)*** pour une fonction de $\mathscr{E}(I)$ convenable.)

V. — Caractérisation des fonctions de $C^\infty(I)$ par la suite $(d_n(f))$.

On dira qu'une suite (α_n) de nombres réels est du type (S) si, pour tout entier k appartenant à $\mathbb{N}$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} n^k\alpha_n$ est absolument convergente.

1° Soit (c_n) une suite de nombres réels du type (S). Montrer que, pour tout x élément de I, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\tilde{P}_n(x)$ est convergente.

Montrer que sa somme $f = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\tilde{P}_n$ est de classe C^∞ sur I.

2° Soit f une fonction de classe C^∞ sur I.

a) Montrer que la suite $(c_n(f))$ est du type (S) et que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f)\tilde{P}_n$ est uniformément convergente sur I et a pour somme la fonction f. (On pourra évaluer $c_n(\mathscr{L}f)$ en fonction de $c_n(f)$.)

b) En déduire que l'opérateur $\mathscr{A} : f \to \mathscr{A}f = \mathscr{L}f + f$ est un isomorphisme de $C^\infty(I)$ sur $C^\infty(I)$.

c) Prouver la convergence en moyenne quadratique de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f)\tilde{P}_n$ vers f sur I, c'est-à-dire

$$\lim_{N\to\infty}\left\| f - \sum_{n=0}^{N} c_n(f)\tilde{P}_n \right\| = 0.$$

Prouver également que $\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}(c_n(f))^2$.

3° Déduire de **V. 2°** et **IV. 6° *c)*** que, pour une fonction f K-lipschitienne sur I, f est de classe C^∞ sur I si et seulement si la suite $(d_n(f))$ est du type (S).

CAPES 89, 1° composition

I.A.1 $\mathcal{L}(f) = 2X f'(X) + (X^2-1) f''(X)$.

Si $f \in \mathcal{P}_n$, les degrés de $2Xf'(X)$ et $(X^2-1)f''(X)$ étant inférieurs à celui de f, on aura $\mathcal{L}(f) \in \mathcal{P}_n$. Comme, de plus :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall f, g \in \mathcal{P}_n \qquad \mathcal{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{L}(f) + \mu \mathcal{L}(g)$$

on constate que <u>$\mathcal{L}$ est un endomorphisme de $\mathcal{P}_n$</u>

On trouve : $\mathcal{L}(X^k) = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2} \qquad 0 \leq k \leq n$

d'où la matrice de $\mathcal{L}$ dans la base $(1, X, \dots, X^n)$:

$$L_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & & 0 \\ 0 & 2 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 6 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & & & n(n+1) \end{pmatrix}$$

I.A.2 Le polynôme caractéristique de L_n est :

$$\chi_M(\lambda) = \det(L_n - \lambda I) = -\lambda(2-\lambda)(6-\lambda)\cdots(n(n+1)-\lambda)$$

Il montre que $\mathcal{L}$ admet les $n+1$ valeurs propres distinctes $i(i+1)$ où $0 \leq i \leq n$, et cela entraine que <u>$\mathcal{L}_n$ est diagonalisable</u>

I.B.3 La dérivée d'une fonction paire (resp. impaire) est impaire (resp. pair). Comme U_n est paire,

$$U_n \text{ paire} \Rightarrow U_n' \text{ impair} \Rightarrow U_n'' \text{ paire} \Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{d^{2n} U_n}{dx^{2n}} \text{ paire} \Rightarrow \frac{d^{2n+1} U_n}{dx^{2n+1}} \text{ impaire}$$

et P_{2n} et P_{2n+1} seront resp. paires et impaires.

I.B.4

$$\frac{d^n}{dx^n}\left((x-1)^n(x+1)^n\right) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{d^k}{dx^k}(x-1)^n \cdot \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x+1)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{n!}{(n-k)!}(x-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}(x+1)^k$$

$$= n! \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 (x-1)^{n-k}(x+1)^k$$

entraîne :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2(x-1)^{n-k}(x+1)^k$$

donc : $\boxed{P_n(1) = 1}$

I.B.5 On trouve facilement :

$$P_1(X) = X \qquad P_2(X) = \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}$$

I.B.6.a On a :

$$U'_{n+1}(x) - 2(n+1)x\,U_n(x) = (n+1)(x^2-1)^n \cdot 2x - 2(n+1)x\cdot(x^2-1)^n = 0$$

$$(x^2-1)U'_n(x) - 2nx\,U_n(x) = (x^2-1).n(x^2-1)^{n-1}.2x - 2nx\,(x^2-1)^n = 0$$

donc (1) et (2).

I.B.6.b * Dérivons (n+1) fois (1) :

$$U_{n+1}^{(n+2)}(x) - 2(n+1)\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k} \underbrace{\frac{d^k}{dx^k}(x)}_{\neq 0 \text{ ssi } k=0 \text{ ou } 1} \frac{d^{n+1-k}}{dx^{n+1-k}}(U_n) = 0$$

$$U_{n+1}^{(n+2)}(x) - 2(n+1)\left[x\,U_n^{(n+1)} + (n+1)\,U_n^{(n)}\right] = 0$$

$$\frac{d}{dx}U_{n+1}^{(n+1)}(x) - 2(n+1)\,x\frac{d}{dx}U_n^{(n)} - 2(n+1)^2\,U_n^{(n)} = 0$$

En remplaçant $U_n^{(n)} = 2^n n!\,P_n$, et en simplifiant par $2^{n+1}(n+1)!$, on trouve :

$$\boxed{P_{n+1}' = x\,P_n' + (n+1)\,P_n} \qquad (3)$$

* Dérivons (n+1) fois l'égalité (2) :

$$(x^2-1)\,U_n^{(n+2)} + (n+1)\,2x\,U_n^{(n+1)} + \frac{(n+1)n}{2}\cdot 2\,U_n^{(n)} - 2n\left(x\,U_n^{(n+1)} + (n+1)U_n^{(n)}\right) = 0$$

$$(x^2-1)\,U_n^{(n+2)} + 2x\,U_n^{(n+1)} - n(n+1)\,U_n^{(n)} = 0$$

Compte tenu de $U_n^{(n)} = 2^n n!\,P_n$, on trouve :

$$(x^2-1)\frac{d^2}{dx^2}P_n + 2x\frac{d}{dx}P_n = n(n+1)\,P_n$$

soit $\boxed{\mathcal{L}(P_n) = n(n+1)P_n}$

I.B.6.c

Si λ est une valeur propre de $\mathcal{L}$, soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un vecteur propre associé. On a : $\mathcal{L}(P) = \lambda P$.
Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P \in \mathcal{P}_n$. Alors $\mathcal{L}_n(P) = \lambda P$ montre que λ est une valeur propre de $\mathcal{L}_n$, donc :

$$\lambda = i(i+1) \quad \text{où } i \in \{0, 1, \dots, n\}$$

et P est sur la droite vectorielle sous-espace propre de $\mathcal{L}_n$ associée à $i(i+1)$. Comme $\mathcal{L}(P_i) = i(i+1) P_i$ et $P_i \in \mathcal{P}_n$ (en effet, $\deg P_i = i \leq n$), cette droite propre est engendrée par P_i et $P = a P_i$, $a \in \mathbb{R}$.

On a montré :

$$\left.\begin{array}{l} \lambda \text{ valeur propre de } \mathcal{L} \\ P \text{ vecteur propre associé} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists i \in \mathbb{N} \left\{\begin{array}{l} \lambda = i(i+1) \\ P = a P_i \end{array}\right.$$

Les valeurs propres de $\mathcal{L}$ sont les $i(i+1)$ avec $i \in \mathbb{N}$.
Le s.e.v. propre associé à $i(i+1)$ est la droite engendrée par P_i.

I.B.7

$$u'(x) = 2 P_n' \cdot \left(P_n + \frac{1-x^2}{n(n+1)} P_n'' - \frac{x}{n(n+1)} P_n' \right)$$

(4) entraine $(1-x^2) P_n'' = 2x P_n' - n(n+1) P_n$, de sorte que l'on obtienne

$$u'(x) = 2 P_n' \cdot \left(P_n + \frac{2x P_n' - n(n+1) P_n}{n(n+1)} - \frac{x}{n(n+1)} P_n' \right)$$

$$u'(x) = \frac{2x P_n'^2}{n(n+1)} \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in [0,1].$$

Cela prouve que u est croissante, et donc :

$$\forall x \in [0,1] \qquad 0 \leq u(x) \leq u(1) = P_n(1)^2 = 1$$

Comme $P_n^2(x) \leq u(x)$, on déduit $P_n^2(x) \leq 1$ et donc :

$$\boxed{|P_n(x)| \leq 1}$$

pour tout $x \in [0,1]$.

NB : P_n étant soit paire, soit impaire, on aura aussi $|P_n(x)| \leq 1$ pour $x \in [-1,1]$.

I.B.8

Le monôme de plus haut degré de $U_n(x)$ est x^{2n}. Comme $\frac{d^n}{dx^n} x^{2n} = \frac{(2n)!}{n!} x^n$, on aura :

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n + Q(x) \qquad \text{avec } \deg Q < n.$$

De sorte que

$$\boxed{a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}}$$

Les $n+1$ polynômes $P_0, P_1, \dots, P_n$ sont tous de degrés différents, et dans $\mathcal{P}_n$. Ils constituent une base de $\mathcal{P}_n$, et :

$$\mathcal{P}_n = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathbb{R}.P_k$$

NB : $\mathcal{L}_n$ est diagonalisable, et les $(n+1)$ sev propres de $\mathcal{L}_n$ sont les $\mathbb{R}.P_k$ $(0 \leq k \leq n)$ d'après I.B.6.c. Cela entraine aussi l'écriture $\mathcal{P}_n = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathbb{R} P_k$.

II.1

* $(\mathcal{L}P_n | P_m) = \int_{-1}^{1} \mathcal{L}P_n . P_m \, dx = \int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left((x^2-1)P_n'\right) . P_m \, dx$

$= \left[(x^2-1)P_n'\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (x^2-1)P_n' . P_m' \, dx$

$= - \int_{-1}^{1} P_n' . (x^2-1) P_m' \, dx$

En intégrant encore par parties :

$$(\mathcal{L}P_n | P_m) = -\left(\left[P_n (x^2-1) P_m'\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_n \frac{d}{dx}\left((x^2-1)P_m'\right) dx \right)$$

$$= \int_{-1}^{1} P_n . \mathcal{L}P_m \, dx$$

$$= (P_n | \mathcal{L}P_m)$$

* <u>Si $n \neq m$</u>, on a :

$(\mathcal{L}P_n | P_m) = (P_n | \mathcal{L}P_m) \Rightarrow (n(n+1)P_n | P_m) = (P_n) \; m(m+1)P_m)$

$\Rightarrow (n(n+1) - m(m+1)) (P_n | P_m) = 0$

$\Rightarrow (n-m)(n+m+1) . (P_n | P_m) = 0$

Or comme $(n-m)(n+m+1) \neq 0$, <u>cela entraîne bien $(P_n | P_m) = 0$.</u>

II.2.a

* $P_n \in \mathcal{P}_n$ est orthogonal à chacun des polynômes P_k, avec $k \neq n$, donc sera orthogonal à :

$$\text{Vect}(P_0, P_1, ..., P_{n-1}) = \text{Vect}(1, x, ..., x^{n-1}) \qquad (\text{cf I.8})$$

* Écrivons $P_{n+1} = a_{n+1}x^{n+1} + Q(x)$ avec $\deg Q(x) < n+1$, on aura :

$$\int_{-1}^{1} P'_{n+1} . P_n = (P'_{n+1} | P_n) = ((n+1)a_{n+1}x^n + Q'(x) | P_n) = (n+1)a_{n+1}(x^n | P_n)$$

* D'autre part :

$$\|P_n\|^2 = (P_n | P_n) = (a_n x^n + R(x) | P_n) \qquad \text{où } \deg R < n$$

et puisque P_n est orthogonal à Vect $(1, x, \dots, x^{n-1})$, il sera orthogonal à $R(x)$ et :

$$\|P_n\|^2 = a_n (x^n | P_n)$$

Des deux égalités obtenues, on tire

$$\int_{-1}^{1} P'_{n+1} P_n = (n+1) \frac{a_{n+1}}{a_n} \|P_n\|^2 \qquad (5)$$

II.2.b Par intégration par parties,

$$\int_{-1}^{1} P_n^2 = [x P_n^2]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} x . 2 P_n P_n' \, dx$$

Compte tenu de $[x P_n^2]_{-1}^{1} = P_n(1)^2 + P_n(-1)^2 = 2$ (car $P_n(1) = 1$ et P_n est soit paire, soit impaire), on obtient :

$$\int_{-1}^{1} P_n^2 = 2 - 2 \int_{-1}^{1} x P_n P_n' \, dx \qquad (6)$$

II.2.c

En utilisant (3) :

$$(P'_{n+1} | P_n) = (x P_n' + (n+1) P_n | P_n)$$

$$= (x P_n' | P_n) + (n+1) \|P_n\|^2$$

(5) et (6) permettent d'écrire :

$$(n+1) \frac{a_{n+1}}{a_n} \|P_n\|^2 = \frac{1}{2} (2 - \|P_n\|^2) + (n+1) \|P_n\|^2$$

Comme $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2n+1}{n+1}$, on obtient :

$$\left(n+\frac{1}{2}\right) \|P_n\|^2 = 1$$

soit
$$\boxed{\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}}$$

II.2.d II.1 entraîne $(\tilde{P}_n | \tilde{P}_m) = 0$ si $n \neq m$, et l'on a :

$\|\tilde{P}_n\|^2 = \left(\dfrac{2n+1}{2}\right) \|P_n\|^2 = 1$, d'où le résultat.

II.3

Soit $P \in \mathcal{P}_n$, de norme 1. Il s'écrit :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \tilde{P}_k \qquad (\text{où } \sum \lambda_k^2 = 1)$$

dans la b.o. $(\tilde{P}_0, \dots, \tilde{P}_n)$

$$\|\mathcal{L}_n P\|^2 = \|\sum \lambda_k \mathcal{L}_n \tilde{P}_k\|^2 = \|\sum \lambda_k k(k+1) \tilde{P}_k\|^2$$

puisque $\tilde{P}_k \in \mathbb{R} P_k$ et que $\mathbb{R} P_k$ est le sev propre de $\mathcal{L}_n$ associé à la valeur propre $k(k+1)$. Ainsi :

$$\|\mathcal{L}_n P\|^2 = \sum \lambda_k^2 k^2 (k+1)^2 \leq \left(\sum \lambda_k^2\right) n^2 (n+1)^2 = n^2(n+1)^2$$

ce qui montre que $\|\mathcal{L}_n\| \leq n(n+1)$.

Comme $\|\mathcal{L}_n \tilde{P}_n\| = n(n+1)$, on aura finalement :

$$\boxed{\|\mathcal{L}_n\| = n(n+1)}$$

II.4.a

$\|f-P\|^2 = (f-P \mid f-P) = \|f\|^2 - 2(f\mid P) + \|P\|^2$ où $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \tilde{P}_k$

$(\tilde{P}_0, \dots, \tilde{P}_n)$ étant une b.o. de $\mathcal{P}_n$, on a $\|P\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^2$.

D'autre part :

$$(f\mid P) = (f \mid \sum \lambda_k \tilde{P}_k) = \sum \lambda_k (f \mid \tilde{P}_k) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \, c_k(f)$$

donc :

$$\|f-P\|^2 = \|f\|^2 - 2\sum_{k=0}^{n} \lambda_k . c_k(f) + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^2$$

$$\|f-P\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} (c_k(f))^2 + \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - c_k(f))^2$$

II.4.b

L'égalité précédente montre que, pour tout $P \in \mathcal{P}_n$:

$$\|f-P\|^2 \geqslant \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} (c_k(f))^2$$

Comme $\|f-Q\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} (c_k(f))^2$ lorsque $Q = \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\tilde{P}_k$,

on a montré que $\|f-Q\| = \inf_{P\in\mathcal{P}_n} \|f-P\| \doteq d_n(f)$

<u>Ccl</u> :
$$d_n(f)^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} (c_k(f))^2$$

II.4.c De $\|f-Q\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} (c_k(f))^2$, on déduit :

$$\|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} (c_k(f))^2 \geqslant 0 \quad , \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

La série $\sum_{k=0}^{n} (c_k(f))^2$ est donc majorée par $\|f\|^2$, et convergera. Son terme général tendra vers 0, soit : $\lim_{k\to+\infty} c_k(f) = 0$.

III.1.a

On trouve $\theta'(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)^2}$

III.1.b

* $\theta'(x)\,|F(x)|^2$ est continue sur $]-1,1[$, et $\theta'(x)\,|F(x)|^2 = \left(\dfrac{F(x)}{1-x^2}\right)^2$,

donc :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1_-} \theta'(x)\,|F(x)|^2 = \dfrac{1}{4} \lim\limits_{x\to 1_-} \left(\dfrac{F(x)-F(1)}{1-x}\right)^2 = \dfrac{1}{4}\,F'(1)^2 \\ \lim\limits_{x\to 1_+} \theta'(x)\,|F(x)|^2 = \dfrac{1}{4}\,F'(-1)^2 \end{cases}$$

Il en résulte que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \theta'(x)\,|F(x)|^2\,dx$ a un sens.

* Posons $-1 < a < b < 1$. Par intégration par parties :

$$\int_a^b \theta'.F^2 = \left[\theta.F^2\right]_a^b - \int_a^b \theta.2FF'\,dx$$

Comme $\lim\limits_{\substack{a\to -1\\ b\to 1}} \left[\theta.F^2\right]_a^b = 0$ (cf lemme ci-dessous) et $\displaystyle\int_{-1}^{1} \theta'.F^2$ existe,

on aura en passant à la limite pour $a \to -1$ et $b \to 1$:

$$\boxed{\int_{-1}^{1} \theta'.F^2 = -2\int_{-1}^{1} \theta.F.F'}$$

<u>lemme</u> : $\lim_{\substack{a\to -1\\ b\to 1}} \left(\theta(b)F^2(b) - \theta(a)F^2(a)\right) = 0$

preuve du lemme : Montrons seulement que $\lim_{x\to 1_-} \theta(x)F^2(x) = 0$, le cas où $x \to 1_+$ étant similaire.

$$\theta(x)F^2(x) = \frac{1}{4}\Big(\underbrace{\frac{2x}{1+x}}_{\to 2} \cdot \underbrace{\frac{F(x)}{1-x}}_{\to -F'(1)} + \left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)F(x)\Big)\underbrace{F(x)}_{\to 0}$$

et on écrit :

$$\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)F(x) = \underbrace{\frac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{\frac{1+x}{1-x}}}_{\substack{\to 0\\ (x\to 1_-)}} \cdot \underbrace{(1+x)}_{\to 2} \cdot \underbrace{\frac{F(x)}{1-x}}_{\to -F'(1)}$$

d'où le résultat.

CQFD

III.1.c On utilise Cauchy-Schwartz judicieusement :

$$\left(\int |\theta F F'|\right)^2 = \int \left|\frac{\theta}{\sqrt{\theta'}}F'\right| \cdot \left|\sqrt{\theta'}F\right|$$

$$\leqslant \int \frac{\theta^2}{\theta'}F'^2 \cdot \int \theta' F^2$$

Comme $\frac{\theta^2}{\theta'} = (1-x^2)^2\theta^2 = \varphi^2$, on obtient bien :

$$\left(\int_{-1}^{1} |\theta(x)F(x)F'(x)|\right)^2 \leqslant \int_{-1}^{1} (\varphi(x)F'(x))^2\,dx \cdot \int_{-1}^{1} \theta'(x)F(x)^2\,dx$$

III.1.d

Comme $\theta'(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)^2}$, $\left(\dfrac{F(x)}{1-x^2}\right)^2 = \theta' F(x)^2$

On a :

$$\int \theta' F^2 = -2 \int \theta . F . F' \quad \text{d'après b)}$$

D'où :

$$\left| \int \theta' F^2 \right| \leq 2 \int |\theta F F'| \leq 2 \left(\int |\varphi F'|^2 \right)^{1/2} \left(\int |\theta' F^2| \right)^{1/2}$$

d'après c). On en tire :

$$\left(\int \theta' F^2 \right)^{1/2} \leq 2 \left(\int |\varphi F'|^2 \right)^{1/2}$$

$$\int \theta' F^2 \leq 4 \int |\varphi F'|^2$$

$$\boxed{\int_{-1}^{1} \left(\frac{F(x)}{1-x^2} \right)^2 dx \leq 4 \int_{-1}^{1} |\varphi(x) F'(x)|^2 dx}$$

comme voulu

III.2.a $\mathcal{L}f = \frac{d}{dt}\left((t^2-1)f'(t)\right) = 2tf' + (t^2-1)f''$, donc :

$$\int_{-1}^{x} \mathcal{L}f(t)\,dt = \int_{-1}^{x} 2tf'(t)\,dt + \int_{-1}^{x} (t^2-1)f''(t)\,dt$$

$$= \int_{-1}^{x} 2tf'(t)\,dt + \left[(t^2-1)f'(t)\right]_{-1}^{x} - \int_{-1}^{x} 2tf'(t)\,dt$$

$$= (x^2-1)f'(x) \qquad \text{comme prévu.}$$

III.2.b

On applique (7) avec $F(x) = (x^2-1)f'(x)$:

$$\int_{-1}^{1} f'(x)^2\,dx \leq 4 \int_{-1}^{1} |\varphi(x)\,\mathcal{L}f(x)|^2\,dx$$

φ est continue sur $]-1,1[$, et l'on vérifie que :

$$\lim_{x\to 1_-} \varphi(x) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to -1_+} \varphi(x) = -\frac{1}{2}$$

φ sera donc prolongeable par continuité sur $[-1,1]$, et sera donc bornée sur $[-1,1]$. Ainsi :

$$\int_{-1}^{1} f'(x)^2\,dx \leq 4 \int_{-1}^{1} \sup_{x\in I}|\varphi(x)|\,|\mathcal{L}f(x)|^2\,dx$$

ce qui signifie :

$$\|f'\| \leq 2\sqrt{\sup_I|\varphi(x)|}\ \|\mathcal{L}f\|$$

$$\boxed{\|f'\| \leq C\ \|\mathcal{L}(f)\|} \qquad \text{avec } C \doteq 2\sqrt{\sup_{x\in I}|\varphi(x)|}$$

III.3.a

$$g(x)^2 - g(y)^2 = \int_x^y 2\, g(t)\, g'(t)\, dt$$

Cauchy-Schwarz permet d'écrire

$$\left| \int_x^y g(t) g'(t)\, dt \right| \leq \left| \int_x^y |g(t)||g'(t)|\, dt \right| \leq \left(\int_x^y |g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_x^y |g'(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \|g\|\, \|g'\| \quad \text{puisque } x, y \in I$$

D'où $\quad g(x)^2 \leq g(y)^2 + 2\|g\|.\|g'\|$

III.3.b

Intégrons par rapport à y sur $[-1,1]$:

$$2\,(g(x))^2 \leq \|g\|^2 + 4\,\|g\|.\|g'\| \leq 2\|g\|^2 + 4\,\|g\|\,\|g'\| + 2\|g'\|^2$$
$$\leq 2\,(\|g\| + \|g'\|)^2$$

donc $\quad \sup_{x \in I} g(x) \leq \|g\| + \|g'\|$

III.4

* (II.3) montre que $\|\mathcal{L}P\| \leq n(n+1)\|P\|$ dès que $P \in \mathcal{P}_n$, et (9) entraîne $\|P'\| \leq C\,\|\mathcal{L}P\|$, d'où $\|P'\| \leq C\,n(n+1)\|P\| \leq 2C.n^2\|P\|$ et (12).
* (11) donne $\sup_{x \in I} |P'(x)| \leq \|P'\| + \|P''\|$, et (9) entraîne :

$$\sup_{x \in I} |P'(x)| \leq C_1 n^2 \|P\| + (C_1 n^2)^2 \|P\|$$

Comme $\|P\| = \left(\int_{-1}^{1} P^2(t)\,dt \right)^{1/2} \leqslant \sqrt{2} \,.\, \sup_{x \in I} |P(x)|$, on trouve :

$$\sup_{x \in I} |P'(x)| \leqslant C_1 n^2 (1 + C_1 n^2) \sqrt{2} \,.\, \sup_{x \in I} |P(x)|$$

Enfin, il existe une constante positive C_2 telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad C_1 n^2 (1 + C_1 n^2) . \sqrt{2} \leqslant C_2 \, n^4$$

(faire : $\lim_{n \to +\infty} \frac{C_1 n^2 (1 + C_1 n^2)\sqrt{2}}{n^4} = C_1^2 \sqrt{2}$, finie, et $\lim_{n \to 0} \frac{C_1 n^2 (1 + C_1 n^2 \sqrt{2})}{n^4} = \infty$, la fct $n \mapsto \frac{C_1 n^2 (1 + C_1 n^2)\sqrt{2}}{n^4}$ étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, tendant vers une limite pour $n \to +\infty$, et pour $n \to 0$, sera <u>bornée</u>)

CQFD

IV. 1. a

P_n est un polynôme de degré n dont le terme en x^n est $\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n$,

donc Q_n sera un polynôme de degré $\leqslant n+1$ de terme en x^{n+1} :

$$\underbrace{\left((n+1) \frac{(2(n+1))!}{2^{n+1} [(n+1)!]^2} - (2n+1) \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \right)}_{= 0} x^{n+1}$$

On aura bien $\deg Q_n \leqslant n$.

IV.1.b

* On a $(xP_n \mid P_k) = (P_n \mid xP_k)$ et $\deg(xP_k) = k+1 \leq n-1$, dès que $k \leq n-2$. Comme P_n est orthogonal à $\mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_{n-1}) = \mathrm{Vect}(1, \dots, x^{n-1}) = \mathcal{P}_{n-1}$, on constate :

$$(P_n \mid xP_k) = 0$$

On a bien : $(xP_n \mid P_k) = 0$ si $k \leq n-2$

* On sait que $Q_n \in \mathcal{P}_n$, donc Q_n s'exprime dans la base $(P_0, \dots, P_n)$ de $\mathcal{P}_n$:

$$Q_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i \qquad \text{avec } \alpha_i \in \mathbb{R}$$

On a $(Q_n \mid P_k) = \alpha_k (P_k \mid P_k)$

et $(Q_n \mid P_k) = (n+1) \underbrace{(P_{n+1} \mid P_k)}_{=0} - (2n+1) \underbrace{(xP_n \mid P_k)}_{=0 \text{ si } 0 \leq k \leq n-2}$

donc l'on tire :

$$\alpha_k (P_k \mid P_k) = 0 \qquad \text{pour tout } 0 \leq k \leq n-2$$

$$\alpha_k = 0 \qquad \text{si } 0 \leq k \leq n-2$$

Finalement, $\boxed{Q_n = \alpha_n P_n + \alpha_{n-1} P_{n-1}}$

IV.1.c Pour tout n, $P_n(1) = 1$ et $P_n(-1) = (-1)^n$ (car P_n est paire ou impaire suivant la parité de n), donc $Q_n = \lambda P_n + \mu P_{n-1}$ entraîne :

$$\begin{cases} Q_n(1) = \lambda + \mu \\ Q_n(-1) = \lambda(-1)^n + \mu(-1)^{n-1} \end{cases}$$

Comme $Q_n(1) = (n+1) P_{n+1}(1) - (2n+1) P_n(1) = -n$

$Q_n(-1) = (n+1)(-1)^{n+1} + (2n+1)(-1)^n$

on obtient :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = -n \\ -\lambda + \mu = -n \end{cases}$$

d'où $(\lambda, \mu) = (0, -n)$

Il suffit de traduire $Q_n = -n P_{n-1}$ compte tenu de la définition de Q_n pour obtenir (14).

IV.1.d

$P_{2p+1}(0) = 0$ puisque P_{2p+1} est impaire.

Faisons $n = 2p-1$ et $x = 0$ dans (14) :

$$2p \cdot P_{2p}(0) + (2p-1) P_{2p-2}(0) = 0$$

$$P_{2p}(0) = -\frac{2p-1}{2p} P_{2(p-1)}(0)$$

et, de proche en proche :

$$P_{2p}(0) = (-1)^p \frac{2p-1}{2p} \cdots \frac{1}{2} P_0(0)$$

$$\boxed{P_{2p}(0) = (-1)^p \frac{1.3 \ldots (2p-1)}{2.4 \ldots (2p)}}$$ car $P_0(0) = 1$

IV.2.a Pour $n \geqslant 2$, on a par intégration par parties :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin t . \sin^{n-1} t \, dt = [-\cos t . \sin^{n-1} t]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos t).(n-1) \sin^{n-2} t . \cos t \, dt$$

$$= (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^{n-2} t \, dt$$

$$= (n-1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t) \sin^{n-2} t \, dt$$

$$I_n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

d'où $\quad n I_n = (n-1) I_{n-2}$

* Si $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin t \in [0,1]$ donc $0 \leq \sin^{2n} t \leq \sin^{2n-1} t$, et en intégrant ces inégalités :

$$0 \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}$$

IV.2.b

* $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ permet d'écrire :

$$\begin{cases} I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \cdots = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} I_0 \quad \text{où } I_0 = \frac{\pi}{2} \\ I_{2n-1} = \frac{2n-2}{2n-1} I_{2n-3} = \cdots = \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \cdots \frac{2}{3} I_1 \quad \text{où } I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = 1 \end{cases}$$

* On constate que :

$$I_{2n} = |P_{2n}(0)| \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$I_{2n-1} = \frac{1}{|P_{2n}(0)|} \cdot \frac{1}{2n}$$

et en remplaçant dans $I_{2n} \leq I_{2n-1}$, on obtient :

$$\frac{\pi}{2} |P_{2n}(0)| \leq \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{|P_{2n}(0)|}$$

$$|P_{2n}(0)|^2 \leq \frac{1}{n\pi}$$

$$|P_{2n}(0)| \leq \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

comme désiré.

IV.3

(3) entraîne $P'_{2n+1}(0) = (2n+1)\, P_{2n}(0)$

(A4) entraîne $(2n+2)\, P_{2n+2}(0) + (2n+1)\, P_{2n}(0) = 0$

d'où $P'_{2n+1}(0) = -2(n+1)\, P_{2n+2}(0)$, et en faisant intervenir la majoration de la question précédente :

$$|P'_{2n+1}(0)| = 2(n+1)\, |P_{2n+2}(0)| \leq 2\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}$$

IV.4.a Un calcul donne :

$$v''(x) = \frac{-P_n}{(1-x^2)^{3/2}} - \frac{2x}{(1-x^2)^{1/2}} P_n' + \sqrt{1-x^2}\, P_n''$$

$$\Phi(x)\, v(x) = \left(\frac{n(n+1)}{(1-x^2)^{1/2}} + \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} \right) P_n$$

d'où :

$$v'' + \Phi(x)\, v = \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} \left[n(n+1) P_n - 2x P_n' + (1-x^2) P_n'' \right]$$

Comme $\mathcal{L} P_n = n(n+1) P_n$ et $\mathcal{L} P_n \doteq 2x P_n' + (x^2-1) P_n''$, on obtient effectivement

$$v'' + \Phi\, v = 0$$

IV.4.b

* w est dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$w'(x) = 2vv' + \frac{2v'v''\Phi - v'^2\Phi'}{\Phi^2}$$

Comme $v'' = -\Phi v$, cette expression se simplifie pour donner :

$$w'(x) = -\frac{v'^2}{\Phi^2}\, \Phi'(x)$$

On a $\Phi'(x) = \dfrac{2x}{(1-x^2)^2}\left(n(n+1) + \dfrac{2}{1-x^2}\right)$, de sorte que le signe de Φ' sur $]-1,1[$ soit celui de x, et :

	-1	0	1
w'	‖ +	−	‖
w	‖ 0 ↗	↘ 0	‖

* On a $\lim_{x \to \pm 1} w(x) = 0$. En effet, si $x \to 1_-$ par exemple,

$w(x) = v(x)^2 + \dfrac{v'(x)^2}{\Phi(x)}$, $v(x) = \sqrt{1-x^2}\, P_n(x)$ tend vers $P_n(1) = 0$

et un calcul permet d'écrire :

$$\frac{v'(x)^2}{\Phi(x)} = (-x P_n + (1-x^2)P_n') \frac{(1-x^2)^{3/2}}{n(n+1)(1-x^2)+1} \longrightarrow 0 \quad (x \to 1)$$

* Du tableau de variation précédent, on déduit :

$$\forall x \in]-1,1[\qquad |w(x)| \leq w(0)$$

Comme $v(x)^2 \leq v(x^2) + \dfrac{v'(x)^2}{\Phi(x)} = w(x)$, on aura :

$$\forall x \in]-1,1[\qquad v(x)^2 \leq w(0)$$

Soit :

$$\boxed{(1-x^2)P_n^2(x) \leq w(0)} \qquad (*)$$

C'est cette inégalité qui entrainera (15).

$$w(0) = v(0)^2 + \frac{v'(0)^2}{\Phi(0)}$$

On a $v(0) = P_n(0)$; $v'(x) = \frac{-x P_n}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2}\, P_n'$ donc $v'(0) = P_n'(0)$

donc :

$$w(0) = P_n(0)^2 + \frac{P_n'(0)^2}{n(n+1)+1}$$

1er cas : Si n est impair, P_n est impaire donc $P_n(0) = 0$.
Posons $n = 2p+1$. (IV.3) permet d'écrire :

$$|P'_{2p+1}(0)| \leq 2\sqrt{\frac{p+1}{\pi}}$$

donc $w(0) = \frac{P_n'(0)^2}{n^2+n+1} \leq 4 \cdot \frac{p+1}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2+n+1}$

$$w(0) \leq \frac{2(n-3)}{\pi(n^2+n+1)}$$

$$w(0) \leq \frac{2}{\pi n} \qquad \left(\text{car } \frac{n-3}{n^2+n+1} \leq \frac{1}{n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.\right)$$

(*) entraine maintenant :

$$|P_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi n(1-x^2)}} \qquad (15)$$

2e cas : Si n est pair, P_n' est impaire donc $P_n'(0) = 0$ et

$$w(0) = P_n(0)^2$$

C'est (IV.2) qui implique : $|P_n(0)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi \frac{n}{2}}}$

d'où, compte tenu d' (*) :

$$(1-x^2)\, P_n^2(x) \leq \frac{2}{\pi n} \implies |P_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi n(1-x^2)}} \qquad (15)$$

CQFD

IV.5

$$S \doteq (x-y)\sum_{k=0}^{n}(2k+1)P_k(x)P_k(y) = \sum(2k+1)\left[x P_k(x)P_k(y) - P_k(x).\, y P_k(y)\right]$$

D'après (14), on a :

$$x P_k(x) = \frac{1}{2k+1}\left((k+1)P_{k+1}(x) + k P_{k-1}(x)\right)$$

donc :

$$S = \sum_{k=0}^{n}\left((k+1)P_{k+1}(x) + k P_{k-1}(x)\right).P_k(y) - \left((k+1)P_{k+1}(y) + k P_{k-1}(y)\right).P_k(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\underbrace{(k+1)}_{\doteq k'}\left[P_{k+1}(x)P_k(y) - P_k(x)P_{k+1}(y)\right] + \sum_{k=0}^{n} k\left[P_{k-1}(x)P_k(y) - P_k(x)P_{k-1}(y)\right]$$

$$= \sum_{k'=0}^{n} k'\left[P_{k'}(x)P_{k'-1}(y) - P_{k'-1}(x)P_{k'}(y)\right] + \sum_{k=0}^{n} k\left[P_{k-1}(x)P_k(y) - P_k(x)P_{k-1}(y)\right]$$

$$= (n+1)\left(P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)\right)$$

d'où (16).

IV.6.a

$$S_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\,\tilde{P}_k(x)$$

où $\begin{cases} \tilde{P}_k \doteq \sqrt{\frac{2k+1}{2}}\; P_k \\ c_k(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\,\tilde{P}_n(t)\,dt \end{cases}$

de sorte que :

$$S_n f(x) = \int_{-1}^{1} f(t)\sum_{k=0}^{n}\tilde{P}_k(t)\tilde{P}_k(x)\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1} f(t)\,\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(2k+1)P_k(t)P_k(x)\,dt \doteq \int_{-1}^{1} K_n(x,t)\,f(t)\,dt$$

IV.6.b

* Pour $f(x) = 1 = P_0(x)$, on a :

$$\int_{-1}^{1} K_n(x,t)\,dt = S_n(1)(x)$$

et $S_n(1)(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(1)\tilde{P}_k(x)$ avec $c_k(1) = \int_{-1}^{1} \tilde{P}_k(t)\,dt = (\tilde{P}_k, P_0) = 0$

dès que $k>0$, les $\tilde{P}_k$ étant 2 à 2 orthogonaux.

Ainsi : $$S_n(1)(x) = c_0(1)\,\tilde{P}_0(x)$$

avec $$\begin{cases} c_0(1) = \int_{-1}^{1} \tilde{P}_0(t)\,dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot 1\cdot dt = \sqrt{2} \\ \tilde{P}_0(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}\,P_0(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

d'où : $$S_n(1)(x) = 1 \quad \text{et} \quad \boxed{\int_{-1}^{1} K_n(x,t)\,dt = 1}$$

* Immédiatement :

$$S_nf(x) - f(x) = \int_{-1}^{1} K_n(x,y)f(y)\,dy - f(x)\int_{-1}^{1} K_n(x,y)\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1} K_n(x,y)\,(f(y)-f(x))\,dy$$

IV.6.c

Fixons $x \in]-1,1[$, et $\varepsilon > 0$ petit.

Posons :

$$\begin{cases} f(y) - f(x) = \theta(y)\,(x-y) & \text{si } y \notin]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\\ \theta(y) = K & \text{si } y \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\end{cases}$$

Alors $\theta \in \mathcal{E}(I)$ et l'on peut écrire :

$$S_n f(x) - f(x) = \int_{-1}^{1} K_n(x,y)\,(f(y)-f(x))\,dy$$

$$= \underbrace{\int_{-1}^{1} K_n(x,y)\,\theta(y)\,(x-y)\,dy}_{I_1} + \underbrace{\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} K_n(x,y)\,(f(y)-f(x)-\theta(y)(x-y))\,dy}_{I_2}$$

* Majoration de I_2 :

Comme $|f(y)-f(x)-\theta(y)(x-y)| \leq 2K\,|x-y|$, on aura :

$$|I_2| \leq \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} 2K \,.\, K_n(x,y)\,|x-y|\,dy$$

$$\leq 2K \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{n+1}{2}\,|P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)|\,dy$$

Mais $|P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)| \leq 2 \,.\, \sup_{x\in]-1,1[} |P_{n+1}(x)| \,.\, \sup_{x\in]-1,1[} |P_n(x)|$

$$\leq 2\sqrt{\frac{2}{\pi(n+1)(1-x^2)}}\,.\,\sqrt{\frac{2}{\pi n(1-x^2)}} \quad \text{(cf IV.4.b)}$$

$$\leq \frac{4}{\pi(1-x^2)\sqrt{n(n+1)}} \leq \frac{4}{\pi n(1-x^2)}$$

de sorte que :

$$|I_2| \leq K(n+1)\,.\,\frac{4}{\pi n(1-x^2)}\,.\,2\varepsilon$$

$$\leq \frac{n+1}{n}\,.\,\frac{8K}{\pi(1-x^2)}\,.\,\varepsilon$$

$$\leq \frac{16K}{\pi(1-x^2)}\,\varepsilon \qquad \text{pour } n \geq 1$$

Cette inégalité montre que $|I_2|$ peut être rendu aussi petit que l'on désire : il suffit d'agir sur ε. Ainsi, si $\varepsilon' > 0$ est donné, il existe ε tel que $|I_2| \leq \frac{\varepsilon'}{2}$. Pour ce choix de ε, nous allons montrer que $|I_1| \leq \frac{\varepsilon'}{2}$ pour un n suffisamment grand, ce qui prouvera que $\lim_{n\to+\infty} (S_n f(x) - f(x)) = 0$.

* Majoration de I_1 :

$$I_1 = \int_{-1}^{1} K_n(x,y)\,\theta(y)\,(x-y)\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{n+1}{2}\left(P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)\right)\theta(y)\,dy$$

$$= \frac{n+1}{2}\left[P_{n+1}(x)\int_{-1}^{1} P_n(y)\theta(y)\,dy - P_n(x)\int_{-1}^{1} P_{n+1}(y)\theta(y)\,dy\right]$$

Mais l'on sait (II.4.c) que $\lim_{n\to+\infty} c_n(f)=0$ dès que $f\in E(I)$, où $c_n(f) \doteq \int_{-1}^{1} f\tilde{P}_n$. Appliquons ce précieux résultat à θ ici :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(y)\theta(y)\,dy = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}\int_{-1}^{1}\tilde{P}_n(y)\theta(y)\,dy = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}\;c_n(\theta) \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} P_{n+1}(y)\theta(y)\,dy = \sqrt{\frac{2}{2n+3}}\cdot c_{n+1}(\theta) \\ \displaystyle |P_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi n(1-x^2)}} \quad \text{d'après (15)} \end{cases}$$

Ainsi :

$$|I_1| \leq \frac{n+1}{2}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi(n+1)(1-x^2)}}\sqrt{\frac{2}{2n+1}}\,|c_n(\theta)| + \sqrt{\frac{2}{\pi n(1-x^2)}}\sqrt{\frac{2}{2n+3}}\,|c_{n+1}(\theta)|\right]$$

$$\leq \frac{2}{\sqrt{\pi(1-x^2)}}\left[\frac{n+1}{\sqrt{(n+1)(2n+1)}}\,|c_n(\theta)| + \frac{n+1}{\sqrt{n(2n+3)}}\,|c_{n+1}(\theta)|\right]$$

$$\leq \frac{2}{\sqrt{\pi(1-x^2)}}\left[|c_n(\theta)| + \frac{n+1}{n}\,|c_{n+1}(\theta)|\right]$$

$$\leq \frac{2}{\sqrt{\pi(1-x^2)}}\left[|c_n(\theta)| + 2\,|c_{n+1}(\theta)|\right] \quad \text{pour } n\geq 1.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} c_n(\theta)=0$, on aura $|I_1| \leq \frac{\varepsilon'}{2}$ pour n suffisamment grand. CQFD

V.1

* D'après I.7, $|P_n(x)| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, donc :

$$\forall x \in I \qquad |\tilde{P}_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2n+1}{2}}$$

$$|c_n \tilde{P}_n(x)| \leq |c_n| \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \leq |c_n| n \qquad \text{si } n \geq 2$$

Cette inégalité, allié au fait que $\sum n c_n$ est absolument convergente, prouve que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \tilde{P}_n(x)$ converge normalement sur I vers une fct continue (puisque chaque fonction $c_n \tilde{P}_n(x)$ est continue).

* On montre la propriété :

$$(H_k) : \quad f \text{ est } C^k \text{ et } f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \tilde{P}_n^{(k)}(x)$$

par récurrence sur k.

(H_0) a déjà été prouvé ci-dessus. Supposons (H_k) vraie, et montrons (H_{k+1}) :

$\sum c_n \tilde{P}_n^{(k+1)}(x)$ <u>converge normalement</u> car, en posant $\|P\|_\infty = \sup_{x \in I} P(x)$, (13) s'écrit $\|P'\|_\infty \leq C_2 n^4 \|P\|_\infty$, et montre que (par récurrence) :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \exists C \quad \|P^k\|_\infty \leq C\, n^{4k} \|P\|_\infty$$

donc :

$$\|\tilde{P}_n^{(k+1)}\|_\infty \leq \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot C \cdot n^{4k} \underbrace{\|P_n\|_\infty}_{\leq 1 \text{ (cf I.7)}}$$

$$\leq C\, n^{4k+1} \qquad (\text{si } n \geq 2)$$

d'où $\quad |c_n \tilde{P}_n^{(k+1)}(x)| \leq |c_n|\, C n^{4k+1}$ pour tout $x \in I$,

et la convergence de $\sum |c_n| n^{4k+1}$ assure bien celle, normale, de $\sum c_n \tilde{P}_n^{(k+1)}(x)$.

Comme $\sum c_n \tilde{P}_n^{(k+1)}(x)$ converge normalement, et donc uniformément sur I, et comme $f^{(k)}(x) = \sum c_n \tilde{P}_n^{(k)}(x)$ converge sur I, on déduit que $f^{(k)}$ est dérivable sur I et que :

$$f^{(k+1)}(x) = \sum c_n \tilde{P}_n^{(k+1)}(x)$$

La limite uniforme d'applications continues étant continue, $f^{(k+1)}$ sera continue sur I, et f sera de classe C^{k+1}.

(H_{k+1}) est bien démontré.

Ccl : $f \in C^\infty(I)$

V.2.a

* Intégrons 2 fois par parties :

$$c_n(\mathcal{L}f) \doteq (\mathcal{L}f \mid \tilde{P}_n) = \int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left((x^2-1) f'(x)\right) \tilde{P}_n(x)\, dx$$

$$= -\int_{-1}^{1} (x^2-1) f'(x) \cdot \tilde{P}_n'(x)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x) \frac{d}{dx}\left((x^2-1) \tilde{P}_n'(x)\right) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x)\, \mathcal{L}\tilde{P}_n(x)\, dx$$

$$= n(n+1) \int_{-1}^{1} f \cdot \tilde{P}_n \qquad \left(\text{puisque } \mathcal{L}\tilde{P}_n = n(n+1)\tilde{P}_n\right)$$

$$c(\mathcal{L}f) = n(n+1)\, c_n(f)$$

En itérant :

$$c_n(\mathcal{L}^p f) = (n(n+1))^p \; c_n(f) \qquad \forall p \in \mathbb{N}$$

* Montrer que $(c_n(f))$ est du type (S) revient à prouver que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \sum_{n \geq 0} n^k c_n(f)$$

converge absolument.

Exprimons :

$$|n^k c_n(f)| = n^k \left| \frac{c_n(\mathcal{L}^p f)}{n^p (n+1)^p} \right|$$

Comme $\mathcal{L}^p f \in C^\infty(I) \subset \mathcal{E}(I)$, II.4 s'applique et :

$$\exists N \qquad n \geq N \Rightarrow |c_n(\mathcal{L}^p(f))| \leq 1$$

Ainsi :
$$|n^k c_n(f)| \leq \frac{n^k}{n^p (n+1)^p}$$

et rien ne nous empêche d'avoir choisi $2p - k \geq 2$, ie $p \geq \frac{k+2}{2}$, pour assurer la convergence de $\sum \frac{n^k}{n^p (n+1)^p}$, et par conséquent celle de $\sum |n^k c_n(f)|$.

CQFD

* $\sum_{n \geq 0} c_n(f)\, \tilde{e}_n$ est normalement convergente d'après V.1, et converge simplement vers f d'après III.6.c, donc converge uniformément sur I vers f.

V.2.b

$\mathcal{A} : C^\infty \to C^\infty$ est linéaire.

* On sait, d'après V.1, que : "Si $f = \sum c_n \tilde{P}_n$ avec (c_n) du type (S), alors $f \in C^\infty(I)$ et $f^{(p)} = \sum c_n \tilde{P}_n^{(p)}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$". On utilisera ce résultat sous la forme :

"Si $f = \sum c_n \tilde{P}_n$, alors $\mathcal{L}f = \sum c_n \mathcal{L}\tilde{P}_n = \sum c_n\, n(n+1)\tilde{P}_n$".

* Montrons que $\mathcal{A}$ est bijective.

Soit $g \in C^\infty(I)$, il s'agit de chercher les $f \in C^\infty(I)$ vérifiant :

$$\mathcal{L}f + f = g \qquad (*)$$

D'après V.2.a :

$$f = \sum_{n \geq 0} c_n(f)\,\tilde{P}_n \qquad g = \sum_{n \geq 0} c_n(g)\,\tilde{P}_n$$

et (*) devient, compte tenu de la remarque précédente :

$$\sum_{n \geq 0} c_n(f)\,(n^2+n+1)\,\tilde{P}_n = \sum_{n \geq 0} c_n(g)\,\tilde{P}_n$$

Multiplions les 2 membres par $\tilde{P}_m$ et intégrons entre -1 et $+1$, ce qui est licite puisque ces 2 séries convergent uniformément. On obtient :

$$c_m(f)\,(m^2+m+1) = c_m(g)$$

$$c_m(f) = \frac{c_m(g)}{m^2+m+1}$$

D'où l'existence et l'unicité de f tel que $\mathcal{A}f = g$.

CQFD

V.2.c

* Soit $\varepsilon > 0$. La convergence de $\sum c_n(f)\tilde{P}_n$ vers f étant uniforme, il existe N_0 tel que, pour tout $N \geq N_0$, on ait :

$$\forall x \in I \qquad \left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} c_n(f)\tilde{P}_n(x) \right| \leq \varepsilon$$

D'où :

$$\left\| f - \sum_{n=0}^{N} c_n(f)\tilde{P}_n \right\| = \left(\int_{-1}^{1} \left(f(x) - \sum_{n=0}^{N} c_n(f)\tilde{P}_n(x) \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \varepsilon\sqrt{2}$$

d'où $$\lim_{N\to+\infty} \left\| f - \sum_{n=0}^{N} c_n(f)\tilde{P}_n \right\| = 0$$

NB : Si $f \in C^\infty(I)$, la convergence uniforme de la série de Fourier-Legendre établie au V.2-a entraine ici la convergence de cette série en moyenne quadratique.

* Écrivons :

$$f = \sum_{n=0}^{N} c_n(f)\tilde{P}_n + h \qquad \text{avec } \sum_{n>N} c_n(f)\tilde{P}_n = h$$

Comme $\sum c_n(f)\tilde{P}_n$ converge vers f en moyenne quadratique, et si $\varepsilon > 0$ est fixé à l'avance, on peut trouver N_0 tel que $N \geq N_0$ entraine $\|h\| \leq \varepsilon$. Alors :

$$\|f\|^2 = \left(\sum_{0}^{N} c_n(f)\tilde{P}_n + h \,\middle|\, \sum_{n=0}^{N} c_n(f)\tilde{P}_n + h \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{N} (c_n(f))^2 + \underbrace{2\left(h \,\middle|\, \sum_{n=0}^{N} c_n(f)\tilde{P}_n \right)} + \underbrace{\|h\|^2}_{\leq \varepsilon^2}$$

$$\leq 2 \underbrace{\|h\|}_{\leq \varepsilon} \underbrace{\left\| \sum_{n=0}^{N} c_n(f)\tilde{P}_n \right\|}$$

(en valeur absolue) — tend vers $\|f\|$, donc est borné.

Par suite :

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N_0 \quad N \geq N_0 \Rightarrow \left| \|f\|^2 - \sum_{n=0}^{N} (c_n(f))^2 \right| \leq \varepsilon'$$

ie
$$\boxed{\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f)^2}.$$

2° solution :

> **Lemme** : La forme bilinéaire $C^\infty(I) \times C^\infty(I) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$
> $(f, g) \longmapsto (f|g)$
> est continue.

preuve : Cauchy-Schwartz s'énonce :

$$|(f|g)| \leq \|f\| \, \|g\|$$

et assure la continuité de cette forme bilinéaire. CQFD

(exercice : les montrer. Solution : $(f|g) - (f_0|g_0) = (f|g-g_0) + (f-f_0|g_0)$ entraîne $|(f|g) - (f_0|g_0)| \leq \|f\| \, \|g-g_0\| + \|f-f_0\| \, \|g_0\|$.

Prenons $\|f-f_0\| < \eta$ et $\|g-g_0\| < \eta$. Alors $\|f\| \leq \|f_0\| + \eta$ et

$$|(f|g) - (f_0|g_0)| \leq (\|f_0\| + \eta)\eta + \eta \|g_0\|$$

Le second membre tend vers 0 quand $\eta \to 0$. Donc si $\varepsilon > 0$ est fixé, il existe η tq ce second membre soit $\leq \varepsilon$, et $|(f|g) - (f_0|g_0)| \leq \varepsilon$ CQFD)

Retournons au problème :

$$\|f\|^2 = (f|f) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(f)\tilde{P}_n \,\Big|\, f\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f)(\tilde{P}_n | f)$$

(d'après la continuité de φ). Puis :

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n(f))^2$$ en développant encore f. CQFD

V.3 Soit f K-lipschitzienne sur I. Il faut prouver que :

$$f \in C^{\infty}(I) \iff d_n(f) \text{ de type } (S)$$

($\Rightarrow$) $\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f)^2$ entraîne $d_n(f)^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} (c_k(f))^2 = \sum_{k>n} c_k(f)^2$

Il faut prouver que $\sum n^p d_n(f)$ converge absolument pour tout $p \in \mathbb{N}$.

$$|n^p d_n(f)| \leq n^p \sqrt{\sum_{k>n} c_k(f)^2}$$

On sait que $(c_k(f))$ est du type (S), donc $\sum n^t |c_k(f)|$ converge, et il existe $C>0$ tq

$$\forall k \quad n^t |c_k(f)| \leq C$$

d'où $\displaystyle\sum_{k>n} c_k(f)^2 \leq \sum_{k>n} \frac{C^2}{n^{2t}} \leq C^2 \int_n^{\infty} \frac{1}{x^{2t}}\,dx = \frac{C^2}{(2t-1)\,n^{2t-1}}$

On obtient :

$$|n^p d_n(f)| \leq n^p \frac{C}{\sqrt{2t-1}\; n^{t-\frac{1}{2}}}$$

Il suffit de choisir t tel que $t - \frac{1}{2} - p > 1$, ie $t > p + \frac{3}{2}$, pour être assuré de la convergence de $\sum |n^p d_n(f)|$, et avoir $(d_n(f))$ du type (S).

(⇐) Réc., si $(d_n(f))$ est du type (S) :

$$\begin{cases} d_n(f)^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k(f)^2 \\ d_{n-1}(f)^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f)^2 \end{cases}$$

$$d_{n-1}(f)^2 - d_n(f)^2 = c_n(f)^2$$

d'où $\quad c_n(f) \leq d_{n-1}(f)$

$(c_n(f))$ sera donc du type (S). I.1 montre que $\sum c_k(f)\tilde{P}_k$ tend uniformément vers une fonction F de classe C^∞. Mais, d'après IV.6.c, $F = f$.

CQFD

IUFM Antilles-Guyane
PLC 1 - Mathématique
Analyse

CAPES 89 Première épreuve
- CORRIGE -

SOLUTION DE ANTOINE DELCROIX SUR MEGAMATHS

I - Opérateurs et polynômes de Legendre.

A I.1/I.2. - la matrice L_n que l'on obtient est triangulaire : ses valeurs propres sont les termes diagonaux, tous distincts ; L_n est donc diagonalisable. Retenons que le spectre de L_n est $\{ k(k+1),\ 0 \le k \le n \}$.

B - I.3. - L'argument est le suivant : si $f\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est suffisamment dérivable (par exemple de classe C^∞) on a :
1) si f est paire, f' est impaire 2) si f est impaire f' est paire.
Il en résulte que si f est paire, de classe C^∞ ses dérivées d'ordre pair sont paires, ses dérivées d'ordre impair, impaires

B - I.4. - Par définition : $\forall x \in \mathbb{R}\quad P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$
la formule de Leibniz (dérivée $n^{ième}$ d'un produit donne :
$\forall x \in \mathbb{R}\quad P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \dfrac{d^k}{dx^k}(x-1)^n \dfrac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x+1)^n$
car $x = 1$ seul le terme où $x-1$ a été dérivé n fois apporte une contribution $P_n(1) = \dfrac{1}{2^n n!}\, n!\,(x+1)^n\Big|_{x=1} = 1$.

B - I.5. - $P_1(X) = X \qquad P_2(X) = \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}$.

B I.6. a) résulte des définitions - b) Ici encore on doit calculer des dérivées $n^{ième}$: le faire par la règle de Leibniz
Retenons deux relations (4) $\mathcal{L}(P_n) = (n+1)\,n\,P_n$, pr $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(*)\ (x^2-1)P''_n(x) + 2x P'_n(x) - n(n+1)P_n(x) = 0$$

c) D'après B.I.6.b. pour tout $n \in \mathbb{N}$ P_n est un vecteur propre de $\mathcal{L}$ pour la valeur propre $n(n+1)$.

I

II

remarque : $\mathcal{P}$ n'étant pas de dimension finie, il ne faut pas s'étonner de trouver une infinité de valeurs propres.

On montre alors que $\mathcal{P}$ n'a pas d'autre valeur propre que la famille $(n(n+1))_{n \in \mathbb{N}}$. Soit λ une valeur propre de $\mathcal{L}$ et P_λ un polynôme, vecteur propre associé à λ, non nul. Il existe n tel que $P_\lambda \in \mathcal{P}_n$, et donc P est un vecteur propre de $\mathcal{L}_n$ (puisque $\mathcal{L}$ induit un endomorphisme sur $\mathcal{P}_n$). Comme les valeurs propres de $\mathcal{L}_n$ sont les $(k(k+1))_{0 \le k \le n}$, il existe $k \le n$ tel que $\lambda = k(k+1)$. De plus l'espace propre associé à $k(k+1)$ est de dimension 1, donc P et P_k sont colinéaires : les seules valeurs propres de $\mathcal{L}$ sont donc les $n(n+1)$ et les espaces propres associés les $\mathbb{R}P_n$,

B.I.7. - On a : $n(n+1)\,u(x) = n(n+1)(P_n(x))^2 + (1-x^2)(P'_n(x))^2$
•) la fonction u est clairement dérivable et on a :
$n(n+1)\,u'(x) = \big(2n(n+1)P_n(x) + 2(1-x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x)\big)P'_n(x)$.
la relation (*) donne : $n(n+1)P_n(x) + (1-x^2)P''_n(x) = 2xP'_n(x)$
D'où $\quad n(n+1)\,u'(x) = 2x\,(P'_n(x))^2$.
•) la fonction $x \to u(x)$ a une dérivée positive sur $[0,1]$. La fonction u est donc croissante et l'on a : $\forall x \in [0,1]\ u(x) \le u(1)$.
Or $u(1) = (P_n(1))^2$, selon B.I.4. d'où $u(x) \le 1$. Puis sur $[0,1]$: $(P_n(x))^2 \le 1$. Comme $x \to (P_n(x))^2$ est paire (cf B.I.3.) il vient $\forall x \in [-1,1]\quad (P_n(x))^2 \le 1$ ce qui entraîne le résultat.

B.I.8. P_n est exactement de degré n comme dérivée $n^{ième}$ d'un polynôme de degré $2n$.

Remarque (générale) Toute famille $(Q_i)_{0 \le i \le n}$ de polynômes tels que $d^\circ Q_i = i$ $(0 \le i \le n)$ est une base

de $\mathcal{P}_n$. En effet la matrice donnant les coordonnées des $(Q_i)_{0\le i\le n}$ en fonction de celles des $(X^i)_{0\le i\le n}$ est triangulaire avec les termes diagonaux <u>non nuls</u>.

Donc les $(P_i)_{0\le i\le n}$ forme ici une base de $\mathcal{P}_n$. Un autre argument consiste à remarquer que $\mathcal{P}_n$ s'écrit comme somme directe des espaces propres de $\mathcal{L}_n$ (qui est diagonalisable). D'où $\mathcal{P}_n = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathbb{R} P_k$.

le coefficient a_n de X^n dans P_n vient du terme en X^{2n} de U_n or : $\frac{d^n}{dx^n} X^{2n} = 2n(2n-1)\dots(n+1)X^n = \frac{(2n)!}{n!} X^n$.

D'où $a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$

<u>remarque</u> : $a_{n+1}/a_n = (2n+1)/(n+1)$.

II Distance d'une fonction de $\mathcal{E}(I)$ à l'espace $\mathcal{P}_n$.

<u>II.1.</u> Une intégration par parties donne :

$(-\mathcal{L}(P_n) | P_m) = ((1-x^2) | P'_n P'_m)$ expression symétrique en n et m. le produit scalaire (1) étant symétrique car à valeurs réelles, il en résulte : $(\mathcal{L} P_n | P_m) = (\mathcal{L} P_m | P_n) = (P_n | \mathcal{L} P_m)$

D'après la relation (4), il vient : $(n(n+1)(P_n | P_m) = m(m+1)(P_n | P_m)$

la fonction $\begin{pmatrix} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ p \mapsto p(p+1) \end{pmatrix}$ étant injective, car strictement croissante, on a pour $n \neq m$ $(P_n | P_m) = 0$.

<u>II.2.a.</u> — le polynôme P'_{n+1} appartient à $\mathcal{P}_n$: il s'écrit donc : $P'_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k$. Alors :

$\int_{-1}^{1} P'_{n+1}(t) P_n(t)\, dt = (P'_{n+1} | P_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k \,\middle|\, P_n\right) = \alpha_n (P_n | P_n) = \alpha_n \|P_n\|^2$

<u>Remarque</u> : on a donc utilisé le fait suivant : P_n est orthogonal à tout polynôme de degré $k < n$. (conséquence de II.1)

Comme $d^\circ P'_{n+1} = d^\circ P_n = n$ et que : $\forall k<n \ d^\circ P_k < n$, le coefficient α_n est donné par la relation entre les coefficients de degré n de P'_{n+1} et P_n. D'où : $(n+1)\, a_{n+1} = \alpha_n a_n$.

On obtient bien : $\int_{-1}^{1} P'_{n+1}(x) P_n(x)\, dx = (n+1)(a_{n+1}/a_n)\|P_n\|^2$.

<u>II.2.b.</u> — Par intégration par parties. Il convient de remarquer que comme $P_n(1) = 1$ et que $x \to P_n(x)$ est soit paire soit impaire $x \to (P_n(x))^2$ est paire et donc $(P_n(-1))^2 = 1$.

<u>II.2.c.</u> — le plus simple consiste à écrire les diverses relations en termes de produits scalaires. (6) donne : $\|P_n\|^2 = 2 - (x P'_n | P_n)$.

la relation (3) $(x P'_n(x) = P'_{n+1}(x) - (n+1) P_n(x))$ entraîne :

$\|P_n\|^2 = 2 - 2(P'_{n+1} - (n+1) P_n | P_n) = 2 - 2(P'_{n+1} | P_n) + 2(n+1)\|P_n\|^2$.

Alors, la relation (5) donne : $(P'_{n+1} | P_n) = (n+1) \frac{a_{n+1}}{a_n} \|P_n\|^2$. Comme $a_{n+1}/a_n = (2n+1)/(n+1)$ il vient : $\|P_n\|^2 = 2 - 2n\|P_n\|^2$. D'où l'on tire le résultat voulu.

<u>II.2.d.</u> — la famille $(\tilde{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale comme famille normalisée de la famille orthogonale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

II.3. — On a d'abord pour $\tilde{P}_n$: $\mathcal{L}_n(\tilde{P}_n) = n(n+1)\tilde{P}_n$ d'où : $\|\mathcal{L}_n(\tilde{P}_n)\| = n(n+1)$. La norme de $\mathcal{L}_n$ vérifie donc : $\|\mathcal{L}_n\| \geq n(n+1)$.

Soit maintenant $P \in \mathcal{P}_n$. Il existe des nombres $(\alpha_k)_{0\le k\le n}$ tels que : $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \tilde{P}_k$. Comme la famille $(\tilde{P}_k)_{0\le k\le n}$ est <u>orthonormale</u>, on a : $\|P\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2 = 1$.

Comme $\mathcal{L}_n P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathcal{L}_n P_k = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k k(k+1)\tilde{P}_k$, il vient :

$\|\mathcal{L}_n P\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2 k(k+1)^2 \leq (n(n+1))^2 \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2 = (n(n+1))^2$

D'où $\|\mathcal{L}_n(P)\| \leq n(n+1)$. Et $\sup_{P\in\mathcal{P}_n} \|\mathcal{L}_n(P)\| \leq n(n+1)$. D'où l'égalité $\|\mathcal{L}_n\| = n(n+1)$.

<u>II.4.a.</u> — On développe l'expression $\|f - P\|^2 = (f - P | f - P)$ en remplaçant P par $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \tilde{P}_k$ et en utilisant l'orthogonalité de la famille $(\tilde{P}_k)_{0\le k\le n}$.

V

II.4.b. — Dans l'égalité de II.4.a. seul le dernier terme dépend de P. Il est positif comme somme de carrés et nul ssi : $\forall k \in \{0,1,\dots n\}$ $\lambda_k = c_k(f)$. Le polynôme Q défini par : $Q(x) = \sum c_k(f)\, \tilde{P}_k$ vérifie donc $d_n(f) = \|f - Q\|$, et pour tout $P \in \mathcal{P}_n \setminus \{Q\}$ on a : $\|f - P\| > \|f - Q\|$. Les assertions du texte sont donc vérifiées.

II.4.c. — De l'égalité du II.4.b. donnant $(d_n(f))^2$ $\left(d_n(f)^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} (c_k(f))^2 \right)$, on déduit : $\sum_{k=0}^{n} (c_k(f))^2 \leq \|f\|^2$

la série, à termes positifs, $\sum (c_k(f))^2$ est donc convergente (sommes partielles majorées). Il en résulte en particulier que son terme général $c_n(f)$ tend vers 0.

Remarque : On a donc : $\sum_{k=0}^{+\infty} (c_k(f))^2 \leq \|f\|^2$. Il s'agit d'une inégalité de Bessel.

III INEGALITES de MARKOV

III.1.a. On obtient : $\forall x \in]-1,1[\; \theta'(x) = 1/(1-x^2)^2$.

Remarque : θ' est positive sur $]-1,1[$.

III.1.b. • Montrons que la fonction $g : x \mapsto \theta'(x)(F(x))^2$ se prolonge par continuité en -1 à droite ; comme F est de classe C^1 sur $[-1,1]$ et vérifie $F(-1) = 0$, il existe une fonction h continue sur I telle que $\forall x \in I$ $F(x) = (x+1)\,h(x)$ (on vérifie que $h(x) = \int_0^1 F'(-1 + t(x+1))\,dt$ par exemple à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral écrite à l'ordre 0). On a donc, sur $I \setminus \{1\}$, $g(x) = (1/(1-x)^2)(h(x))^2$; d'où $\lim_{x \to -1^+} g(x) = (1/4) \lim_{x \to -1^+} h(x)$ (qui existe puisque h est continue sur I)

• Un raisonnement analogue montre que g se prolonge par continuité en 1 à gauche.

VI

L'intégrale $\int_{-1}^{+1} \theta'(x)\,(F(x))^2\,dx$ a donc un sens et pour tout $(a,b) \in]-1,1[$ on a l'égalité :

$$\int_a^b \theta'(x)\,(F(x))^2\,dx = \left[\theta(x)(F(x))^2\right]_a^b - 2\int_a^b \theta(x)\,F(x)\,F'(x)\,dx.$$

On constate alors que la fonction $x \mapsto \theta(x)\,F(x)$ a une limite pour a tendant vers -1 (resp. pour b tendant vers 1). En effet en écrivant comme ci-dessus $F(x) = (x+1)\,h(x)$, on constate que $\theta(x)\,F(x) = 2x/(1-x) + (1+x)\ln(1+x) - (1+x)\ln(1-x)$ pour $x \in I \setminus \{1\}$, expression qui tend vers une limite finie pour x tendant vers -1. (resp. un raisonnement analogue !). Comme $F(1) = F(-1) = 0$ on obtient finalement :

$$\int_{-1}^{1} \theta'(x)\,(F(x))^2\,dx = -2\int_{-1}^{1} \theta(x)\,F(x)\,F'(x)\,dx.$$

III.1.c. Remarquons d'abord que $\frac{\theta(x)}{\sqrt{\theta'(x)}} = \varphi(x)$ sur $]-1,1[$ et que la fonction φ se prolonge par continuité sur $[-1,1]$.

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $\frac{|\theta(x)|}{\sqrt{\theta'(x)}}|F'(x)|$ et à $\sqrt{\theta'(x)}\,|F(x)|$ (également prolongeable par continuité sur $[-1,1]$), il vient : $\left(\int_{-1}^{1} |\theta(x)\,F(x)\,F'(x)|\,dx\right)^2 \leq \int_{-1}^{1} |\varphi(x)(F'(x))|^2\,dx \int_{-1}^{1} \theta'(x)\,|F(x)|^2\,dx$

III.1.d. La question III.1.b. donne :

$$\left(\int_{-1}^{1} \frac{F(x)^2}{(1-x^2)^2}\,dx\right)^2 = 4\left(\int_{-1}^{1} \theta(x)\,F(x)\,F'(x)\,dx\right)^2 \leq 4\left(\int_{-1}^{1} |\theta(x)\,F(x)\,F'(x)|\,dx\right)^2$$

le III.1.c. conduit à :

$$\left(\int_{-1}^{1} \frac{(F(x))^2}{(1-x^2)^2}\,dx\right)^2 \leq 4 \int_{-1}^{1} |\varphi(x)\,F'(x)|^2\,dx \cdot \int_{-1}^{1} \frac{F(x)^2}{(1-x^2)^2}\,dx \quad (**)$$

Si l'intégrale $\int_{-1}^{1} (F(x))^2/(1-x^2)^2\,dx$ est nulle l'inégalité (7) est vraie. Si l'intégrale $\int_{-1}^{1} (F(x))^2/(1-x^2)^2\,dx$ est non nulle (donc strictement positive), on obtient (7) en simplifiant (**).

III.2.a. — Par définition : $\mathcal{L}(f)(x) = \frac{d}{dx}\left((x^2-1)\; f'(x)\right)$.

On obtient donc : $\forall x \in I$ $(x^2-1)\,f'(x) = \int_{-1}^{x} \mathcal{L} f(t)\,dt$.

III.2.b. – Il s'agit d'appliquer le III.1. à la fonction F définie sur I par l'égalité $F(x) = (x^2-1)f'(x) = \int_{-1}^{x} \mathcal{L} f(t)\,dt$ dont on vérifie qu'elle est de classe C^1 (le faire !) et que $F(1) = F(-1) = 0$. On obtient en remplaçant dans (7) :

$$\int_{-1}^{1} (f'(x))^2\,dx \leq 4\int_{-1}^{1} |\varphi(x)|^2 |F'(x)|^2\,dx$$

Comme $F'(x) = \mathcal{L}(F)$ (par définition), il vient :

$$\int_{-1}^{1} (f'(x))^2 dx \leq 4 \int_{-1}^{1} |\varphi(x)|^2 (\mathcal{L}(F)(x))^2 dx$$

la fonction $x \to \varphi(x)$ se prolonge par continuité sur I (III.1.c.) elle est bornée sur I : soit M un tel majorant. On obtient

$$\| f' \|^2 \leq 4M \, \| \mathcal{L}(F) \|^2 .$$

D'où le résultat avec $C = 2\sqrt{M}$.

III.3.a. – la fonction, de classe C^1 sur I, $g^2\ t \to (g(t))^2$ a pour dérivée : $t \to 2\,g(t)g'(t)$. D'où : $g(x)^2 - (g(y))^2 = 2\int_{y}^{x} g(t)\,g'(t)\,dt$, pour tout couple $(x,y) \in I^2$. On a la suite d'inégalités :

$$\int_{y}^{x} g(t)\,g'(t)\,dt \leq \left|\int_{y}^{x} g(t)g'(t)\,dt\right| \leq \left|\int_{y}^{x} |g(t)g'(t)|\,dt\right| \leq \int_{-1}^{1} |g(t)\,g'(t)|\,dt \leq \|g\|\|g'\|$$

(la dernière étant l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

On a donc : $(g(x))^2 \leq (g(y))^2 + 2\|g\|\|g'\|$.

III.3.b. – En intégrant par rapport à y l'inégalité précédente, il vient :

$$2(g(x))^2 \leq \int_{-1}^{1} (g(y))^2 dy + 4\|g\|\|g'\| = \|g\|^2 + 4\|g\|\|g'\| \leq 2(\|g\| + \|g'\|)^2$$

D'où : $(g(x))^2 \leq \|g\| + \|g'\|$. Puis $\sup_{x\in I} |g(x)| \leq \|g\| + \|g'\|$.

III.4. – Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathcal{P}_n$, il vient, d'après III.2.b.(9) : $\|P'\| \leq C\|\mathcal{L}P\|$. On a alors : $\|\mathcal{L}P\| \leq \|\mathcal{L}\|\|P\| = n(n+1)\|P\|$, d'après le calcul du II.3. D'où : $\|P'\| \leq Cn(n+1)\|P\|$. Comme $n(n+1) \leq 2n^2$, il vient : $\|P'\| \leq 2Cn^2\|P\|$

On obtient donc (12) avec $C_1 = 2C$.

Pour l'inégalité (13), on utilise l'inégalité (11) du III.3.b. avec $g = P'$. Il vient : $\sup_{x\in I} |P'(x)| \leq \|P'\| + \|P''\|$

On applique alors (12) une fois pour P' et deux fois pour P'' ; il vient : $\sup_{x\in I} |P'(x)| \leq C_1 n^2 \|P\| + C_1^2 n^4 \|P\|$

Quitte à remplacer C_1 par un nombre supérieur à 1, il vient : $\sup_{x\in I} |P'(x)| \leq C_1^2 (n^2+n^4)\|P\|$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ $n^2 \leq n^4$, on obtient enfin : $\sup_{x\in I} |P'(x)| \leq 2C_1^2 n^4 \|P\|$

On pose : $C_2 = 2C_1^2$.

IX

IV Développement d'une fonction Lipschitzienne

IV.1.a. Le coefficient de x^{n+1} dans Q_n est : $(n+1)\,a_{n+1} - (2n+1)\,a_n$. Or $a_{n+1}/a_n = (2n+1)/(n+1)$ (cf I.2). Donc Q_n est de degré au plus n et appartient à $\mathcal{P}_n$.

IV.1.b. •) Du II.1. on déduit que pour n fixé P_n est orthogonal à P_m pour $1 \le m \le n-1$ et à tout polynôme de degré au plus $n-1$ (car $(P_j)_{1\le j\le n-1}$ constitue une base de $\mathcal{P}_{n-1}$). Comme $(XP_n \mid P_k) = (P_n \mid XP_k)$, il en résulte que XP_n est orthogonal à P_k pour tout k tel que $d°(XP_k) \le n-1$, c'est-à-dire pour $k \le n-2$.

•) Q_n se décompose dans la base $(P_n, P_{n-1}, \tilde{P}_{n-2}, \ldots, \tilde{P}_1)$ sous la forme $Q_n(X) = \lambda P_n(X) + \mu P_{n-1}(X) + \sum_{k=0}^{n-2} c_k \tilde{P}_k$, avec $c_k = (Q_n \mid \tilde{P}_k) = 0$, d'après le point précédent. D'où le résultat.

IV.1.c. Q_n a la parité de $n+1$ (regarder sa définition), ainsi que P_{n-1}, alors que P_n a la parité de n ; il en résulte que $\lambda = 0$ (substituer X à −X !). Ensuite $Q_n(1) = -n$ et $Q_n(1) = \mu$ puisque : $\forall k \in \mathbb{N}\ P_k(1) = 1$). En remplaçant Q_n par $-nP_{n-1}$ dans la définition du IV.1.a. on obtient (14).

IV.1.d. L'égalité (14) donne pour $n \ge 1$: $P_{n+1}(0) = \frac{-n}{n+1} P_{n-1}(0)$. Comme $P_0(X) = 1$ (cf I.B.) on obtient par récurrence :

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1.3. \ldots 2n-1}{2\ 4 \ldots 2n}$$

IV.2.a. •) C'est un calcul classique ; pour $n \ge 2$, on a :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} t\,(1-\cos^2 t)\,dt = I_{n-2} - \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} t \cos^2 t\,dt$$

Or en intégrant par parties $\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} t \cos^2 t\,dt$ on obtient :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} t \cos^2 t\,dt = \frac{1}{n-1}\left[\sin^{n-1} t \cos t\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{n-1}\int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt = \frac{1}{n-1} I_n$$

d'où : $I_n = I_{n-2} - \frac{1}{n-1} I_n$ et $n I_n = (n-1) I_{n-2}$.

•) la suite I_n est décroissante, car pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a : $0 \le \sin t \le 1$. et donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\sin^n t \le \sin^{n-1} t$.

X

IV.2.a. (Suite) On obtient en particulier : $\forall n \ge 1$ $I_{2n} \le I_{2n-1}$

IV.2.b. •) On obtient facilement $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$. De la relation de récurrence du IV.2.a. il vient :

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{1.3. \ldots 2n-1}{2\ 4 \ldots 2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \quad ; \quad I_{2n-1} = \frac{(2^{n-1}(n-1)!)^2}{(2(n-1))!}$$

•) On remarque que $|P_{2n}(0)| = \frac{2}{\pi} I_{2n}$ et que :

$I_{2n-1} = \frac{(\pi/2)}{2n I_{2n}}$. De l'inégalité $I_{2n} \le I_{2n-1}$ il vient alors

$|P_{2n}(0)| \le \frac{2}{\pi} I_{2n-1} = \frac{1}{2n I_{2n}} = \frac{1}{n\pi |P_{2n}(0)|}$. D'où :

$|P_{2n}(0)|^2 \le \frac{1}{n\pi}$ et le résultat final : $|P_{2n}(0)| \le \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$

IV.3. La relation (3) donne : $P'_{2n+1}(0) = (2n+1) P_{2n}(0)$. La relation (14) conduit alors à : $(2n+2) P_{2n+2}(0) + (2n+1) P_{2n}(0) = 0$. D'où : $P'_{2n+1}(0) = -2(n+1) P_{2n+2}(0)$. Il vient alors : $|P'_{2n+1}(0)| \le 2\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}$, en appliquant IV.2.b.

IV.4.a. La fonction $v(x)$ est clairement de classe C^2 sur $]-1,1[$. En dérivant $v(x)$ on obtient, après multiplication par $\sqrt{1-x^2}$: $v'(x)\sqrt{1-x^2} = -xP_n(x) + (1-x^2)P'_n(x)$.

En dérivant : $v''(x)\sqrt{1-x^2} - \frac{x\,v'(x)}{\sqrt{1-x^2}} = -P_n(x) + (1-x^2)P''_n(x) - 3xP'_n(x)$.

En tenant compte de la relation (4) (cf B 1 6 a, relation (*)), il vient :

$$v''(x)\sqrt{1-x^2} - \frac{x\,v'(x)}{\sqrt{1-x^2}} = -P_n(x) - n(n+1)P_n(x) - xP'_n(x)$$

On remplace alors $v'(x)$ par sa valeur pour obtenir enfin :

$$v''(x)\sqrt{1-x^2} + \left(\frac{1}{1-x^2} + n(n+1)\right) P_n(x) = 0$$

En rappelant que $P_n(x) = v(x)/\sqrt{1-x^2}$, on voit que $v(x)$ satisfait l'E.D. proposée.

IV.4.b. La fonction w est clairement dérivable, de dérivée $w'(x) = 2v(x)v'(x) + 2v'(x)v''(x)/\Phi(x) - (v'(x))^2\Phi'(x)/(\Phi(x))^2$.

Comme v est solution de $\frac{d^2v}{dx^2} + \Phi v = 0$, il vient $w'(x) = -\left(\frac{v'(x)}{\Phi(x)}\right)^2 \Phi'(x)$

On en déduit que w' est du signe de $-\Phi'(x)$.

XI

IV.4.b. (Suite)

1°) Méthode : on calcule ϕ' et on en étudie le signe (assez facilement).

2°) Méthode : la fonction $x \to \frac{1}{1-x^2}$ est paire et croissante sur $[0,1[$. Il en est de même de ϕ qui est produit de 2 fonctions de ce type. Donc ϕ' est positive sur $[0,1[$, négative sur $]-1,0]$.

Il en résulte que w est une fonction croissante sur $]-1,0]$ décroissante sur $[0,1[$. La fonction w est de surcroît paire, et prend son maximum en 0.

x	-1		0		1
w		↗		↘	

On a : pour $x \in]-1,1[$:

$$(1-x^2)(P_n(x))^2 = (v(x))^2 \leq w(x) \leq w(0).$$

Il reste à estimer $w(0)$. On remarque que $v(0) = P_n(0)$ et que $v'(0) = P'_n(0)$ (cf IV.4.a.). Pour n pair $P'_n(0)=0$ et : $w(0) = (P_n(0))^2 \leq \frac{2}{\pi n}$. Ce qui donne :

$$(P_n(x))^2 \leq \frac{2}{n\pi(1-x^2)}$$

Il reste à traiter le cas n impair. On a dans ce cas $v(0)=0$ et $v'(0) = |P'_n(0)| \leq 2\sqrt{\frac{n+1}{2\pi}}$ d'après IV.3.. D'où :

$$w(0) \leq \frac{4(n+1)}{\pi\,\phi(0)} = \frac{4(n+1)}{\pi 2(n(n+1)+1)} \leq \frac{2}{\pi n}.$$ On conclut comme dans le cas pair.

IV.5. De la relation (14) on tire pour $0 \leq k \leq n$:

$$(2k+1)\,x\,P_k(x) = (k+1)P_{k+1}(x) + k\,P_{k-1}(x) \quad (5.a.)$$

$$(2k+1)\,y\,P_k(y) = (k+1)P_{k+1}(y) + k\,P_{k-1}(y) \quad (5.b)$$

En multipliant (5.a) par $P_k(y)$, (5.b) par $P_k(x)$ et en faisant la différence, il vient : $(2k+1)(x-y)P_k(x)P_k(y) =$

$$(k+1)(P_{k+1}(x)\,P_k(y) - P_{k+1}(y)\,P_k(x)) + k\,(P_k(y)\,P_{k-1}(x) - P_k(x)\,P_{k-1}(y))$$

En sommant de $k=0$ à n on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)(x-y)P_k(x)P_k(y) = (n+1)(P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x))$$

(les autres termes s'éliminent ...)

XII

IV.6.a. On a, par définition (II.4.) :

$$S_n f(x) = \sum_{k=0}^{n}\int_{-1}^{1}\tilde{P}_k(y)f(y)\,dy\;\tilde{P}_k(x) = \int_{-1}^{1}\Big(\sum_{k=0}^{n}\tilde{P}_k(x).\tilde{P}_k(y)\Big)f(y)\,dy$$

Or $\tilde{P}_k(x) = \sqrt{\frac{2k+1}{2}}\,P_k(x)$ d'où :

$$S_n f(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\Big(\sum_{k=0}^{n}(2k+1)P_k(x)P_k(y)\Big)f(y)\,dy.$$

Pour x fixé, la fonction $y \to k_n(x,y)$ se prolonge par continuité au point $y=x$ (regarder le membre de gauche de la relation (16)), on a donc : $\forall x \in I \quad S_n f(x) = \int_{-1}^{1}k_n(x,y)f(y)\,dy$.

IV.6.b. Pour $f \equiv 1$, on a d'une part $S_n f(x) = \int_{-1}^{1}k_n(x,y)\,dy$ et d'autre part : $S_n(f) = \sum_{k=0}^{n}c_k(f)\tilde{P}_k = c_0(f).\tilde{P}_0$, car $f \equiv 1 \equiv P_0$ et $(P_0, P_k) = 0$ pour $k \neq 0$. Or $c_0(f) = \sqrt{2}$ et $\tilde{P}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ d'où $S_n(f) = 1$, et la conclusion.

On a alors : $S_n(f) - f(x) = \int_{-1}^{1}k_n(x,y)(f(y) - f(x))\,dy$.

IV-6-c. - Remarque : la méthode proposée se justifie par le terme en $1/(y-x)$ figurant dans $k_n(x,y)$ et l'absence de majoration des P_n sur $[-1,1]$ (on en dispose d'une sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$.) - On fixe donc $x \in]-1,1[$ et on écrit $S_n f(x) - f(x)$ (on notera k_n pour $k_n(x,y)$) :

$$S_n f(x) - f(x) = \int_{-1}^{x-\varepsilon}k_n(f(y)-f(x))\,dy + \int_{x+\varepsilon}^{1}k_n(f(y)-f(x))\,dy + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}k_n(f(y)-f(x))\,dy$$

•) Première intégrale

On peut écrire $\int_{-1}^{x-\varepsilon}k_n(x,y)(f(y)-f(x))\,dy = \int_{-1}^{1}k_n(x,y)\,F(y)\,dy$

avec F définie sur $[-1,1]$ par :

- $\forall y \in [-1, x-\varepsilon[\quad F(y) = (f(y)-f(x))/(y-x)$;
- $\forall y \in [x-\varepsilon, 1] \quad F(y) = 0$.

En utilisant la définition de k_n, il vient :

$$\int_{-1}^{1}k_n(x,y)\,F(y)\,dy = \frac{n+1}{2}P_{n+1}(x)(P_n|F) - \frac{n+1}{2}P_n(x)(P_{n+1}|F).$$

On va démontrer que chacun des termes du membre de droite tend vers 0 ; faisons le pour le premier, la démonstration étant analogue pour le second.

IV.6.c -(Suite) - Comme $x \in]-1,1[$, on a d'après la relation

(15) $\left|\frac{n+1}{2} P_{n+1}(x)\,(P_n|F)\right| \leq \frac{n+1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi(n+1)(1-x^2)}}\,|(P_n|F)|$

Or : $(P_n|F) = \frac{2}{2n+1}(\tilde{P}_n|F) = \frac{2}{2n+1}c_n(F)$.

d'où : $\left|\frac{n+1}{2}P_{n+1}(x)(P_n|F)\right| \leq \sqrt{\frac{n+1}{\pi(2n+1)(1-x^2)}}\,c_n(F)$.

Comme la fonction F est continue par morceaux (appartient à $\mathcal{C}(I)$) on en déduit (II.4.c.) que $\lim_{n\to+\infty} c_n(F) = 0$. D'où :

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2}P_{n+1}(x)(P_n|F) = 0$.

•) On traite la <u>deuxième intégrale</u> d'une manière analogue.

•) <u>Troisième intégrale</u>.

On utilise ici le fait que f est k-lipschitzienne sur I.

On a alors : $\left|\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} k_n(x,y)(f(y)-f(x))\,dy\right| \leq k\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}|k_n(x,y)||y-x|\,dy$

En utilisant la définition de $k_n(x,y)$ on obtient :

$\left|\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} k_n(x,y)(f(y)-f(x))\,dy\right| \leq \frac{k(n+1)}{2}\left[|P_{n+1}(x)|\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}|P_n(y)|dy + |P_n(x)|\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}|P_{n+1}(y)|dy\right]$

En utilisant la relation (15) il vient :

$$\left|\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} k_n(x,y)(f(y)-f(x))\,dy\right| \leq \frac{k(n+1)}{2}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi(n+1)(1-x^2)}}\times 2\varepsilon\sqrt{\frac{2}{\pi n(1-\xi^2)}} + \sqrt{\frac{2}{\pi n(1-x^2)}}\times 2\varepsilon\sqrt{\frac{2}{\pi(n+1)(1-\xi^2)}}\right]$$

où ξ est le sup de la fonction $y \to \sqrt{2/(1-y^2)}$ sur $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$.

On en déduit :

$\left|\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} k_n(x,y)(f(y)-f(x))\,dy\right| \leq \frac{8k}{\pi}\varepsilon\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-\xi^2)}}$ (pour $n \geq 1$)

(On a, en particulier, majoré $\frac{n+1}{\sqrt{(n+1)n}}$ par 2.).

On a donc : $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} k_n(x,y)(f(y)-f(x))\,dy = 0$

•) <u>Conclusion</u> : pour $\delta > 0$, on commence par choisir ε tel que la valeur absolue de la troisième intégrale soit majorée par $\delta/2$. Alors, il existe N tel que pour tout $n > N$, les valeurs absolues des 2 premières intégrales soient majorées par $\delta/2$; alors :

$$\forall n > N \qquad |S_n f(x) - f(x)| \leq \delta.$$

et on a la conclusion.

<u>V</u> <u>Caractérisation des fonctions de $C^\infty(I)$ par la suite $d_n(f)$.</u>

<u>V.1.</u> •) D'après B.I.7. on a : $\forall x \in I\ |P_n(x)| \leq 1$. Puis en utilisant <u>II.2.d</u> ($\tilde{P}_n(x) = \sqrt{(2n+1)/2}\,P_n(x)$) il vient : $\forall x \in I\ |c_n\tilde{P}_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2n+1}{2}}|c_n|$

Comme pour $n \geq 2$ $n+\frac{1}{2} \leq n^2$, il vient $\forall x \in I\ \forall n \geq 2\ |c_n\tilde{P}_n(x)| \leq n|c_n|$.

Comme $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de type (S) $\Sigma\, n|c_n|$ est convergente et la série $\Sigma\, c_n\tilde{P}_n(x)$ est normalement convergente. Chaque P_n étant continu la convergence normale entraîne la continuité de la somme f sur I.

•) Montrons que f est de classe C^∞.

▪ la relation (13) entraîne par une récurrence facile que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $p \in \mathcal{P}_n$ tout $k \in \mathbb{N}$ $\sup|P^{(k)}(x)| \leq C_2^k n^{4k}\|P\|_\infty$ où $\|P\|_\infty = \sup_{x\in I}|P(x)|$.

▪ Soit alors $k \in \mathbb{N}$. On a puisque $P_n \in \mathcal{P}_n$, pour tout $x \in I$: $|c_n\tilde{P}_n^{(k)}(x)| \leq |c_n|(C_2)^k n^{4k}\|\tilde{P}_n\|_\infty$. Le pas précédent montre que pour $n \geq 2$ on a $\|\tilde{P}_n\|_\infty \leq n$ d'où : $|c_n\tilde{P}_n^{(k)}(x)| \leq C_2^k n^{4k+1}|c_n|$

la série $\Sigma\, C_2^k n^{4k+1}|c_n|$ est convergente puisque $(c_n)_{n\in}$ est du type (S). Il en résulte que chaque série $\Sigma\, c_n\tilde{P}_n$ converge normalement (donc uniformément) sur I : la somme est de classe C^∞ sur I.

<u>V.2.a.</u> •) On va d'abord montrer que $c_n(\mathcal{L}(f)) = n(n+1)c_n(f)$.

Comme f est de classe C^∞ $\mathcal{L}f$ existe et :

$c_n(\mathcal{L}(f)) = \int_{-1}^1 \frac{d}{dx}((x^2-1)f'(x))\tilde{P}_n(x)\,dx = -\int_{-1}^1(x^2-1)f'(x)\tilde{P}_n'(x)\,dx$,

par intégration par parties. Une deuxième intégration par parties donne $c_n(\mathcal{L}(f)) = \int_{-1}^1 f(x)\frac{d}{dx}((x^2-1)\tilde{P}_n'(x))\,dx = \int_{-1}^1 f(x)\mathcal{L}(\tilde{P}_n)(x)\,dx$

Comme $\mathcal{L}(\tilde{P}_n) = n(n+1)\tilde{P}_n$ on obtient : $c_n(\mathcal{L}(f)) = n(n+1)c_n(f)$.

Comme $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞, (et donc $\mathcal{L}(f) \in \mathcal{C}(I)$), on a $\lim_{n\to+\infty} c_n(\mathcal{L}(f)) = 0$ d'où en particulier $c_n(f) = o(\frac{1}{n^2})$ en $+\infty$.

V.2.a. (Suite) •) En itérant le processus, c'est-à-dire en calculant $c_n(\mathcal{L}^p f)$ (avec $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}\circ\mathcal{L}\circ\ldots\circ\mathcal{L}$ (p fois)) on obtient que : $\forall p \in \mathbb{N} \quad c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$ (en $+\infty$).
Soit maintenant $k \in \mathbb{N}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $2p \geq k+2$ alors $|n^{k+2} c_n(f)| \leq |n^{2p} c_n(f)| = o(1)$.
Donc : $|n^k c_n(f)| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série $\sum n^k c_n(f)$ converge absolument : $(c_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc du type (S).

•) La question V.1. entraîne alors que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \tilde{P}_n$ converge uniformément vers une fonction de classe C^∞, dont il reste à voir que c'est f. Or f étant de classe C^∞ sur I (qui est compact), f est Lipschitzienne sur I et le résultat du **IV.6.c.** s'applique : la suite $S_n(f)$, suite des sommes partielles de $\sum c_n \tilde{P}_n$ converge vers f sur $]-1,1[$. et donc sur $[-1,1]$, par continuité de f.

V.2.b. On remarque d'abord que $\mathcal{A}$ est clairement linéaire et opère de $C^\infty(I)$ dans lui-même. Ensuite : $\mathcal{A}(f) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+n+1)c_n(f)\tilde{P}_n(x)$
Car : $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f)\tilde{P}_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f)\mathcal{L}(\tilde{P}_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f)(n^2+n)\tilde{P}_n$,
les opérateurs $\mathcal{L}$ et Σ commutant en raison de la convergence uniforme des séries $\sum c_n(f) P_n^{(k)}$ ($k \in \mathbb{N}$) sur I.
Par ailleurs l'application linéaire $\mathcal{C}$ de $C^\infty(I)$ dans S définie par : $\mathcal{C}(f) = (c_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est un isomorphisme en vertu de **V.1** et **V.2.a.**
En particulier $\mathcal{C}^{-1}$ est l'application qui à $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$ fait correspondre $f = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \tilde{P}_n$, étudiée en **V.1.** Définissons l'opérateur linéaire $\tilde{\mathcal{A}}$ de S dans S (vérification immédiate) par $\tilde{\mathcal{A}}((c_n)_{n\in\mathbb{N}}) = ((n^2+n+1)c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
$\tilde{\mathcal{A}}$ est clairement un isomorphisme de S (car : $\forall n \in \mathbb{N}\ n^2+n+1 \neq 0$) et le diagramme ci-contre est commutatif : $\mathcal{A}$ est alors un isomorphisme, comme composé d'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(I) & \xrightarrow{\mathcal{A}} & C^\infty(I) \\ \mathcal{C}\downarrow & & \uparrow \mathcal{C}^{-1} \\ S & \xrightarrow{\tilde{\mathcal{A}}} & S \end{array}$$

V.2.c •) Rappelons que $S_N(f) = \sum_{n=0}^{N} c_n(f)\tilde{P}_n$ et posons : $R_N = f - S_N(f)$. On a d'après le **V.2.a.** convergence uniforme de $S_N(f)$ vers f donc de $R_N(x)$ vers 0. Donc $\lim_{N\to+\infty} \sup_{x\in I} |R_N(x)| = 0$
Comme $\|R_N\|^2 = \int_{-1}^{1}(R_N(t))^2 dt \leq 2 \sup_{x\in I}|R_N(x)|^2$ on a aussi $\lim_{N\to+\infty}\|R_N\| = 0$, ce qui exprime la convergence quadratique de $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f)\tilde{P}_n$ vers f.

•) La fonction $S_N(f)$ appartient à $\mathcal{S}_n$, tandis que R_N appartient à $\mathcal{S}_n^{\perp}$, puisque $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} c_n(f)\tilde{P}_n$ entraîne que $c_n(R_N) = 0$, pour $n \in \{0,1,\ldots 2\}$. Il en résulte :
$\|f\|^2 = \|R_N\|^2 + \|S_N(f)\|^2$ (Pythagore)
Soit : $\|f\|^2 = \|R_N\|^2 + \sum_{n=0}^{N}(c_n(f))^2$
Comme $\lim_{N\to+\infty}\|R_N\| = 0$ on obtient : $\sum_{n=0}^{+\infty}(c_n(f))^2 = \|f\|^2$.

V.3. Soit f une fonction k-lipchitzienne.
•) Supposons f de classe C^∞. On a avec les notations de la question précédente $d_N(f) = \sum_{n=N+1}^{+\infty}(c_n(f))^2 = \|R_N\|^2$ (cf II). On utilise un procédé analogue à celui du **V.2.a.** avec $\mathcal{A}$ au lieu de $\mathcal{L}$
On a : $\mathcal{A}(f) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+n+1)$. D'où : $(d_N(\mathcal{A}(f)))^2 = \sum_{n=N+1}^{+\infty}(n^2+n+1)^2(c_n(f))^2$.
On en déduit que : $(d_N(\mathcal{A}(f)))^2 \geq (N^2+N+1)^2\sum_{n=N+1}^{+\infty} c_n(f)^2 = (N^2+N+1)^2(d_N(f))^2$.
Comme $\mathcal{A}(f) \in C^\infty(I)$ on a : $\lim_{N\to+\infty} d_N(\mathcal{A}(f)) = 0$. Il vient, de la minoration précédente $\lim_{N\to+\infty} N^2 d_N(f) = 0$. En itérant le processus, comme en **V.2.a.** on obtient que : $\forall k \in \mathbb{N}\ \lim_{N\to+\infty} N^k d_N(f) = 0$. La suite $d_N(f)$ est donc du type (S).
•) Réciproquement, si la suite $d_N(f)$ est du type (S), comme $(d_N(f))^2 = \sum_{n=N+1}^{+\infty}(c_n(f))^2$, on a : $d_N(f) \geq |c_{n+1}(f)|$.
Il en résulte que la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est du type (S) et que par **V.1.** la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f)\tilde{P}_n$ est de classe C^∞, et par **IV.6.c.**, f étant k-lipchitzienne, que cette somme est f : f est donc de classe C^∞.

CAPES externe 19892

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 5 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

L'usage des instruments de calcul, en particulier des calculatrices électroniques de poche — y compris calculatrices programmables et alphanumériques — à fonctionnement autonome, non imprimantes, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Notations et objectif du problème

Soient N et M deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Soit p un réel de $]0,1[$. On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{N}^2$:

$$R = \{ (x, y) \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq x \leq N-1 \ , 0 \leq y \leq M-1 \} ;$$

$$F_1 = \{ (x, M) : 0 \leq x \leq N-1 \} ; F_2 = \{ (N, y) : 0 \leq y \leq M-1 \} ;$$

$$F = F_1 \cup F_2 \cup \{(N, M)\} \quad \text{et} \quad \overline{R} = R \cup F .$$

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions f définies sur $\overline{R}$, à valeurs réelles, vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$(*) \ \forall (l, k) \in R \ , \ f(l, k) = p \ f(l+1, k) + (1-p) \ f(l, k+1) .$$

Après une première partie consacrée à des résultats préliminaires, nous recherchons (partie II) les éléments de $\mathcal{E}$. Dans la partie III nous donnons une interprétation probabiliste de certains éléments de $\mathcal{E}$. Enfin dans la partie IV, indépendante de la partie III, nous donnons une autre façon de résoudre l'équation fonctionnelle $(*)$.

Dans tout le problème, pour deux entiers naturels μ et ν vérifiant $0 \leq \mu \leq \nu$, on notera $C_\mu^\nu = \mu! / \nu! \, (\mu-\nu)!$ le coefficient binomial de paramètres μ et ν.

I Préliminaires.

A) Quotients des divisions suivant les puissances croissantes du polynôme 1 par le polynôme $(1-x)^{s+1}$.

On se propose, les entiers r et s étant donnés ($r \geq 1$ et $s \geq 0$), de déterminer deux polynômes U et V de l'indéterminée x vérifiant les propriétés suivantes :

i) le polynôme U est de degré strictement inférieur à r

ii) U et V satisfont à la relation $(1-x)^{s+1} \, U + x^r \, V = 1$.

I.1 Soit f la fonction rationnelle définie par $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. L'entier m ($m \geq 0$) étant donné, déterminer $f^{(m)}$, dérivée d'ordre m de la fonction f. On convient que $f^{(0)} = f$.

I.2 a) Donner le développement en série entière de la fonction f, en précisant l'intervalle de validité de ce développement.

b) En déduire (en le justifiant), pour $m \geq 1$, le développement en série entière de la fraction rationnelle $\frac{1}{(1-x)^{m+1}}$. Préciser l'intervalle de validité de ce développement.

I.3 Etude d'un cas particulier.

On suppose dans cette question que $s = 0$, r restant un entier supérieur ou égal à 1.

a) En utilisant une expression de la somme $1 + x + x^2 + \ldots + x^{r-1}$, déterminer un couple de polynômes (U, V) vérifiant les propriétés *i*) et *ii*).

b) Retrouver le résultat obtenu en utilisant le développement en série entière de $\frac{1}{1-x}$.

I.4 Etude du cas général.

Montrer qu'il existe un unique couple (U, V) de polynômes vérifiant les propriétés *i*) et *ii*). Expliciter le polynôme U. (On pourra utiliser le développement trouvé en *I.2.b*).

B) Matrices nilpotentes.

Soit d un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par $\mathcal{M}_d$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées à coefficients réels, à d lignes et d colonnes. Si A est un élément de $\mathcal{M}_d$ et i, j deux entiers de $\{1, \ldots, d\}$, on note $A(i, j)$ le coefficient de la matrice A situé à la i-ième ligne et à la j-ième colonne. On appelle I_d la matrice identité de $\mathcal{M}_d$. On pose :

$$A^0 = I_d \ , \ A^1 = A \quad \text{et pour tout entier } k \geq 2, \ A^k = A A^{k-1}.$$

Une matrice A de $\mathcal{M}_d$ est dite ***nilpotente*** s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$; le plus petit entier $r \geq 1$ vérifiant $A^r = 0$ est alors appelé l'*ordre* de nilpotence de A.

On suppose désormais que A est une matrice non nulle de $\mathcal{M}_d$, nilpotente d'ordre r.

I.5 Montrer que zéro est la seule valeur propre complexe de la matrice A. Quel est le polynôme caractéristique de A ? En déduire que $r \leq d$.

I.6 On désigne par $e(A)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_d$ engendré par les matrices $\{A^k ; k \geq 0\}$. Montrer que $b = \{I_d, A, \ldots, A^{r-1}\}$ est une base de $e(A)$.

I.7 Soit s un élément de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que la matrice $(I_d - A)^{s+1}$ appartient à $e(A)$; donner ses coordonnées dans la base b.

b) Montrer que la matrice $(I_d - A)^{s+1}$ est inversible et que son inverse, notée $(I_d - A)^{-(s+1)}$, est égale à $\sum_{0 \leq k \leq r-1} C_{s+k}^{s} A^k$. (On pourra utiliser la question *I*.4).

I.8 <u>Exemple</u>.

On appelle J_d la matrice d'ordre d définie par :

$$\forall (i, j) \in \{1, \ldots, d\}^2, \quad J_d(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j - i = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Pour $k \geq 2$, calculer la puissance k–ième de la matrice J_d. En déduire que J_d est une matrice nilpotente et préciser son ordre de nilpotence.

b) Pour $s \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, expliciter la matrice $(I_d - \lambda J_d)^{-(s+1)}$.

II Résolution matricielle de l'équation fonctionnelle (*).

Si f est une fonction sur $\overline{R}$, à valeurs réelles, on note $M(f)$ la matrice à $(N+1)$ lignes et $(M+1)$ colonnes définie par :

$$M(f) = \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \ldots & f(0,M) \\ f(1,0) & f(1,1) & \ldots & f(1,M) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(N,0) & f(N,1) & \ldots & f(N,M) \end{bmatrix}$$

Pour k et l entiers vérifiant $0 \leq k \leq M$ et $0 \leq l \leq N$, on pose :

$$C_k(f) = \begin{bmatrix} f(0,k) \\ f(1,k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(N,k) \end{bmatrix}$$

et $$L_l(f) = [\, f(l,0) \quad f(l,1) \quad \ldots \quad f(l,M) \,] \; .$$

Autrement dit $C_k(f)$ est le $(k+1)$-ième vecteur colonne et $L_l(f)$ le $(l+1)$-ième vecteur ligne de la matrice $M(f)$.

A) Etude de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.

On rappelle que $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des fonctions f définies sur $\overline{R}$, à valeurs réelles et vérifiant l'équation fonctionnelle $(*)$.

II.1 Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel des fonctions définies sur $\overline{R}$ à valeurs réelles .

II.2 *a*) Soit k un entier vérifiant $0 \leq k \leq M-1$. Si $f \in \mathcal{E}$, montrer que la matrice colonne $C_k(f)$ est déterminée de façon unique par la donnée de la matrice colonne $C_{k+1}(f)$ et du réel $f(N,k)$.

b) En déduire que tout élément f de $\mathcal{E}$ est déterminé de façon unique par la donnée des valeurs $\{ f(l,M) ; 0 \leq l \leq N \}$ et $\{ f(N,k) ; 0 \leq k \leq M-1 \}$; autrement dit *tout élément f de $\mathcal{E}$ est déterminé de façon unique par sa restriction à F* .

Pour tout entier i vérifiant $0 \leq i < N$, on désigne par φ_i l'unique élément de $\mathcal{E}$ tel que :

$$\forall (l,k) \in F , \ \varphi_i(l,k) = \begin{cases} 1 \text{ si } (l,k) = (i,M) \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout entier j vérifiant $0 \leq j < M$, on désigne par ψ_j l'unique élément de $\mathcal{E}$ tel que :

$$\forall (l, k) \in F, \psi_j(l, k) = \begin{cases} 1 & \text{si } (l, k) = (N, j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Enfin, on note ξ l'unique élément de $\mathcal{E}$ tel que :

$$\forall (l, k) \in F, \ \xi(l, k) = \begin{cases} 1 & \text{si } (l, k) = (N, M) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

II.3 Montrer que $(\varphi_0, \ldots, \varphi_{N-1}, \xi, \psi_0, \ldots, \psi_{M-1})$ est une base de $\mathcal{E}$.

II.4 Déterminer l'élément ξ de $\mathcal{E}$ en explicitant la matrice $M(\xi)$.

B) Calcul des fonctions φ_i et ψ_j.

Soient i et j deux entiers vérifiant $0 \leq i < N$ et $0 \leq j < M$.

II.5 *a*) En conservant les notations I_d et J_d de la partie I.B, pour $d = N+1$ (resp. $d = M+1$), montrer que, pour tout entier k vérifiant $0 \leqslant k < M$ et pour tout entier l vérifiant $0 \leqslant l < N$, on a :

$$(1-p) \ C_{k+1}(\varphi_i) = (I_{N+1} - p \, J_{N+1}) \ C_k(\varphi_i)$$

et

$$p \ L_{l+1}(\psi_j) = L_l(\psi_j) \ (I_{M+1} - (1-p) \, {}^tJ_{M+1}),$$

où ${}^tJ_{M+1}$ désigne la transposée de la matrice J_{M+1}.

b) A l'aide de *I*.8 expliciter alors, pour tout élément (l, k) de R, les valeurs de $\varphi_i(l, k)$ et $\psi_j(l, k)$.

III Interprétation probabiliste des fonctions φ_i et ψ_j.

On considère dans $\mathbb{N}^2$ *la marche aléatoire* d'un point mobile m qui ne peut occuper à des instants définis par les entiers n $(n \in \mathbb{N})$ que des positions (x, y) du plan à coordonnées entières ($(x, y) \in \mathbb{N}^2$). Cette marche aléatoire de m est soumise aux règles suivantes :

– Si à l'instant n, le point m se trouve au point (x, y) de $\mathbb{N}^2$, il occupe, à l'instant $n+1$, soit la position $(x+1, y)$ (déplacement horizontal) avec la probabilité p, soit la position $(x, y+1)$ (déplacement vertical) avec la probabilité $q = 1-p$.

– Le déplacement de m effectué à un instant n à partir de la position (x, y) est indépendant de l'instant n, de la position (x, y) et des positions antérieures.

Il est clair que, partant d'un point de R, la marche aléatoire amène, à un certain instant n_0, le mobile m à occuper une position (u, v) appartenant à la "frontière" $F_1 \cup F_2$. Si, à tout instant $n < n_0$, la position occupée par m est un point de R, on dit que la marche aléatoire atteint pour la première fois $F_1 \cup F_2$ au point (u, v).

Pour tous éléments (l, k) de R et (u, v) de $F_1 \cup F_2$, on désigne par $A(l, k; u, v)$ l'événement " la marche aléatoire partant du point (l, k) de R atteint pour la première fois $F_1 \cup F_2$ au point (u, v) ". On se propose de calculer la probabilité de cet événement.

A) Modélisation de la marche aléatoire partant de (0 , 0).

Toutes les variables aléatoires considérées dans la suite sont supposées être définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Soient $(U_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant chacune la loi de Bernoulli de paramètre p. On pose:

$$X_0 = Y_0 = 0 \quad ;$$

$\forall n \geq 1$, $X_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$ et $Y_n = (1-U_1) + (1-U_2) + \ldots + (1-U_n)$.

III.1 Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

a) Donner les lois des variables aléatoires X_n et Y_n.

b) Déterminer la loi du couple (X_n, Y_n).

III.2 Soit $(l, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\mathbb{P}[(X_n, Y_n) = (l, k)] > 0$. Suivant les valeurs de $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, calculer la probabilité conditionnelle

$$\mathbb{P}[(X_{n+1}, Y_{n+1}) = (x, y) \mid (X_n, Y_n) = (l, k)]$$

B) Calcul des probabilités $\mathbb{P}[A(0,0;i,M)]$ et $\mathbb{P}[A(0,0;N,j)]$.

On considère les variables aléatoires T, X_T, Y_T qui associent, à tout élément ω de Ω, les nombres réels :

$$T(\omega) = inf\{n \geq 1 ; (X_n(\omega), Y_n(\omega)) \in F_1 \cup F_2\} ;$$

$$X_T(\omega) = \sum_{1 \leq k \leq T(\omega)} U_k(\omega) \quad \text{et} \quad Y_T(\omega) = \sum_{1 \leq k \leq T(\omega)} (1 - U_k(\omega)) .$$

(On admettra que T, X_T, Y_T sont bien des variables aléatoires).

*III.*3 Montrer que, pour tout ω élément de Ω, $T(\omega) \leqslant N + M - 1$.

*III.*4 *a*) Montrer que, pour tout ω élément de Ω et tout entier i vérifiant $0 \leqslant i < N$,

$$(X_T(\omega), Y_T(\omega)) = (i, M) \iff \begin{cases} \sum_{1 \leq k \leq i+M-1} (1 - U_k(\omega)) = M - 1 \\ \\ U_{i+M}(\omega) = 0 \end{cases}$$

b) En déduire la probabilité $\mathbb{P}[A(0,0;i,M)]$ et comparer cette valeur à $\varphi_i(0,0)$.

*III.*5 *a*) De façon analogue, pour tout entier j vérifiant $0 \leq j < M$, exprimer l'événement $\{(X_T, Y_T) = (N, j)\}$ à l'aide des variables aléatoires $(U_k)_{k \geq 1}$.

b) En déduire la probabilité $\mathbb{P}[A(0,0;N,j)]$ et comparer cette valeur à $\psi_j(0,0)$.

c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire T en fonction des réels $\varphi_i(0,0)$ avec $0 \leq i < N$ et $\psi_j(0,0)$ avec $0 \leq j < M$.

C) Calcul des probabilités $\mathbb{P}[A(l,k;i,M)]$ et $\mathbb{P}[A(l,k;N,j)]$.

Soient i et j deux entiers vérifiant $0 \leq i < N$ et $0 \leq j < M$.

*III.*6 A l'aide d'un argument simple, déduire les probabilités $\mathbb{P}[A(l,k;i,M)]$ et $\mathbb{P}[A(l,k;N,j)]$ des probabilités calculées précédemment.

D) Application.

Une épreuve entre deux joueurs A et B conduit au résultat suivant : A est gagnant avec la probabilité p et B est gagnant avec la probabilité $q = 1 - p$.

Les deux joueurs s'affrontent au cours d'un jeu qui consiste en une répétition d'épreuves indépendantes. Le joueur A doit obtenir N victoires ; le joueur B, M victoires. Le gagnant est celui qui le premier atteint son objectif.

III.7 *a*) Comment peut-on modéliser ce jeu ?

b) Montrer que la probabilité $p_A(N, M)$ de gagner du joueur A est donnée par :

$$(**) \quad p_A(N, M) = p^N \sum_{0 \leq j \leq M-1} C_{N-1+j}^{N-1} \, q^j$$

III.8 Application numérique. On prend $p = 0{,}6$ et $N = 6$.

a) En précisant l'organisation des calculs, trouver M pour que le jeu soit le plus équitable possible (c'est-à-dire pour que $p_A(N, M)$ soit le plus proche possible de $1/2$).

b) Interprétation de l'espérance mathématique de la variable aléatoire T (cf. *III.5 c*). Calculer le nombre moyen d'épreuves nécessaires pour départager les deux joueurs.

III.9 Vérifier, *directement sur la relation* (**), que :

a) pour M fixé, $\lim_{N \to +\infty} p_A(N, M) = 0$;

b) pour N fixé, $\lim_{M \to +\infty} p_A(N, M) = 1$.

IV Nouvelle méthode de résolution de l'équation fonctionnelle (*).

IV.1 Pour tous entiers r et s supérieurs ou égaux à 1, déterminer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$g(x) = \frac{1}{x^r (1-x)^s}.$$

IV.2 Pour tout réel x, on considère la fonction h_x sur $\overline{R}$ définie par :

$$h_x(l,k) = \left(\frac{x}{p}\right)^l \left(\frac{1-x}{q}\right)^k$$

avec $q = 1-p$.

a) Vérifier que pour tout réel x, la fonction h_x appartient à $\mathscr{E}$.

b) Pour tout réel x, donner la décomposition de h_x dans la base $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_{N-1}, \xi, \psi_0, \ldots, \psi_{M-1}\}$.

c) En déduire les valeurs de $\varphi_i(l,k)$ et $\psi_j(l,k)$, pour $(l,k) \in R$, $0 \le i < N$ et $0 \le j < M$.

SESSION DE 1990

CONCOURS EXTERNE

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

REMARQUES IMPORTANTES.

1° *Outre l'énoncé proprement dit, le texte comporte une présentation détaillée de chacun des deux thèmes proposés ainsi qu'une définition des objectifs recherchés.*

2° *Les difficultés du problème sont graduées et le jury saura apprécier la qualité de la rédaction et toutes les démonstrations claires et complètes à l'intérieur de chacun de ces thèmes.*

L'usage des instruments de calcul, en particulier des calculatrices électroniques de poche — y compris calculatrices programmables et alphanumériques — à fonctionnement autonome, non imprimantes, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Notations et objectifs du problème

Une suite $w = (w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes étant donnée, on dit que la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} w_n$ est convergente (resp. absolument convergente) si les deux séries $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} w_{-n}$ sont toutes deux convergentes (resp. absolument convergentes) et on pose alors $\sum_{-\infty}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n + \sum_{n=1}^{+\infty} w_{-n}$. Au cours du problème, on utilise l'espace préhilbertien complexe H_2 des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que $\sum_{-\infty}^{+\infty} |u_n|^2$ est convergente, le produit scalaire de deux éléments u et v étant défini par $(u|v) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \overline{u}_n v_n$, la norme associée étant notée $\| \;\; \|$. Le sous-espace préhilbertien complexe de H_2 constitué des suites u de H_2, telles que $u_n = 0$ pour tout entier n strictement négatif, est noté H_1.

La première partie du problème étudie des critères pour qu'une matrice hermitienne soit définie positive. À l'exception de la question I.4.*c*. dont le résultat peut être utilisé dans la question III.2.*c*., la suite du problème est **indépendante** de cette première partie et est consacrée à l'étude et à la détermination des spectres, dont la définition est donnée plus loin, de certains endomorphismes hermitiens positifs inversibles d'un espace préhilbertien H. Après une brève étude en dimension finie où ce spectre est une partie finie de $\mathbb{R}$, la deuxième partie en fournit une localisation dans le cas d'un espace H quelconque puis, dans l'espace H_1, propose un exemple où ce spectre est l'ensemble des points d'une suite convergente de réels et de sa limite.

Les troisième et quatrième parties fournissent enfin, dans le cas de l'espace H_2, un deuxième exemple dans lequel le spectre s'identifie à un segment de $\mathbb{R}$.

Tournez la page S.V.P.

PREMIÈRE PARTIE

L'espace préhilbertien considéré dans cette partie est $\mathbb{C}^n$ où n est un entier donné supérieur à un. Le produit scalaire des deux vecteurs $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ est défini par :

$$(x|y) = \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k y_k ;$$

la norme du vecteur x est définie par $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

Si A est une matrice à coefficients complexes, à n lignes et p colonnes, on note $A^* = {}^t\bar{A}$, la matrice à p lignes et n colonnes dont les coefficients sont les conjugués de ceux de la matrice transposée de A. Une matrice carrée A est dite hermitienne si $A = A^*$.

Dans ce qui suit, un élément x de $\mathbb{C}^n$ est identifié avec la colonne X de ses composantes sur la base canonique et A désigne aussi bien une matrice carrée d'ordre n que l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ qui lui est associé. Ainsi le vecteur Ax, image de x par l'endomorphisme A, s'exprime par le produit matriciel AX et le produit scalaire $(y|Ax)$ peut s'écrire Y^*AX.

La matrice carrée A d'ordre n est dite définie positive si A est hermitienne et si, quel que soit x, élément non nul de $\mathbb{C}^n$, le nombre $(x|Ax)$ (ou X^*AX) est strictement positif.

Le déterminant d'une matrice carrée A est noté det A.

L'objet de cette première partie est de dégager des critères pour qu'une matrice hermitienne A soit définie positive.

I.1. Étude d'une forme hermitienne sur $\mathbb{C}$.

a. Étant donnés un nombre réel non nul a, un nombre réel quelconque c et un nombre complexe quelconque b, on pose, pour tout nombre complexe z : $T(z) = a|z|^2 + b\bar{z} + \bar{b}z + c$.

(On remarquera que $T(z)$ est un nombre réel.)

Montrer que, pour tout nombre complexe z :

$$T(z) = a\left|z + \frac{b}{a}\right|^2 + c - \frac{|b|^2}{a}.$$

En déduire, en faisant intervenir les deux nombres a et $c - \dfrac{|b|^2}{a}$, une condition nécessaire et suffisante pour que $T(z)$ soit strictement positif quel que soit le nombre complexe z.

b. ***Application :*** Soient α et γ deux nombres réels et β un nombre complexe. Déterminer une condition nécessaire et suffisante faisant intervenir α et le déterminant de la matrice $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \gamma \end{bmatrix}$ pour que cette matrice soit définie positive.

I.2. Premier critère de positivité d'une matrice M.

Dans cette question, M est une matrice hermitienne donnée, d'ordre n supérieur ou égal à deux. On décompose M sous la forme :

$$M = \begin{bmatrix} a & V^* \\ V & \widetilde{M} \end{bmatrix}$$

où a est un réel, V une matrice colonne à $n - 1$ éléments et $\widetilde{M}$ une matrice hermitienne d'ordre $n - 1$.

a. En décomposant la colonne Z de $\mathbb{C}^n$ sous la forme $Z = \begin{pmatrix} z \\ \widetilde{Z} \end{pmatrix}$ où z est un nombre complexe et $\widetilde{Z}$ une matrice colonne à $n - 1$ lignes, calculer le nombre complexe Z^*MZ.

b. Montrer que la matrice M est définie positive si et seulement si les conditions suivantes sont simultanément satisfaites :

– le nombre a est strictement positif ;
– la matrice hermitienne $a\widetilde{M} - VV^*$ est définie positive.

(À cet effet, on utilisera I.1. avec $b = V^*\widetilde{Z} = {}^t\widetilde{Z}\,\overline{V}$ et $c = \widetilde{Z}^*\widetilde{M}\,\widetilde{Z}$.)

Le processus précédent peut être itéré. On pose :

$$M_1 = M, \quad d_1 = a, \quad V_1 = V, \quad \widetilde{M}_1 = \widetilde{M}\,, \quad M_2 = d_1\widetilde{M}_1 - V_1V_1^*.$$

Si $n \geqslant 3$, on décompose M_2 sous la forme :

$$M_2 = \begin{bmatrix} d_2 & V_2^* \\ V_2 & \widetilde{M}_2 \end{bmatrix}$$

où d_2 est réel et V_2 une colonne à $n - 2$ éléments. On construit ainsi par récurrence une suite (M_k) de matrices hermitiennes d'ordre $n - k + 1$ (où $k = 1, 2, ..., n$) et une suite (d_k) de réels liées par les relations :

$$M_k = \begin{bmatrix} d_k & V_k^* \\ V_k & \widetilde{M}_k \end{bmatrix}, \quad M_{k+1} = d_k\widetilde{M}_k - V_kV_k^*.$$

Pour $k = n$, $M_n = [d_n]$ est d'ordre 1 et le processus s'arrête.

c. Montrer que M est définie positive si et seulement si tous les nombres de la suite $(d_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ sont strictement positifs.

d. Rédiger, dans le langage usuel, et en quelques lignes, un algorithme permettant de calculer les nombres d_k, prenant fin au premier nombre d_k, s'il existe, qui est négatif ou nul, et décidant si une matrice hermitienne M donnée est définie positive ou non.

I.3. **Deuxième critère de positivité.**

M est toujours une matrice hermitienne donnée d'ordre n supérieur ou égal à deux. On utilise les notations précédentes.

a. On suppose $n = 2$; montrer que $\det M_1 = \det M_2$.

b. Montrer que si n est supérieur strictement à deux et si d_1 est nul, alors $\det M_2$ est nul.

c. Pour n strictement supérieur à deux et d_1 non nul, montrer que $d_1^{n-2} \det M_1 = \det M_2$.

Indication : On pourra multiplier par d_1 les $n - 1$ dernières colonnes de M_1 ; en ajoutant à chacune de ces colonnes un multiple convenable de la première colonne de M_1, on se ramène à calculer un déterminant dont la première ligne ne comporte plus qu'un seul coefficient non nul.

d. Pour $n \geqslant 3$, en supposant les nombres d_k non nuls pour $k = 1, 2, ..., n - 2$, montrer que :

$$\det M = \frac{d_n}{d_1^{n-2}\ d_2^{n-3}\ \dots\ d_{n-2}}.$$

e. On note C_p la matrice formée des p premières lignes et des p premières colonnes de M, et Δ_p le déterminant de C_p. Exprimer, lorsque les nombres d_k sont non nuls, Δ_1 et Δ_2 à l'aide des nombres d_k puis, pour $p \in \{3, ..., n\}$, exprimer d_p en fonction de $d_1, d_2, ..., d_{p-2}$ et Δ_p lorsque $n \geqslant 3$ (on pourra appliquer I.3.*d.* à la matrice C_p).

f. Déduire de ce qui précède que la matrice M est définie positive si et seulement si tous les nombres de la suite $(\Delta_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ sont strictement positifs.

Tournez la page S.V.P.

I.4. ***Applications.***

a. En utilisant le premier critère, montrer que la matrice M suivante est définie positive :

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

b. Le nombre a réel et le nombre b complexe étant donnés, on considère :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \bar{b} \\ 0 & 0 & b & a \end{bmatrix}$$

En utilisant le premier critère, déterminer les valeurs de a et de b pour lesquelles M est définie positive.

c. Soit la matrice réelle A d'ordre n de coefficients $a_{p,q}$ définis par $a_{p,q} = \exp(-|p-q|)$. Utiliser le second critère pour prouver que A est définie positive.

DEUXIÈME PARTIE

Un espace préhilbertien complexe H étant donné, on note $(x|y)$ le produit scalaire de deux vecteurs x et y de H et $\|x\|$ la norme du vecteur x. Un endomorphisme φ de l'espace H est dit hermitien (ou auto-adjoint) si, quel que soit le couple (x, y) d'éléments de H, l'égalité $(\varphi(x)|y) = (x|\varphi(y))$ est vérifiée. Un tel endomorphisme est dit positif (resp. défini positif) si, quel que soit x dans H, le réel $(\varphi(x)|x)$ est positif (resp. strictement positif pour tout x non nul dans H). On désigne par End(H) l'algèbre des endomorphismes de H ; l'unité de cette algèbre est l'endomorphisme identité de H noté I.

II.1. **Étude du spectre en dimension finie.**

Si φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$, le spectre de φ est l'ensemble, noté $\sigma(\varphi)$, des nombres complexes λ tels que $\varphi - \lambda I$ ne soit pas inversible. L'algèbre End$(\mathbb{C}^n)$ est munie de la norme définie par :

$$\|\varphi\| = \sup\{\|\varphi(x)\|,\ \|x\| \leqslant 1\}.$$

a. Soit φ un endomorphisme hermitien de $\mathbb{C}^n$. Prouver que le spectre de φ s'identifie à l'ensemble des valeurs propres de φ et que ce spectre est inclus dans $\mathbb{R}$.

b. On désigne par $\rho(\varphi)$ le plus grand module des valeurs propres de φ. En supposant toujours φ hermitien, prouver que $\|\varphi\| \leqslant \rho(\varphi)$, puis que $\|\varphi\| = \rho(\varphi)$. (On pourra utiliser une base orthonormée de vecteurs propres.)

c. Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur les valeurs propres de φ, pour que l'endomorphisme hermitien φ soit positif (resp. défini positif). Que peut-on dire dans ce cas de $\|\varphi\|$?

d. On suppose que φ est hermitien positif et inversible ; montrer que φ^{-1} est également hermitien et positif et déduire de ce qui précède que $\sigma(\varphi)$ est inclus dans $[\|\varphi^{-1}\|^{-1}, \|\varphi\|]$.

Dans les questions suivantes, H est de dimension infinie et complet. Le sous-espace de End(H) constitué des endomorphismes continus de H est une sous-algèbre de End(H) que l'on note $\mathcal{L}(H)$. La norme d'un endomorphisme φ continu de H est toujours définie par :

$$\|\varphi\| = \sup\{\|\varphi(x)\|,\ x \in H,\ \|x\| \leqslant 1\}$$

et on admettra que, muni de cette norme, $\mathcal{L}(H)$ est complet. On admet également la propriété de la norme du composé de deux éléments de $\mathcal{L}(H)$: $\|\varphi \circ \psi\| \leqslant \|\varphi\|\,\|\psi\|$.

Un élément φ de $\mathcal{L}(H)$ est dit inversible dans $\mathcal{L}(H)$ si φ est bijectif sur H et si φ^{-1} est continu. Le spectre $\sigma(\varphi)$ est l'ensemble des nombres complexes λ tels que $\varphi - \lambda I$ n'est pas inversible dans $\mathcal{L}(H)$.

II.2. Étude d'un premier exemple.

Dans cette question l'espace H est celui, noté H_1, du préambule, on admettra qu'il est complet. Soit ψ l'application qui associe à toute suite u de H_1 la suite notée ψ_u de terme général :

$$(\psi_u)_n = \frac{n+1}{n+2}\, u_n .$$

a. Démontrer que ψ est un endomorphisme de H_1, hermitien défini positif et continu. Calculer $\|\psi\|$.

b. Déterminer les nombres complexes λ tels que $\psi - \lambda I$ soit non injectif.

c. Montrer que $\psi - I$ n'est pas surjectif, puis que, si λ n'appartient pas à $\left\{\dfrac{n+1}{n+2},\ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{1\}$, $\psi - \lambda I$ est inversible dans $\mathscr{L}(H_1)$. En déduire $\sigma(\psi)$.

d. Calculer $\|\psi^{-1}\|$ et vérifier enfin que $\sigma(\psi) \subset [\|\psi^{-1}\|^{-1}, \|\psi\|]$.

II.3. Premières localisations du spectre de φ.

Un espace préhilbertien complet quelconque H étant donné, on considère un élément fixé φ de $\mathscr{L}(H)$. Les puissances successives de φ par composition sont notées φ^k (avec $\varphi^0 = I$ et $\varphi^1 = \varphi$).

a. Montrer que si un nombre complexe donné z vérifie $|z| > \|\varphi\|$, la série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} z^{-k}\varphi^k$ converge normalement dans $\mathscr{L}(H)$. En déduire que $\varphi - zI$ est inversible dans $\mathscr{L}(H)$ et que $\sigma(\varphi)$ est inclus dans le disque fermé de centre O et de rayon $\|\varphi\|$.

b. On pose $K = \|\varphi - I\|$. Prouver que $\sigma(\varphi)$ est inclus dans le disque fermé de centre 1 et de rayon K.

II.4. Réalité du spectre d'un endomorphisme hermitien.

Soit φ un endomorphisme hermitien appartenant à $\mathscr{L}(H)$.

a. Montrer que, pour tout élément x de H et pour tout nombre réel λ, $\|\varphi(x) + i\lambda x\|^2 \leqslant (\|\varphi\|^2 + \lambda^2)\,\|x\|^2$. En déduire l'inégalité $\|\varphi + i\lambda I\|^2 \leqslant \|\varphi\|^2 + \lambda^2$.

b. Prouver que si le nombre z n'est pas réel, $\varphi - zI$ est inversible dans $\mathscr{L}(H)$. À cet effet, on posera $z = \alpha + i\beta$ et on montrera, en utilisant II.3.*a.*, que si $\varphi - zI$ n'est pas inversible dans $\mathscr{L}(H)$, alors pour tout nombre réel λ, $\alpha^2 + (\beta + \lambda)^2 \leqslant \|\varphi + i\lambda I\|^2$. En déduire que le spectre de φ est inclus dans $\mathbb{R}$.

II.5. Cas d'un endomorphisme hermitien et inversible.

Soit φ un élément donné de $\mathscr{L}(H)$ hermitien et inversible dans $\mathscr{L}(H)$.

a. Prouver que φ^{-1} est hermitien et déduire de ce qui précède que $\sigma(\varphi^{-1})$ est inclus dans $[-\|\varphi^{-1}\|, \|\varphi^{-1}\|]$.

b. Prouver qu'un nombre réel λ appartient à $\sigma(\varphi)$ si et seulement si son inverse appartient à $\sigma(\varphi^{-1})$. Montrer que $\|\varphi\|\,\|\varphi^{-1}\| \geqslant 1$ et déduire de l'étude précédente l'inclusion suivante :

$$\sigma(\varphi) \subset [-\|\varphi\|, -\|\varphi^{-1}\|^{-1}] \cup [\|\varphi^{-1}\|^{-1}, \|\varphi\|].$$

Tournez la page S.V.P.

TROISIÈME PARTIE

L'espace préhilbertien utilisé dans cette partie et la suivante est celui H_2 du préambule. On admet qu'il est complet. Le sous-espace des éléments u de H_2 tels que $\sum_{-\infty}^{+\infty} |u_n|$ converge est noté V et, pour u élément de V, on note $\|u\|_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |u_n|$.

III.1. Construction d'éléments de $\mathscr{L}(H_2)$.

Dans cette question u est un élément fixé de V.

a. Soit $v = (v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une suite bornée de nombres complexes.

Prouver que, pour tout entier n fixé dans $\mathbb{Z}$, la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} u_p v_{n-p}$ est convergente. Sa somme est notée w_n.

b. Les hypothèses restant les mêmes, prouver à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que, pour tout entier positif P, $\left| \sum_{p=-P}^{P} u_p v_{n-p} \right|^2 \leqslant \|u\|_1 \sum_{p=-P}^{P} |u_p| |v_{n-p}|^2$. En remarquant que la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} |u_p| |v_{n-p}|^2$ est convergente, montrer que, pour tout n :

$$|w_n|^2 \leqslant \|u\|_1 \sum_{-\infty}^{+\infty} |u_p| |v_{n-p}|^2.$$

c. Prouver que, pour tout entier positif N et pour tout élément v de H_2 :

$$\sum_{n=-N}^{N} |w_n|^2 \leqslant \|u\|_1^2 \|v\|^2.$$

En déduire que si v est un élément de H_2, il en est de même de w, et donner une majoration pour la norme $\|w\|$.

d. Soit φ_u l'endomorphisme de H_2 qui à v associe ainsi w. Prouver que $\varphi_u \in \mathscr{L}(H_2)$ et que $\|\varphi_u\| \leqslant \|u\|_1$.

Dans tout le reste du problème, u désigne la suite de terme général $u_n = e^{-|n|}$ et φ_u l'endomorphisme qui lui est associé. On se propose d'étudier complètement ce deuxième exemple.

III.2. Symétrie et positivité de φ_u.

Pour tout entier relatif k, on note δ^k l'élément de V défini par $\delta_n^k = 0$ si $n \neq k$ et $\delta_k^k = 1$. Pour tout v, élément de H_2 et pour tout entier positif N, on note v^N l'élément de H_2 défini par :

$$v^N = \sum_{-N}^{+N} v_k \delta^k.$$

a. Prouver que la suite de terme général v^N converge vers v dans H_2.

b. Prouver que, pour tout couple d'entiers (p, k) de $\mathbb{Z}$, $(\delta^p | \varphi_u(\delta^k)) = (\varphi_u(\delta^p) | \delta^k)$ et en déduire à l'aide du résultat précédent que φ_u est hermitien.

c. À l'aide de la question I.4.*c.*, prouver que les nombres $(\varphi_u(v^N) | v^N)$ sont positifs et en déduire que φ_u est positif.

III.3. **Inversibilité de φ_u dans $\mathscr{L}(H_2)$.**

a. Soit $v \in V$. Prouver que $\sum_{-\infty}^{+\infty} v_n e^{int}$, série de fonctions de la variable réelle t, converge normalement sur $\mathbb{R}$ et que la fonction somme F_v est 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Quelle est la fonction F_w associée à $w = \varphi_v(\delta^k)$ où $v \in V$?

c. Soient v et $\tilde{v}$ deux éléments de V. Montrer que $\varphi_v(\tilde{v}) = \varphi_{\tilde{v}}(v)$.

d. Soient v et $\tilde{v}$ deux éléments de V, comparer $\varphi_v(\tilde{v})$ à la suite des coefficients de Fourier de $F_v F_{\tilde{v}}$ (on calculera ces coefficients en utilisant le développement en série de Fourier de F_v).

e. Calculer F_u et montrer que $F_u(t) \neq 0$ pour tout réel t. En remarquant que $\dfrac{1}{F_u}$ est un polynôme trigonométrique, déterminer l'élément $\tilde{u}$ de V tel que $F_{\tilde{u}} F_u = 1$.

f. En utilisant *b*) et *c*) ou *d*), montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi_u \circ \varphi_{\tilde{u}}(\delta^k) = \delta^k$ et en déduire que φ_u est inversible dans $\mathscr{L}(H_2)$, d'inverse $\varphi_{\tilde{u}}$.

QUATRIÈME PARTIE

On poursuit l'étude du spectre de l'endomorphisme φ_u.

IV.1. **Localisation de $\sigma(\varphi_u)$.**

a. Calculer $\|u\|_1$ et $\|\tilde{u}\|_1$ et en déduire des majorations de $\|\varphi_u\|$ et de $\|\varphi_u^{-1}\|$.

b. Calculer $\|u - \delta^0\|_1$, en déduire une majoration de $\|\varphi_u - I\|$ puis, en utilisant II.3.*b.* et II.5.*b.*, prouver que :

$$\sigma(\varphi_u) \subset \left[\frac{e-1}{e+1}\,,\,\frac{e+1}{e-1}\right].$$

Pour la fin du problème, α étant un nombre réel et p étant un entier strictement positif, on note $v^{\alpha,p}$ ou plus simplement v l'élément de V défini par $v_n = e^{in\alpha}$ si $|n| \leqslant p$ et $v_n = 0$ si $|n| > p$. On pose également :

$$w = \varphi_u(v) - F_u(-\alpha)v \quad \text{où} \quad F_u(-\alpha) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-|n|}e^{-in\alpha}.$$

IV.2. **Majoration de $\|w\|$.**

On suppose α et p fixés.

a. Montrer que, si $n > p$, $|w_n| \leqslant \sum_{k=n-p}^{n+p} e^{-k}$. En déduire qu'il existe un réel K_0 indépendant de p tel que $\sum_{n=p+1}^{+\infty} |w_n|^2 \leqslant K_0$.

b. Montrer que si $0 \leqslant n \leqslant p$, $|w_n| \leqslant \sum_{-\infty}^{n-p-1} e^k + \sum_{n+p+1}^{+\infty} e^{-k}$. En déduire qu'il existe un nombre réel K_1 indépendant de p tel que $\sum_{n=0}^{p} |w_n|^2 \leqslant K_1$.

c. Étudier, sans nouveaux calculs, le cas $n < 0$ et prouver qu'il existe K tel que, pour tout entier positif p, $\|w\| \leqslant K$.

IV.3. **Détermination du spectre de φ_u.**

Les éléments v et w précédents sont plus précisément notés $v^{\alpha,p}$ et $w^{\alpha,p}$.

a. Soient x^p de norme 1 et y^p les éléments de H_2 définis par $x^p = \dfrac{v^{\alpha,p}}{\|v^{\alpha,p}\|}$ et $y^p = \dfrac{w^{\alpha,p}}{\|v^{\alpha,p}\|}$.

Prouver, α étant toujours un réel fixé, que $\lim_{p\to\infty} y^p = 0$.

En déduire que, quel que soit α, $F_u(-\alpha) \in \sigma(\varphi_u)$.

b. Déduire de ce qui précède l'égalité : $\sigma(\varphi_u) = \left[\dfrac{e-1}{e+1}\,,\,\dfrac{e+1}{e-1}\right]$.

Solution du problème AG10
(CAPES externe 1990, 1ère composition)

I.1.a. On développe

$$a\left|z+\frac{b}{a}\right|^2+c-\frac{|b|^2}{a}=a\left(|z|^2+\left|\frac{b}{a}\right|^2+\overline{z}\frac{b}{a}+\frac{\overline{b}}{a}z\right)+c-\frac{|b|^2}{a}=a\,|z|^2+b\overline{z}+\overline{b}z+c.$$

Posons $T(z)=a\left|z+\frac{b}{a}\right|^2+c-\frac{|b|^2}{a}=f(t)$ où $t=\left|z+\frac{b}{a}\right|$. Si $T(z)>0$ pour tout $z\in\mathbb{C}$, alors d'une part $T\left(-\frac{b}{a}\right)=c-\frac{|b|^2}{a}>0$, et d'autre part $a>0$ (sinon $a<0$, $\lim_{t\to+\infty}(f(t))=-\infty$, et cela entraîne l'existence d'un réel positif T tel que $f(t)<0$ dès que $t>T$, absurde). Réciproquement, si $c-\frac{|b|^2}{a}>0$ et $a>0$, alors $T(z)=a\left|z+\frac{b}{a}\right|^2+c-\frac{|b|^2}{a}\geq c-\frac{|b|^2}{a}>0$ pour tout $z\in\mathbb{C}$. On a montré l'équivalence

$$\forall z\in\mathbb{C}\quad T(z)>0\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ ac-|b|^2>0.\end{cases}$$

I.1.b. La matrice $A=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \overline{\beta}&\gamma\end{pmatrix}$ est définie positive si et seulement si $X^*AX>0$ pour tout vecteur-colonne non nul $X={}^t(x_1,x_2)$ de $\mathbb{C}^2$. Cela s'écrit

$$\forall(x_1,x_2)\in\mathbb{C}^2\backslash\{(0,0)\}\quad {}^t(\overline{x}_1,\overline{x}_2)\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \overline{\beta}&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\alpha|x_1|^2+\beta\overline{x}_1x_2+\overline{\beta}\overline{x}_2x_1+\gamma|x_2|^2>0.\quad(\sharp)$$

Le nombre α ne peut pas être nul (sinon $(\sharp)$ n'est pas vérifiée avec $(x_1,x_2)=(1,0)$). De même $\gamma\neq0$. Posons $f(x_1,x_2)=\alpha|x_1|^2+\beta\overline{x}_1x_2+\overline{\beta}\overline{x}_2x_1+\gamma|x_2|^2$. En appliquant la question précédente deux fois, d'abord avec $(a,b,c)=\left(\alpha,\beta x_2,\gamma|x_2|^2\right)$, puis avec $(a,b,c)=\left(\gamma,\overline{\beta}x_1,\alpha|x_1|^2\right)$, on obtient

$$(1)\ \forall x_2\in\mathbb{C}^*\quad\forall x_1\in\mathbb{C}\quad f(x_1,x_2)>0\Leftrightarrow\forall x_2\in\mathbb{C}^*\quad\begin{cases}\alpha>0\\ \alpha\gamma|x_2|^2-|\beta x_2|^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha>0\\ \alpha\gamma-|\beta|^2>0\end{cases}$$

et

$$(2)\ \forall x_1\in\mathbb{C}^*\quad\forall x_2\in\mathbb{C}\quad f(x_1,x_2)>0\Leftrightarrow\forall x_1\in\mathbb{C}^*\quad\begin{cases}\gamma>0\\ \gamma\alpha|x_1|^2-\left|\overline{\beta}x_1\right|^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma>0\\ \gamma\alpha-|\beta|^2>0.\end{cases}$$

Les équivalences (1) et (2) donnent immédiatement

$$\forall(x_1,x_2)\in\mathbb{C}^2\backslash\{(0,0)\}\quad f(x_1,x_2)>0\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha>0\\ \gamma>0\\ \alpha\gamma-|\beta|^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha>0\\ \det A=\alpha\gamma-|\beta|^2>0.\end{cases}$$

[0] [ag10] v1.01β Dany-Jack Mercier

I.2.a.

$$Z^*MZ = \begin{pmatrix} \overline{z} & \widetilde{Z}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & V^* \\ V & \widetilde{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \widetilde{Z} \end{pmatrix} = a\,|z|^2 + \overline{z}V^*\widetilde{Z} + \widetilde{Z}^*Vz + \widetilde{Z}^*\widetilde{M}\widetilde{Z}.$$

I.2.b. En posant $b = V^*\widetilde{Z} = {}^t\widetilde{Z}\overline{V}$ et $c = \widetilde{Z}^*\widetilde{M}\widetilde{Z}$, on obtient $Z^*MZ = a\,|z|^2 + \overline{z}b + \overline{b}z + c$. La matrice M sera définie positive si et seulement si

$$\forall Z \neq 0 \quad Z^*MZ = a\,|z|^2 + \overline{z}b + \overline{b}z + c > 0.$$

Si l'on fixe un $\widetilde{Z}$ non nul quelconque, cela entraîne (cf. **I.1.a**) $a > 0$ et $ac - |b|^2 > 0$. Comme

$$ac - |b|^2 = ac - \overline{b}b = a\widetilde{Z}^*\widetilde{M}\widetilde{Z} - \left(\widetilde{Z}^*V\right)\left(V^*\widetilde{Z}\right) = \widetilde{Z}^*\left(a\widetilde{M} - VV^*\right)\widetilde{Z},$$

on obtient

$$a > 0 \text{ et } \forall \widetilde{Z} \neq 0 \quad \widetilde{Z}^*\left(a\widetilde{M} - VV^*\right)\widetilde{Z} > 0$$

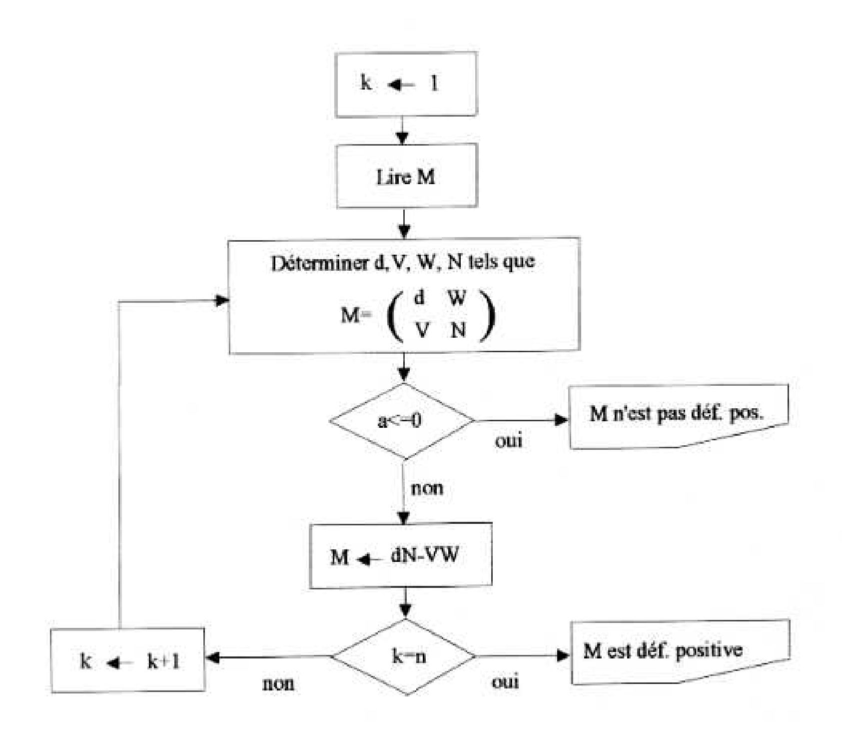
ou encore

$$a > 0 \text{ et } a\widetilde{M} - VV^* \text{ définie positive.} \quad (*)$$

Réciproquement, $(*)$ entraîne $Z^*MZ > 0$ pour tout $Z = {}^t\begin{pmatrix} \overline{z} & \widetilde{Z}^* \end{pmatrix}$ tel que $\widetilde{Z} \neq 0$ (on utilise encore **I.1.a** et les ré-écritures précédentes). Si $\widetilde{Z} = 0$, $Z^*MZ = a\,|z|^2$ sera strictement positif pour tout $z \neq 0$ puisque $a > 0$. En conclusion M sera définie positive si et seulement si $(*)$ a lieu.

I.2.c. On démontre l'équivalence par récurrence sur l'ordre n de la matrice. La propriété est triviale au rang $n = 1$. La question précédente montre que la matrice $M = M_1 = \begin{pmatrix} d_1 & V_1^* \\ V_1 & \widetilde{M_1} \end{pmatrix}$ est définie positive d'ordre n si et seulement si $d_1 > 0$ et $d_1\widetilde{M_1} - V_1V_1^*$ est définie positive d'ordre $n-1$, i.e. (hypothèse récurrente) d_2, d_2, ..., d_n stritement positifs.

I.2.d. Dans l'organigramme ci-dessous, on a noté $M = \begin{pmatrix} d & W \\ V & N \end{pmatrix}$.



I.3.a

Si $n=2$, $M_1 = \begin{pmatrix} d_1 & V_1^* \\ V_1 & \tilde{M}_1 \end{pmatrix}$ est une matrice 2x2 et :

$$\det M_1 = d_1 \tilde{M}_1 - V_1 V_1^* = M_2 = \det M_2 \quad \text{car } M_2 \text{ est un réel !}$$

I.3.b Si $n>2$ et $d_1 = 0$, $M_2 = 0.\tilde{M}_1 - V_1 V_1^*$ donc $\det M_2 = (-1)^{n-1} \det V_1 V_1^*$

Posons $V_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$. $V_1 V_1^* = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix} (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_{n-1}) = \begin{pmatrix} v_1 \bar{v}_1 & \dots & v_1 \bar{v}_{n-1} \\ \vdots & & \\ v_{n-1}\bar{v}_1 & & v_{n-1}\bar{v}_{n-1} \end{pmatrix}$ montre que :

$$\det V_1 V_1^* = v_1 \dots v_{n-1} \begin{vmatrix} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \dots & \bar{v}_{n-1} \\ \\ \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \dots & \bar{v}_{n-1} \end{vmatrix} = 0 .$$

Finalement $\det M_2 = 0$.

I.3.c

$$d_1^{n-2}\det M_1 = d_1^{n-2}\det\begin{pmatrix} d_1 & V_1^* \\ V_1 & \tilde{M}_1\end{pmatrix} = \frac{1}{d_1}\det\begin{pmatrix} d_1 & d_1 V_1^* \\ V_1 & d_1\tilde{M}_1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{d_1}\begin{vmatrix} d_1 & d_1\bar{v}_1 & \dots & d_1\bar{v}_{n-1} \\ v_1 & & & \\ \vdots & & d_1\tilde{M}_1 & \\ v_{n-1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{d_1}\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ v_1 & & & \\ \vdots & & d_1\tilde{M}_1 - \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1}\end{pmatrix}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n-1}) & \\ v_{n-1} & & & \end{vmatrix}$$

→ c'est $d_1\tilde{M}_1 - V_1V_1^* \doteq M_2$

$$= \det M_2$$

I.3.d On applique I.3.c :

$$\det M = \det M_1 = \frac{\det M_2}{d_1^{n-2}} = \frac{\det M_3}{d_1^{n-2}d_2^{n-3}} = \dots = \frac{\det M_{n-1}}{d_1^{n-2}d_2^{n-3}\dots d_{n-2}}$$

Enfin M_{n-1} étant d'ordre 2, on peut appliquer I.3.a :

$$\det M_{n-1} = \det M_n \quad \text{où} \quad M_n = [d_n]$$

Donc
$$\boxed{\det M = \frac{d_n}{d_1^{n-2}d_2^{n-3}\dots d_{n-2}}}$$

I.3.e

* $\Delta_1 = \det C_1 = \det [d_1] = d_1$

$\Delta_2 = \det C_2$ où :

$$M = \begin{pmatrix} d_1 & \bar{v}_1 & \dots & \bar{v}_{n-1} \\ v_1 & m & & \\ \vdots & & \tilde{M}_1 & \\ v_{n-1} & & & \end{pmatrix}$$

(C_2 : le bloc $\begin{pmatrix} d_1 & \bar{v}_1 \\ v_1 & m\end{pmatrix}$)

donc $\det C_2 = d_1 m - v_1\bar{v}_1$ est le terme 1-1 de la matrice $M_2 = d_1\tilde{M}_1 - V_1V_1^*$ ie d_2. On aura $\underline{\Delta_2 = \det C_2 = d_2}$.

* C_p et M donnent naissance à la même suite de nombres $d_1, d_2, \dots, d_p$ (voir lemme ci-dessous). Appliquons I.3.d à C_p :

$$\boxed{\Delta_p = \det C_p = \frac{d_p}{d_1^{p-2} d_2^{p-3} \dots d_{p-2}}}$$

lemme : d_k ne dépend que des k premières lignes et colonnes de $M = M_1$ (ie de C_k).

preuve : Notons $M^{(p)}$ la matrice déduite de M en ne conservant que les p premières lignes et colonnes de M. On a :

$d_k = M_k^{(1)}$ ne dépend que de $M_{k-1}^{(2)}$, ..., qui ne dépend que de $M_1^{(k)}$

puisque :

$$M_k = d_{k-1} \tilde{M}_{k-1} - V_{k-1} V_{k-1}^* \Rightarrow M_k^{(p)} = \underbrace{d_{k-1} \tilde{M}_{k-1}^{(p)} - (V_{k-1} V_{k-1}^*)^{(p)}}_{\text{ne dépend que de } M_{k-1}^{(p+1)}}$$

CQFD

I.3.β

M sera définie positive ssi tous les $d_1, \dots, d_n$ sont strictement positifs, ie ssi $\Delta_p > 0 \quad \forall p$.

NB : On vient d'expliciter la Méthode de Jacobi-Sylvester qui permet de tester le caractère défini positif d'une matrice hermitienne. Énonçons :

"Une matrice hermitienne est définie positive ssi tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.

Ce théorème est encore vrai dans le cas d'une matrice réelle symétrique. En effet, soit M une matrice réelle symétrique. Il faut prouver :

lemme : M est hermitienne définie positive $\Leftrightarrow$ M est réelle définie positive

preuve du lemme : si M est hermitienne définie positive, alors

$$\forall Z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \quad Z^* M Z > 0 \Rightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad {}^tXMX > 0$$

ce qui signifie que M est définie positive sur $\mathbb{R}^n$.

Réc., si $(\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad {}^tXMX > 0)$, et si $Z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ on peut écrire

$$Z = X + i\,Y \qquad \text{avec } X, Y \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} Z^*MZ &= ({}^tX - i\,{}^tY) M (X + iY) \\ &= {}^tXMX + {}^tYMY - i\,{}^tYMX + i\,{}^tXMY \\ &= {}^tXMX + {}^tYMY \quad (\text{puisque } {}^tXMY = {}^t({}^tXMY) = {}^tYMX) \end{aligned}$$

Comme $Z \neq 0$, X ou Y est non nul, par exemple $X \neq 0$, et le caractère défini positif de M sur $\mathbb{R}^n$ assure ${}^tXMX > 0$, d'où puisque ${}^tYMY \geq 0$:

$$Z^*MZ > 0$$

Finalement, M est bien définie positive sur $\mathbb{C}^n$. $\square$

I 4 a) $\tilde{M}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad M_2 = 4\tilde{M}_1 - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}(3, 2, 1) = \left(\begin{array}{c|cc} 7 & 6 & 5 \\ \hline 6 & 12 & 10 \\ 5 & 10 & 15 \end{array}\right)$

$d_1 = 4$

donc $d_2 = 7$ et $M_3 = 7\begin{pmatrix} 12 & 10 \\ 10 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}(6, 5) = \left(\begin{array}{c|c} 48 & 40 \\ \hline 40 & 80 \end{array}\right)$

donc $d_3 = 48$ et $d_4 = \det\begin{pmatrix} 48 & 40 \\ 40 & 80 \end{pmatrix} = \underline{226}$.

$d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{R}_+^*$ donc M déf. positive.

I 4 b) $d_1 = 1$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & \bar{b} \\ 0 & b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}(1\ 0\ 0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 0 \\ \hline 2 & 5 & \bar{b} \\ 0 & b & a \end{array}\right) \Rightarrow d_2 = 1$

$M_3 = \begin{pmatrix} 5 & \bar{b} \\ b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}(2\ \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & \bar{b} \\ b & a \end{pmatrix}$

donc $d_3 = 1$ et $d_4 = \det M_3 = a - |b|^2$. <u>$M$ sera déf. positive ssi $a - |b|^2 > 0$.</u>

I.4.c Toutes les matrices C_p sont du même type que A et :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & e^{-1} & e^{-2} & \dots & e^{-(n-1)} \\ e^{-1} & 1 & e^{-1} & & \vdots \\ e^{-2} & e^{-1} & 1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & e^{-1} \\ e^{-(n-1)} & \dots & & e^{-1} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ e^{-1} & 1-e^{-2} & 0 & & \\ e^{-2} & & 1-e^{-2} & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ e^{-(n-1)} & & & & 1-e^{-2} \end{vmatrix}$$

(en soustrayant e^{-1} fois la $(j-1)$-ième colonne de la j-ième colonne pour $j \geq 2$)

$= (1 - e^{-2})^{n-1}$ est strictement positif.

I.3.f s'applique : A sera définie positive.

II 1°/a) $\varphi-\lambda I$ non inversible équivaut à $\varphi-\lambda I$ non injectif car $\mathbb{C}^n$ est de dim. finie. Donc $\sigma(\varphi)=\{\lambda\in\mathbb{C} \,/\, \exists x\neq 0 \ \varphi(x)=\lambda x\}$ est l'ens. des val. propres de φ.

Si x est un vect. propre associé à λ, $(\varphi(x)|x)=(x|\varphi(x)) \Rightarrow \bar\lambda \|x\|^2=\lambda\|x\| \Rightarrow \lambda\in\mathbb{R}$

donc $\sigma(\varphi)\subset\mathbb{R}$

b) φ hermitienne, donc sa matrice A est diagonalisable dans une b.o, ie :

$$Mat(\varphi;e)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix} \quad \text{où } e=(e_1,\dots,e_n) \text{ b.o.}$$

$\varphi(\sum x_i e_i)=\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i$ et si $|\lambda_1|=\mathrm{Sup}|\lambda_i|$, on a :

$$\|\varphi(x)\|^2=\sum_{i=1}^n|\lambda_i|^2|x_i|^2\leq|\lambda_1|^2\sum_{i=1}^n|x_i|^2=|\lambda_1|^2\|x\|^2 \quad \text{donc} \quad \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|}\leq|\lambda_1| \quad \forall x\neq 0$$

Comme $\frac{\|\varphi(e_1)\|}{\|e_1\|}=|\lambda_1|$, on peut conclure $\boxed{\|\varphi\| \doteq \mathrm{Sup}_{x\neq 0}\frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|}=|\lambda_1|}$.

c) φ positif (resp. déf. pos.) entraîne $(e_i|\varphi(e_i))=\lambda_i\geq 0$ pour tout i (resp. >0) et la réciproque est évidente car $\varphi(x)=\varphi(\sum x_i e_i)=\sum\lambda_i x_i e_i$ donc

$(x|\varphi(x))=\sum\lambda_i|x_i|^2 \geq 0$ (ou >0 suivant l'hypothèse)

Dans ce cas $\boxed{\|\varphi\|=\mathrm{Sup}_{\lambda\in\sigma(\varphi)}\lambda}$

d) Si φ est hermitien positif inversible, on a :

$(\varphi^{-1}(x)|y)=(x'|\varphi(y'))=(\varphi(x')|y')=(x|\varphi^{-1}(y))$ donc φ^{-1} hermitien

où $x=\varphi(x')$
$y=\varphi(y')$

$(\varphi^{-1}(x)|x)=(x'|\varphi(x'))\geq 0$ donc φ^{-1} positif

O n'est pas val. p. de φ^{-1} car φ^{-1} bijectif. Enfin $\lambda\in\sigma(\varphi)\Leftrightarrow\frac{1}{\lambda}\in\sigma(\varphi^{-1})$ puisque :

μ vp de $\varphi^{-1} \Leftrightarrow \varphi^{-1}(x)=\mu x \Leftrightarrow \varphi(x)=\frac{1}{\mu}x$

D'après c) : $\forall\lambda\in\sigma(\varphi)$ $0<\lambda\leq\|\varphi\|$ et $\lambda^{-1}\in\sigma(\varphi^{-1})$ donc $\lambda^{-1}\leq\|\varphi^{-1}\|$

On en déduit $\boxed{\|\varphi^{-1}\|^{-1}\leq\lambda\leq\|\varphi\|}$

II 2°/ a) $\sum\left|\frac{n+1}{n+2}u_n\right|^2\leq\sum|u_n|^2<\infty$ donc $\Psi_u\in H_1$. La linéarité de Ψ est triviale car :

$$\Psi : H_1 \longrightarrow H_1$$
$$u=(u_n)_n \longmapsto \Psi_u=\left(\frac{n+1}{n+2}u_n\right)_n$$

$(u|\Psi(v))=\sum\bar u_n\frac{n+1}{n+2}v_n=(\Psi(u)|v)$ donc Ψ est hermitien.

$(u|\Psi(u))=\sum\frac{n+1}{n+2}|u_n|^2>0$ (si $u\neq 0$) donc Ψ défini positif.

$\|\Psi(u)\| = \sqrt{\sum \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 |u_n|^2} \leq \|u\| = \sqrt{\sum |u_n|^2}$ donc Ψ continue et $\|\Psi\| \leq 1$

Si $\begin{cases} u_n = 0 & \forall n \neq N \\ u_N = 1 \end{cases}$ on a $\|\Psi(u)\| = \sqrt{\left(\frac{N+1}{N+2}\right)^2} = \frac{N+1}{N+2} \to 1 \quad (N \to +\infty)$.

Donc $\boxed{\|\Psi\| = 1}$

II 2°/b) $\Psi - \lambda I$ non injectif $\Leftrightarrow \exists u \neq 0 \ \Psi(u) = \lambda u \Leftrightarrow \exists u \neq 0 \ \forall n \ \frac{n+1}{n+2} u_n = \lambda u_n$

$\Leftrightarrow \forall n \ u_n = 0$ ou $\lambda = \frac{n+1}{n+2}$

Les valeurs propres sont donc les $\lambda_N = \frac{N+1}{N+2}$ $(N \in \mathbb{N})$ et les vecteurs propres associés à λ_N sont les suites $u = (u_n)$ où $u_n = 0$ si $n \neq N$ et $u_N = 1$.

II 2°/c) * $\Psi - I$ non surjectif (donc $1 \in \sigma(\Psi)$ et 1 n'est pas une val. propre)

$\forall v \in H_1 \quad \exists u \in H_1 \quad \Psi(u) - u = v$?

$\forall n \quad \frac{n+1}{n+2} u_n - u_n = v_n$ soit $-u_n = (n+2) v_n$

> Autre solution : $\frac{n+1}{n+2} < 1$ entraîne $\Psi_u \neq u$ pour tout u, et $(\Psi - I)(u) = 0$ n'aura pas de solution u dans H_1. Ainsi $0 \notin \mathrm{Im}\,\Psi$, et Ψ n'est pas surjective.

Si $v_n = \frac{1}{n}$, $u_n = -\frac{n+2}{n}$ ne définissent pas une suite de H_1 car $\sum \left(\frac{n+2}{n}\right)^2 = \infty$.

Donc $\Psi - I$ non surjectif.

* Si $\lambda \notin \left\{\frac{n+1}{n+2} / n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{1\}$, $\Psi - \lambda I$ est injectif d'après le b). Montrons que $\Psi - \lambda I$ est aussi surjectif : on doit résoudre $\frac{n+1}{n+2} u_n - \lambda u_n = v_n$,

d'où $u_n = \frac{n+2}{n+1 - \lambda(n+2)} v_n$

On a bien $\sum |u_n|^2 = \sum \left|\frac{n+2}{n+1-\lambda(n+2)}\right|^2 |v_n|^2 < \infty$. Ccl : $\boxed{\sigma(\Psi) = \left\{\frac{n+1}{n+2} / n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{1\}}$

II 2°/d) $\|\Psi^{-1}(v)\|^2 = \sum \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 |v_n|^2 \leq 4 \sum |v_n|^2 = 4\|v\|^2$ donc $\|\Psi^{-1}\| \leq 2$.

Définissons $v \in H_1$ par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_n = 0 \text{ si } n > 1 \end{cases}$. Alors $\|\Psi^{-1}(v)\| = 2$. Donc $\boxed{\|\Psi^{-1}\| = 2}$

On aura bien $\sigma(\Psi) \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

II 3°/a) Si $|z| > \|\varphi\|$, $\sum_{k \geq 0} \frac{\|\varphi^k\|}{|z^k|} \leq \sum \left(\frac{\|\varphi\|}{|z|}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{\|\varphi\|}{|z|}}$ donc $\sum_{k \geq 0} z^{-k} \varphi^k$ converge normalement

Calculons :

$(\varphi - zI)\left(\sum_{k=0}^{K} z^{-k} \varphi^k\right) = \sum_0^K z^{-k} \varphi^{k+1} - \sum_0^K z^{-k+1} \varphi^k = z^{-K} \varphi^{K+1} - zI$

Si $K \to +\infty$, $\frac{\varphi^{K+1}}{z^K}$ tend vers 0 (car $\sum \frac{\varphi^k}{z^k}$ converge) d'où $(\varphi - zI)\left(\sum_{k \geq 0} z^{-k} \varphi^k\right) = -zI$

soit $(\varphi - zI)\left(\sum -z^{-k-1} \varphi^k\right) = I \Rightarrow z \notin \sigma(\varphi)$. Ccl : $\boxed{\sigma(\varphi) \subset \overline{B}(0, \|\varphi\|)}$

II 3°/b) $\sigma(\varphi - I) \subset \overline{B(0, \|\varphi - I\|)}$

Or $\lambda \in \sigma(\varphi - I) \Leftrightarrow \varphi - I - \lambda I$ non inv $\Leftrightarrow 1+\lambda \in \sigma(\varphi)$.

Si $\mu \in \sigma(\varphi)$, $\mu - 1 \in \sigma(\varphi - I)$ donc $|\mu - 1| \leq K = \|\varphi - I\|$. oui

II 4°/a) $\|\varphi(x) + i\lambda x\|^2 = \|\varphi(x)\|^2 + |\lambda|^2 \|x\|^2 + 2\,\underbrace{Re\,(\varphi(x) \mid i\lambda x)}$

$\leq \|\varphi\|^2 \|x\|^2 + \lambda^2 \|x\|^2$ $\quad Re\ \lambda i\, (\varphi(x)|x) = 0$ (car φ end. hermitien $\Rightarrow (\varphi(x)|x) \in \mathbb{R}$)

donc $\boxed{\|\varphi + i\lambda I\|^2 \leq \|\varphi\|^2 + \lambda^2}$

II. 4°/b) Si $z = \alpha + i\beta$ et si $\varphi - zI$ n'est pas inversible, alors si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi + i\lambda I \in \mathcal{L}(H)$, $\varphi + i\lambda I - (z + i\lambda) I$ non inversible et (cf 3°/a) :

$|z + i\lambda|^2 \leq \|\varphi + i\lambda I\|^2$

$\alpha^2 + (\beta + \lambda)^2 \leq \|\varphi\|^2 + \lambda^2$ d'après 4°/a).

Ceci $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. $2\beta\lambda + \alpha^2 + \beta^2 - \|\varphi\|^2 \leq 0$ $\forall \lambda$ entraîne $\begin{cases} \beta = 0 & \text{ie } z \in \mathbb{R} \\ \alpha^2 \leq \|\varphi\|^2 \end{cases}$.

Ainsi $\boxed{\sigma(\varphi) \subset [-\|\varphi\|, \|\varphi\|] \subset \mathbb{R}}$

II 5°/a) φ hermitien inversible $\Rightarrow \varphi^{-1}$ hermitien (cf II 1°/d)) et le II 4°/ donne :

$\sigma(\varphi^{-1}) \subset [-\|\varphi^{-1}\|, \|\varphi^{-1}\|]$

II. 5. b) $\lambda \in \sigma(\varphi) \Leftrightarrow \varphi - \lambda I$ non inversible ← équivalent! →

$\frac{1}{\lambda} \in \sigma(\varphi^{-1}) \Leftrightarrow \varphi^{-1} - \frac{1}{\lambda} I$ non inv. $\Leftrightarrow \underset{\text{inv.}}{\varphi}\left(\varphi^{-1} - \frac{1}{\lambda} I\right) = I - \frac{1}{\lambda}\varphi$ non inversible

* D'autre part : $\|x\| = \|\varphi\varphi^{-1}(x)\| \leq \|\varphi\|\,\|\varphi^{-1}\|\,\|x\| \Rightarrow \boxed{\|\varphi\|\,\|\varphi^{-1}\| \geq 1}$

Du II 4°/b), on déduit $|\lambda| \leq \|\varphi\|$ dès que $\lambda \in \sigma(\varphi)$

Si $\lambda \in \sigma(\varphi)$, $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(\varphi^{-1})$ d'où $\left|\frac{1}{\lambda}\right| \leq \|\varphi^{-1}\|$ soit $\frac{1}{\|\varphi^{-1}\|} \leq |\lambda|$.

Finalement, compte tenu de $\|\varphi\| \geq \|\varphi^{-1}\|^{-1}$:

$$\boxed{\lambda \in \sigma(\varphi) \Rightarrow \|\varphi^{-1}\|^{-1} \leq |\lambda| \leq \|\varphi\|}$$

III 1°/a) $\sum_{p\geq 0} |u_p v_{n-p}| \leq B \sum |u_p| < \infty$ car $u \in V$, B désignant la borne sup. de $|v_{n-p}|$

De même $\sum_{p\leq 0} |u_p v_{n-p}| < \infty$

III 1. b) Cauchy-Schwarz :

$$\left|\sum_{p=-P}^{P} u_p v_{n-p}\right|^2 \leq \left|\sum_{p=-P}^{P} \sqrt{|u_p|}\cdot\sqrt{|u_p|}|v_{n-p}|\right|^2 \leq \left(\sum_{p=-P}^{P}|u_p|\right)\left(\sum_{p=-P}^{P}|u_p||v_{n-p}|^2\right)$$

Si $P \to +\infty$, vu la continuité de $x \mapsto |x|$, on obtient :

$$|w_n|^2 \leq \|u\|_1 \sum_{-\infty}^{+\infty} |u_p||v_{n-p}|^2$$

($\sum_{-\infty}^{+\infty}|u_p||v_{n-p}|^2$ converge car $|v_n|$ borné et $\sum_{-\infty}^{+\infty}|u_p| < \infty$)

III. 1. c) $\sum_{n=-N}^{N} |w_n|^2 \leq \|u\|_1 \sum_{p\in\mathbb{Z}} |u_p| \underbrace{\left(\sum_{n=-N}^{N} |v_{n-p}|^2\right)}_{\leq \|v\|^2} \leq \|u\|_1^2 \|v\|^2$

(on peut intervertir les 2 $\sum$ car il s'agit de séries à termes positifs [T] séries)

d'où $\|w\|^2 \leq \|u\|_1^2 \|v\|^2$ en passant à la limite.

d'où $\boxed{\|w\| \leq \|u\|_1 \|v\|}$

III. 1. d) $\varphi_u : H_2 \longrightarrow H_2$

$v \longmapsto w = (w_n)_n$ où $w_n = \sum_{p\in\mathbb{Z}} u_p v_{n-p}$

$\|w\| \leq \|u\|_1 \|v\|$ montre que φ_u est continue et $\|\varphi_u\| \leq \|u\|_1$

III 2°/a) $v^N = \sum_{k=-N}^{N} v_k \delta^k \in H_2$ $\qquad \delta^k = (0, 0, \ldots, \underset{\text{rang } 0}{0}, \ldots, 0, \underset{\text{rang } k}{1}, 0, \ldots)$

$v^N = (\ldots, 0, v_{-N}, \ldots, v_{-1}, v_0, v_1, \ldots, v_N, 0, \ldots)$ est à support fini.

$\|v - v^N\|^2 = \sum_{|k|>N} |v_k|^2$ tendra vers 0 quand $N \to +\infty$ puisque $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |v_k|^2 < \infty$

III. 2. b)

$$(\varphi_u(\delta^k))_n = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} u_\ell v_{n-\ell} \quad \text{où } v = \delta^k$$

$$= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} u_\ell \delta^k_{n-\ell} = u_{n-k}$$

donc :

$$(\delta^p | \varphi_u(\delta^k)) = \sum_n \bar{\delta}^p_n \varphi_u(\delta^k)_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta^p_n u_{n-k} = u_{p-k} = e^{-|p-k|}$$

$$(\varphi_u(\delta^p) | \delta^k) = \sum_n \overline{\varphi_u(\delta^p)_n}\, \delta^k_n = \sum_n u_{n-p} \delta^k_n = u_{k-p} = e^{-|k-p|}$$

et on a bien l'égalité $(\delta^p | \varphi_u(\delta^k)) = (\varphi_u(\delta^p) | \delta^k)$ d'où l'on déduit

par linéarité et -linéarité :

$$\forall N,P \quad (v^P \mid \varphi_u(w^N)) = (\varphi_u(v^P) \mid w^N)$$

Si $N,P \to +\infty$, $w^N \to w$ et $v^P \to v$ et, l'appl. sesquilinéaire $(u,v) \mapsto (u|v)$ étant continue : $(v \mid \varphi_u(w)) = (\varphi_u(v) \mid w)$ donc φ_u est hermitien.

III 2°/c)

$$(\varphi_u(v^N)|v^N) = \left(\sum_{k=-N}^{N} v_k \varphi_u(\delta^k) \mid v^N\right) = \sum_{\substack{-N\le k\le N\\ -N\le \ell\le N}} \bar{v}_k v_\ell \underbrace{(\varphi_u(\delta^k) \mid \delta^\ell)}_{=e^{-|\ell-k|}}$$

$$= (\bar{v}_{-N}, \dots, \bar{v}_N)\,(e^{-|\ell-k|})_{k,\ell} \begin{pmatrix} v_{-N} \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} \geq 0 \text{ d'après I.4°/c)}$$

III 3°/a) $\forall t \in \mathbb{R}$ $|v_n e^{int}| = |v_n|$ et $\sum |v_n| < \infty$ d'où la conv. normale, et donc uniforme, de $\sum_{\mathbb{Z}} v_n e^{int}$ sur $\mathbb{R}$. Chaque Fct. $v_n e^{int}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, la limite uniforme $F_v(t) = \sum_{\mathbb{Z}} v_n e^{int}$ sera continue. Elle est 2π-périodique.

III. 3 b) Si $w = \varphi_v(\delta^k)$ $F_w(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} w_n e^{int} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_{n-k} e^{int}$ car $(\varphi_v(\delta^k))_n = v_{n-k}$ (III 2°/b))

$$F_w(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} v_m e^{i(k+m)t} = e^{ikt} F_v(t)$$

$$\boxed{F_w(t) = e^{ikt} F_v(t)}$$

2ᵉ sol pour le III.3.d :

$F_v(t).F_{\tilde{v}}(t) = (\sum_{-\infty}^{+\infty} v_p e^{ipt})(\sum_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}_q e^{iqt})$

$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{p+q=n} v_p \tilde{v}_q e^{int}$ (car les conv. des 2 séries préc. sont absolues, une fois t fixé.)

Donc :

$c_n(F_v.F_{\tilde{v}}) = \sum_{p+q=n} v_p \tilde{v}_q = \varphi_v(\tilde{v})$

III. 3. c) $v, \tilde{v} \in V$ $\varphi_v(\tilde{v}) = \varphi_{\tilde{v}}(v)$?

$\varphi_v(\tilde{v}) = (\tilde{w}_n)_n$ où $\tilde{w}_n = \sum_{p\in\mathbb{Z}} v_p \tilde{v}_{n-p}$

$\varphi_{\tilde{v}}(v) = w$ où $w_n = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \tilde{v}_p v_{n-p}$ sont manifestement égaux.

d) Notons $c_n(F_v F_{\tilde{v}})$ le n-ième coeff. de Fourier exponentiel de $F_v F_{\tilde{v}}$.

On a :

$$c_n(F_v F_{\tilde{v}}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_v(t) F_{\tilde{v}}(t) e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_k v_k e^{ikt}\right)\left(\sum_\ell \tilde{v}_\ell e^{i\ell t}\right) e^{-int}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_k v_k \int_0^{2\pi} \sum_\ell \tilde{v}_\ell e^{i(k+\ell)t} e^{-int}\,dt \quad \text{(la série } \textstyle\sum v_k e^{ikt} \text{ convergeant uniformément)}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k,\ell} v_k \tilde{v}_\ell \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(k+\ell-n)t}\,dt}_{=0 \text{ dès que } k+\ell-n\neq 0} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k+\ell=n} v_k \tilde{v}_\ell . 2\pi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v_k \tilde{v}_{n-k}$$

$$= \varphi_v(\tilde{v})$$

III 3°/ e)

$$F_u(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n e^{int} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-|n|} e^{int}$$

$$\sum_{n\geq 0} e^{-n} e^{int} = \frac{1}{1-e^{it-1}} \quad \text{et} \quad \sum_{n\leq -1} e^{+n} e^{int} = \sum_{n\geq 1} e^{-n} e^{-int} = \frac{1}{e^{1+it}-1}$$

entraînent : $F_u(t) = \frac{1}{1-e^{it-1}} + \frac{1}{e^{1+it}-1} = \frac{e^{1+it}-e^{it-1}}{(1-e^{it-1})(e^{it+1}-1)} = e^{it}\frac{e-e^{-1}}{(e-e^{it})(e^{it}-e^{-1})}$

donc $F_u(t) \neq 0 \ \forall t$, et : $\frac{1}{F_u(t)} = e^{-it}\cdot\frac{(e-e^{it})(e^{it}-e^{-1})}{e-e^{-1}} = \frac{e}{e^2-1}(e \underbrace{-e^{it}-e^{-it}}_{-2\cos t} + e^{-1})$

$$\boxed{\frac{1}{F_u(t)} = \frac{e^2+1-2e\cos t}{e^2-1}}$$

$*$ $F_{\tilde u} F_u = 1 \iff \underbrace{F_{\tilde u}(t)}_{\|} = \frac{1}{F_u(t)} = \frac{e^2+1}{e^2-1} - \frac{2e}{e^2-1}\underbrace{\cos t}_{\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}}$

$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde u_n e^{int}$ est la série de Fourier de $F_{\tilde u}(t)$

On aura donc : $\tilde u_0 = \frac{e^2+1}{e^2-1}$ $\quad \tilde u_1 = \frac{e}{1-e^2} = \tilde u_{-1}$ $\quad$ et $\tilde u_n = 0$ si $n \notin \{0,1,-1\}$

III 3°/ β) $\underline{\varphi_u \circ \varphi_{\tilde u}(\delta^k) = \delta^k}$?

Notons $\varphi_{\tilde u}(\delta^k) = w$

b) $\Rightarrow$ $F_w(t) = e^{ikt} F_{\tilde u}(t)$

d'où $\varphi_u(w) \underset{d)}{=} (c_n(F_u.F_w))_n = (c_n(F_u.e^{ikt}F_{\tilde u}))_n = (c_n(e^{ikt}))_n$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikt}e^{-int}dt\right)_n = \delta^k \quad \text{d'où l'égalité.}$$

Ainsi $\varphi_u \circ \varphi_{\tilde u} = Id \in \mathcal{L}(H_2)$ car $(\delta^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ base de $\mathcal{L}(H_2)$. φ_u est inversible

et $\boxed{\varphi_u^{-1} = \varphi_{\tilde u}}$

IV 1°/ a)

$$\|u\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-|n|} = 1 + 2\sum_{n\geq 1} e^{-n} = 1 + 2\frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} = \frac{e+1}{e-1}$$

$$\|\tilde u\|_1 = \frac{e^2+1}{e^2-1} + 2\frac{e}{e^2-1} = \frac{e+1}{e-1}$$

Le III 1°/ d) entraîne alors : $\|\varphi_u\| \leq \|u\|_1 = \frac{e+1}{e-1}$ et $\|\varphi_u^{-1}\| = \|\varphi_{\tilde u}\| \leq \|\tilde u\|_1 = \frac{e+1}{e-1}$

IV 1°/ b)

$$\|u-\delta^0\|_1 = 2\sum_{n\geq 1} e^{-n} = \frac{2e^{-1}}{1-e^{-1}} \Rightarrow \|\underbrace{\varphi_u - I}_{\substack{\| \\ \varphi_{u-\delta^0}}}\| \leq \|u-\delta^0\|_1 = \frac{2}{e-1}$$

(car $\varphi_{u-\delta^0}(v) = w$ où $w_n = \sum_p (u-\delta^0)_p v_{n-p} = \sum_p u_p v_{n-p} - v_n$

ie $\varphi_{u-\delta^0}(v) = \varphi_u(v) - I(v)$)

$$\text{II } 3°/b) \Rightarrow \sigma(\varphi_u) \subset B(1, \|\varphi_u - I\|) \subset \overline{B\left(1, \frac{2}{e-1}\right)}$$

$$\text{II } 5°/b) \Rightarrow \sigma(\varphi_u) \subset [-\|\varphi_u\|, -\|\varphi_u^{-1}\|^{-1}] \cup [\|\varphi_u^{-1}\|^{-1}, \|\varphi_u\|]$$

$$\subset \left[-\frac{e+1}{e-1}, -\frac{e-1}{e+1}\right] \cup \left[\frac{e-1}{e+1}, \frac{e+1}{e-1}\right]$$

On vérifie que $1 - \frac{2}{e-1} > -\frac{e-1}{e+1} \iff e^2-2e-1>0$ vrai pour conclure :

$$\boxed{\sigma(\varphi_u) \subset \left[\frac{e-1}{e+1}, \frac{e+1}{e-1}\right]}$$

IV 2°/ a) Si $n>p$,

$$w_n = (\varphi_u(v))_n - \left(\sum e^{-|n|} e^{-in\alpha}\right) \underbrace{v_n}_{\substack{\| \\ 0 \text{ car } n>p}}$$

et $(\varphi_u(v))_n = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{-|\ell|} v_{n-\ell} = \sum_{\ell=n-p}^{n+p} e^{-|\ell|} e^{i(n-\ell)\alpha}$

($|n-\ell| \leq p$ pour que $v_{n-\ell} \neq 0$)

Finalement : $|w_n| = \left|\sum_{\ell=n-p}^{n+p} e^{-|\ell|} e^{i(n-\ell)\alpha}\right| \leq \sum_{\ell=n-p}^{n+p} e^{-\ell} = e^{p-n} \cdot \frac{1-(e^{-1})^{2p+1}}{1-e^{-1}}$

$$\boxed{|w_n| \leq \frac{e^{p-n}}{1-e^{-1}}}$$

donc $\sum_{n=p+1}^{\infty} |w_n|^2 \leq \sum_{n\geq p+1} \frac{e^{2p-2n}}{(1-e^{-1})^2} = \frac{e^{2p}}{(1-e^{-1})^2} \sum_{n\geq p+1} e^{-2n} = \frac{e^{2p}}{(1-e^{-1})^2} \cdot e^{-2(p+1)} \cdot \frac{1}{1-e^{-2}}$

$$\leq \frac{e^{-2}}{(1-e^{-1})^2(1-e^{-2})} = K_0 \text{ indépendant de } p.$$

IV 2°/b) Si $0 \le n \le p$,

$$|w_n| = \Big| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{-|\ell|} \underbrace{v_{n-\ell}}_{\substack{=0 \text{ si } |n-\ell| \ge p \\ v_{n-\ell} = e^{i(n-\ell)\alpha} \text{ sinon}}} - \sum_{p \in \mathbb{Z}} \underbrace{v_n}_{= e^{in\alpha}} e^{-|p|} e^{-ip\alpha} \Big|$$

$$= \Big| -\sum_{-\infty}^{n-p-1} e^{k} \cdot e^{-ik\alpha} - \sum_{n+p+1}^{\infty} e^{-k} e^{-ik\alpha} \Big| \le \sum_{-\infty}^{n-p-1} e^{k} + \sum_{n+p+1}^{\infty} e^{-k}$$

$$|w_n| \le \sum_{k=p-n+1}^{\infty} e^{-k} + \sum_{k=n+p+1}^{\infty} e^{-k} = e^{n-p-1} \frac{1}{1-e^{-1}} + e^{-n-p-1} \frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{e^{-p-1}}{1-e^{-1}} (e^{n} + e^{-n})$$

$$\sum_{n=0}^{p} |w_n|^2 \le \sum_{n=0}^{p} \frac{e^{-2(p+1)}}{(1-e^{-1})^2} (e^{n} + e^{-n})^2 = \frac{e^{-2(p+1)}}{(1-e^{-1})^2} \sum_{n=0}^{p} e^{2n} + e^{-2n} + 2$$

$$\le \frac{1}{(1-e^{-1})^2} \left(\frac{1}{1-e^{2}} + \frac{1}{1-e^{-2}} \right) + \frac{2}{(1-e^{-1})^2} \underbrace{(p+1) e^{-2(p+1)}}_{\substack{\text{borné si } p \ge 0 \\ (\text{car } \lim_{x \to +\infty} x e^{-2x} = 0)}} \le K_1$$

indép. de p.

* Cas où $n < 0$:

Il faut observer que $(w^{\alpha,p})_n = (w^{-\alpha,p})_{-n}$, d'où les majorations quand $n < 0$.

(En effet : $(w^{\alpha,p})_n = (\varphi_u(v))_n - F_u(-\alpha) \cdot v_n = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ |n-k| \le p}} e^{-|k|} \cdot e^{i(n-k)\alpha} - \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-|k|} e^{-ik\alpha} \right) e^{in\alpha}$ (voir p12) si $|n| \le p$ (sinon 0)

IV 3°/a) $\|v^{\alpha,p}\|^2 = \sum_{-p}^{p} 1 = 2p+1$

donc $\|y^p\| = \dfrac{\|w^{\alpha,p}\|}{\|v^{\alpha,p}\|} \le \dfrac{K}{\sqrt{2p+1}} \Rightarrow \lim_{p \to +\infty} y^p = 0$

Par l'absurde, si $F_u(-\alpha) \notin \sigma(\varphi_u)$, alors $\varphi_u - F_u(-\alpha) I$ serait inversible dans $\mathcal{L}(H_2)$, d'inverse θ, et pour tout p :

$$w^{\alpha,p} = (\varphi_u - F_u(-\alpha) I)(v^{\alpha,p})$$

En divisant par $\|v^{\alpha,p}\|$:

$$y^p = (\varphi_u - F_u(-\alpha) I)(x^p)$$

$$\theta(y^p) = x^p$$

Mais θ est continue, $y^p \to 0$ donc $\lim_{p \to +\infty} x^p = 0$ ce qui est absurde car $\|x^p\| = 1$.

IV 3°/ b)

$F_u(-\alpha) = \dfrac{e^2-1}{e^2+1-2e\cos\alpha}$ et si α varie dans $\mathbb{R}$, $F_u(-\alpha)$ décrit $\left[\dfrac{e-1}{e+1}, \dfrac{e+1}{e-1}\right]$,

donc $\left[\dfrac{e-1}{e+1}, \dfrac{e+1}{e-1}\right] \subset \sigma(\varphi_u)$. Compte tenu de l'inclusion inverse montrée en IV 1°/, on aura l'égalité.

FIN

REMARQUE

IV.2.b

• Vérifions que $(w^{\alpha,p})_n = (w^{-\alpha,p})_{-n}$:

On a $(w^{-\alpha,p})_{-n} = \underbrace{\varphi_u(v^{-\alpha,p})_{-n}}_{} - \underbrace{F_u(+\alpha)}_{F_u(-\alpha)} \cdot \underbrace{v^{-\alpha,p}_{-n}}_{}$

$\begin{cases} 0 \text{ si } |-n|>p \\ e^{i(-n)(-\alpha)} = e^{in\alpha} \text{ si } |n|\leq p \end{cases}$ c'est $v^{\alpha,p}_n$ dans les 2 cas.

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k v^{-\alpha,p}_{-n-k} = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ |-n-k|\leq p}} e^{-|k|} e^{i(-n-k)(-\alpha)} = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ |n+k|\leq p}} e^{-|k|} e^{i(n+k)\alpha}$$

$$= \sum_{\substack{k'\in\mathbb{Z}\\ |n-k'|\leq p}} e^{-|k'|} \underbrace{e^{i(n-k')\alpha}}_{v_{n-k'}} = \varphi_u(v^{\alpha,p})_n$$

ouf.

SESSION DE 1990

CONCOURS EXTERNE

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

L'usage des instruments de calcul, en particulier des calculatrices électroniques de poche — y compris calculatrices programmables et alphanumériques — à fonctionnement autonome, non imprimantes, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

2 feuilles de papier millimétré.

Tournez la page S.V.P.

NOTATIONS ET OBJECTIFS DU PROBLÈME

Dans tout le problème, P désigne le plan euclidien orienté, n désigne un entier supérieur ou égal à 2, et $\mathscr{E}$ un ensemble à n éléments (2 à 2 distincts) $A_1, \ldots, A_n$ de P.

On note Ω le complémentaire de $\mathscr{E}$ dans P.

Chaque point A_i exerce sur un point M quelconque de Ω une force d'attraction $\vec{F}_i = \dfrac{\overrightarrow{MA_i}}{MA_i^2}$ (où MA_i désigne la longueur du segment $[M\,A_i]$).

Le but du problème est l'étude de l'ensemble d $(\mathscr{E})$ des points M de Ω vérifiant la relation :

(1) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{MA_i}}{MA_i^2} = \vec{0}$$

c'est-à-dire de l'ensemble des positions d'équilibre du point M.

Les parties C et D sont indépendantes. Cependant, elles dépendent des parties A et B dont les candidats pourront éventuellement utiliser les résultats sans les avoir démontrés.

A. Description de d $(\mathscr{E})$ lorsque les points A_i sont alignés

On suppose, dans toute cette partie, que les A_i sont alignés sur une droite D. On rapporte cette droite à un repère normé $(O\,;\vec{u})$, et on note $a_1, \ldots, a_n$ les abscisses respectives des points $A_1, \ldots, A_n$.

On suppose de plus que : $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

A.1. Montrer que d $(\mathscr{E})$ est inclus dans D.

A.2. On suppose, dans cette question seulement, que $n = 2$.
Montrer que si M appartient à d $(\mathscr{E})$, il vérifie l'égalité $MA_1 = MA_2$; et déterminer d $(\mathscr{E})$.

A.3. Montrer que d $(\mathscr{E})$ est inclus dans le segment $[A_1\, A_n]$.

A.4. Pour tout réel x différent de $a_1, \ldots, a_n$, on note M le point de D d'abscisse x.

A.4.*a*. Calculer en fonction de $x, a_1, \ldots, a_n$, l'abscisse $\varphi(x)$ du vecteur

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{MA_i}}{MA_i^2}.$$

A.4.*b*. Construire le tableau de variations de la fonction $\varphi : x \to \varphi(x)$, en précisant les limites de la fonction φ aux bornes des intervalles où elle est définie.

A.4.*c*. En déduire le nombre d'éléments de d $(\mathscr{E})$, et la position relative des points de d $(\mathscr{E})$ par rapport aux points A_i.

B. Description de d ($\mathscr{E}$) dans le cas général et étude de quelques exemples

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On note a_i l'affixe du point A_i quel que soit i compris entre 1 et n.

B.1. Soit M un point de Ω d'affixe z.

Montrer qu'il appartient à d ($\mathscr{E}$) si et seulement si $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{z-a_i} = 0$.

B.2. On considère le polynôme $Q(X) = (X - a_1) \dots (X - a_n)$, et on note $Q'(X)$ son polynôme dérivé.

B.2.*a*. Écrire la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $f(X) = \dfrac{Q'(X)}{Q(X)}$.

B.2.*b*. En déduire que d ($\mathscr{E}$) est l'ensemble de tous les points M du plan P dont l'affixe z vérifie $Q'(z) = 0$.

B.2.*c*. En déduire que d ($\mathscr{E}$) n'est pas vide et que le nombre d'éléments de d ($\mathscr{E}$) est inférieur ou égal à $n-1$.

B.3. On suppose que d ($\mathscr{E}$) a exactement $n-1$ éléments.

Montrer que d ($\mathscr{E}$) a même isobarycentre que $\mathscr{E}$.

Montrer que si $\mathscr{E}'$ est une partie de P ayant le même nombre d'éléments n que la partie $\mathscr{E}$ et vérifiant d ($\mathscr{E}'$) = d ($\mathscr{E}$), alors on a ou bien $\mathscr{E}' = \mathscr{E}$, ou bien $\mathscr{E}' \cap \mathscr{E} = \varnothing$.

B.4. Dans cette question, on suppose $n = 4$, $a_1 = a$, $a_2 = -\bar{a}$, $a_3 = -a$, $a_4 = \bar{a}$ où a est un nombre complexe qui n'est ni réel, ni imaginaire pur.

Discuter, selon la nature du quadrilatère $A_1 A_2 A_3 A_4$, le nombre d'éléments de d ($\mathscr{E}$). (Utiliser B.2.*b*.)

B.5. Dans cette question, on suppose $n = 3$, $a_1 = \alpha + i\beta$, $a_2 = \alpha - i\beta$, $a_3 = -2\alpha$ où α et β sont deux nombres réels vérifiant $\alpha\sqrt{3} > \beta > 0$.

B.5.*a*. En utilisant B.2.*b*, montrer que d ($\mathscr{E}$) a deux éléments F et F' dont on précisera les coordonnées.

B.5.*b*. Montrer qu'il existe une ellipse $\mathscr{S}$ de foyers F et F' qui passe par le milieu I du segment $[A_1 A_2]$ et préciser son équation dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

B.5.*c*. Calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{S}$ avec les droites $(A_1 A_3)$ et $(A_2 A_3)$. (On pourra utiliser une représentation paramétrique de ces droites).

B.5.*d*. Quelle propriété remarquable possède l'ellipse $\mathscr{S}$ relativement au triangle $A_1 A_2 A_3$?

B.6. Montrer que si s est une similitude, directe ou non, du plan, elle vérifie :

$$s(\mathrm{d}(\mathscr{E})) = \mathrm{d}(s(\mathscr{E})).$$

Tournez la page S.V.P.

B.7. On rappelle que $\mathscr{E}$ est l'ensemble des sommets d'un polygone régulier si et seulement si $\mathscr{E}$ est invariant par une rotation r d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$.

B.7.*a.* Déduire de B.6. et B.2.*c.* que, si $\mathscr{E}$ est l'ensemble des sommets d'un polygone régulier, alors $d(\mathscr{E})$ est réduit à un point.

B.7.*b.* Réciproquement, montrer que si $d(\mathscr{E})$ est réduit à un point, alors $\mathscr{E}$ est l'ensemble des sommets d'un polygone régulier (utiliser B.2.*b.*).

C. Recherche de $\mathscr{E}$ connaissant d $(\mathscr{E})$ dans un cas particulier

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O ; \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$, et on note x_1, x_2, x_3 les coordonnées d'un point M générique de E.

$\vec{E}$ désigne l'espace vectoriel attaché à E, et α un réel strictement positif.

C.1. Étude d'une surface de E.

C.1.*a.* Soit σ l'endomorphisme de $\vec{E}$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ est :

$$H = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Trouver une base orthonormée $\mathscr{B}' = (\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \vec{u}'_3)$ de vecteurs propres de σ, et préciser la matrice H' de σ dans cette base.

C.1.*b.* Soit Σ la surface de E définie par l'équation :

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = -3\alpha^2 .$$

Trouver une équation de Σ dans le repère $\mathscr{R}' = (O ; \vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \vec{u}'_3)$.

En déduire la nature de l'intersection $\mathscr{C}$ de Σ et du plan d'équation :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 .$$

C.1.*c.* Soit $\mathscr{C}'$ la projection orthogonale de $\mathscr{C}$ sur le plan Π passant par O et de vecteurs directeurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

Écrire l'équation de $\mathscr{C}'$ dans le repère $(O ; \vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

Calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}'$ avec les deux axes de ce repère, ainsi que celles des points de $\mathscr{C}'$ en lesquels la tangente est parallèle à l'un ou l'autre de ces axes.

Déterminer les axes de symétrie orthogonale de $\mathscr{C}'$, puis construire $\mathscr{C}'$ dans le cas où $\alpha = 4$, l'unité de longueur étant égale au centimètre.

C.1.*d*. On note D_1, D_2, D_3 les trois droites d'intersection du plan d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ avec les trois plans d'équations respectives :

$$x_2 = x_3, \quad x_3 = x_1, \quad \text{et} \quad x_1 = x_2.$$

Construire sur la figure précédente les projections orthogonales D'_1, D'_2 et D'_3 sur Π de ces trois droites.

On note Γ l'ensemble $\mathscr{C}$ privé de ses points d'intersection avec les droites D_1, D_2, D_3.

Décrire les projections orthogonales Γ' et Γ'' de Γ sur, respectivement, le plan Π et la droite Δ issue de O et de vecteur directeur $\vec{u}_1$.

C.2. **Application :**

Une droite D du plan est rapportée à un repère normé $(O : \vec{u})$, et U, V sont deux points de D d'abscisses respectives α et $-\alpha$.

Soient A_1, A_2, A_3 trois points distincts de D d'abscisses respectives x_1, x_2, x_3. On pose :

$$\mathscr{F} = \{ A_1, A_2, A_3 \}.$$

C.2.*a*. Montrer que $d(\mathscr{F})$ est égal à $\{U, V\}$ si et seulement si le point M de E, de coordonnées x_1, x_2, x_3 (dans le repère $\mathscr{R}$) appartient à Γ (cf C.1.*d*.).

C.2.*b*. On note I et J les points de D d'abscisses 2α et -2α respectivement, et on note Λ le segment [I J] privé des points I, J, U, V.

Montrer que l'ensemble de toutes les parties $\mathscr{F}$ à 3 éléments de D, qui vérifient $d(\mathscr{F}) = \{U, V\}$, forme une partition de Λ.

D. Cas où $\mathscr{E}$ est l'ensemble des trois sommets d'un triangle non équilatéral

D.1. L'ellipse de Steiner d'un triangle ABC.

On rappelle qu'une transformation affine transforme toute ellipse en une ellipse (dans toute la suite le mot « ellipse » désigne une ellipse (au sens strict) ou un cercle). On rappelle également que les seules ellipses ayant plus de deux axes de symétrie orthogonale sont les cercles.

D.1.*a*. Soit $\mathscr{S}$ une ellipse du plan P, A_1 et A_2 deux points distincts de $\mathscr{S}$, et T_1, T_2 les tangentes à $\mathscr{S}$ en A_1, A_2 respectivement. On suppose les droites T_1, T_2 sécantes en un point I, et on note J le milieu du segment $[A_1 A_2]$.

Montrer que $\mathscr{S}$ est invariante dans la symétrie par rapport à la droite (I J), parallèlement à la droite $(A_1 A_2)$. (En utilisant une affinité orthogonale on pourra se ramener au cas où $\mathscr{S}$ est un cercle).

Soit ABC un triangle non aplati du plan P, et soient A', B', C' les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].

D.1.*b*. On suppose le triangle ABC équilatéral, de sorte que son cercle inscrit $\mathscr{S}$ est tangent aux droites (BC), (CA), (AB) respectivement en A', B' et C'. (On ne demande pas de démontrer ce résultat).

Montrer que $\mathscr{S}$ est alors la seule ellipse tangente aux droites (BC), (CA), (AB) en A', B', C' respectivement.

D.1.*c.* On ne suppose plus le triangle ABC équilatéral.

Montrer qu'il existe une et une seule ellipse tangente aux droites (BC), (CA), (AB) en A', B', C' respectivement. (On pourra se ramener au cas où ABC est équilatéral en utilisant une transformation affine convenable).

Cette ellipse est appelée *ellipse de Steiner* du triangle ABC.

Montrer que son centre de symétrie est un point remarquable, que l'on précisera, du triangle ABC.

D.1.*d.* Montrer que l'ellipse de Steiner d'un triangle ABC non équilatéral n'est jamais un cercle.

D.2. **Lien avec l'ensemble d ({A , B , C}) :**

Soit, dans le plan P, un triangle ABC non aplati et non équilatéral. On rapporte le plan P à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ où O est le centre de gravité du triangle ABC.

On note a, b, c, les affixes respectives de A, B, C, et on note I, J, K les points d'affixes $1, j, j^2$ respectivement $\left(\text{où } j \text{ est le nombre } j = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right)$.

D.2.*a.* Montrer qu'il existe deux nombres complexes α et β avec $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$ tels que, si f désigne l'application de P dans P associée à la transformation $z \to z' = \alpha z + \beta \bar{z}$, les images par f des points I, J et K soient respectivement A, B et C.

D.2.*b.* Soit θ un argument de α et ω un argument de β.

Trouver une représentation paramétrique de l'ellipse de Steiner $\mathcal{S}$ du triangle ABC dans le repère orthonormé $(O ; \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ où $\vec{u}_1$ est le vecteur d'affixe $e^{i\left(\frac{\theta + \omega}{2}\right)}$ et $\vec{u}_2$ le vecteur d'affixe $i\, e^{i\left(\frac{\theta + \omega}{2}\right)}$.

En déduire une relation simple entre les affixes des foyers de $\mathcal{S}$ et le produit $\alpha \beta$.

D.2.*c.* Exprimer $ab + bc + ca$ en fonction de α et β.

En déduire que l'ensemble d ({A , B , C}) est constitué de deux points remarquables, qu'on précisera, de l'ellipse $\mathcal{S}$.

Solution du CAPES 90, 2ᵉ composition.

Solution proposée par Dany-Jack Mercier

A.1 Si $M \in d(\mathcal{E})$, alors $\vec{OM} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{MA_i^2}} \sum_i \frac{\vec{OA_i}}{MA_i^2}$ pour tout point O de D.
Cela prouve que $M \in D$.

A.2 $\frac{\vec{MA_1}}{MA_1^2} + \frac{\vec{MA_2}}{MA_2^2} = \vec{0} \Rightarrow \left\| \frac{\vec{MA_1}}{MA_1^2} \right\| = \left\| -\frac{\vec{MA_2}}{MA_2^2} \right\| \Rightarrow MA_1 = MA_2$

Comme l'on a vu que $M \in (A_1A_2)$, cela prouve que M sera le milieu de $[A_1A_2]$.
Réciproquement, si M est le milieu de $[A_1A_2]$, on a clairement $\vec{MA_1} = -\vec{MA_2}$ d'où $\frac{\vec{MA_1}}{MA_1^2} + \frac{\vec{MA_2}}{MA_2^2} = \vec{0}$, ie $M \in d(\mathcal{E})$.

$d(\mathcal{E})$ est formé du seul milieu de $[A_1A_2]$.

A.3 Tout point M de $d(\mathcal{E})$ apparait comme le barycentre des points A_i affectés des coefficients positifs $\frac{1}{MA_i^2}$. On sait que l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de n points $A_1, \dots, A_n$ est l'enveloppe convexe de ces n points : ici l'on trouve $M \in [A_1 A_2]$. □

2ᵉ solution :

$$\sum_i \frac{\vec{MA_i}}{MA_i^2} = \vec{0} \Rightarrow \vec{MA_1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\vec{MA_i}}{MA_i^2} \right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=2}^{n} \frac{\vec{MA_1} \cdot \vec{MA_i}}{MA_i^2} = -1$$

montre qu'il existe obligatoirement un indice $i \in \{2, \dots, n\}$ tel que $\vec{MA_1} \cdot \vec{MA_i} < 0$, ie $M \in [A_1A_i]$. On en déduit $M \in [A_1A_n]$. □

A.4.a $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i - x}{(a_i - x)^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i - x}$

A.4.b φ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, dérivable sur cet ensemble, de dérivée $\varphi'(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(a_i - x)^2} > 0$ donc strictement croissante. On trouve :

x	$-\infty$	a_1	…	a_i		a_{i+1}	…	a_n	$+\infty$
φ'	+	‖		‖	+	‖		‖	
φ	$0 \nearrow +\infty$	‖		‖	$-\infty \nearrow +\infty$	‖		‖	$-\infty \nearrow 0$

A.4.c φ est continue là où elle est définie, est strictement croissante de $]a_i, a_{i+1}[$ sur $\mathbb{R}$. Le Th. des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un zéro de φ dans chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$. Ce zéro est unique d'après la croissance stricte de φ. Ainsi $d(\mathcal{E})$ contiendra $n-1$ points, un dans chacun des intervalles $]a_i, a_{i+1}[$ $(1 \leq i \leq n-1)$.

B.1 L'affixe de $\sum_i \frac{\overrightarrow{MA_i}}{MA_i^2}$ est $\sum \frac{a_i - z}{|a_i - z|^2} = \sum \frac{1}{\overline{a_i - z}}$, donc

$M \in d(\mathcal{E})$ ssi $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i - z} = 0$

B.2.a $Q'(X) = \sum_{i=1}^{n} (X-a_1) \ldots \widehat{(X-a_i)} \ldots (X-a_n) \Rightarrow \frac{Q'(X)}{Q(X)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X-a_i}$

B.2.b

$M \in d(\mathcal{E}) \Leftrightarrow \sum \frac{1}{a_i - z} = 0 \Leftrightarrow \frac{Q'(z)}{Q(z)} = 0 \Rightarrow Q'(z) = 0$

Réc., si $Q'(z) = 0$ alors $Q(z) \neq 0$ car toutes les racines de Q sont simples, et donc $\frac{Q'(z)}{Q(z)} = 0$. Les équivalences ci-dessus permettent d'aboutir à $M \in d(\mathcal{E})$.

B.2.c $\deg Q' = n-1$, donc le polynôme Q' possède au plus $n-1$ racines dans $\mathbb{C}$ et $\boxed{\# d(\mathcal{E}) \leq n-1}$. Comme $\deg Q' = n-1 \geq 1$, Q' possèdera au moins une racine dans $\mathbb{C}$ (qui est un corps algébriquement clos), donc $\boxed{d(\mathcal{E}) \neq \emptyset}$.

B.3

• Notons $d(\mathcal{E}) = \{b_1, \dots, b_{n-1}\}$. Les b_i sont les $n-1$ racines distinctes de Q', où $Q(z) = (z-a_1)\dots(z-a_n) = z^n - (a_1+\dots+a_n)z^{n-1} + \dots$ et où l'on continue à noter $\mathcal{E} = \{a_1, \dots, a_n\}$. On a :

$$Q'(z) = nz^{n-1} - (n-1)(a_1+\dots+a_n)z^{n-2} + \dots$$

de sorte que les relations entre coefficients et racines d'un polynôme nous donne

$$\frac{-(n-1)(a_1+\dots+a_n)}{n} = -(b_1+\dots+b_{n-1})$$

soit
$$\frac{a_1+\dots+a_n}{n} = \frac{b_1+\dots+b_{n-1}}{n-1}$$

ce qui signifie que l'isobarycentre de $\mathcal{E}$ coïncide avec celui de $d(\mathcal{E})$.

• Notons $\mathcal{E}' = \{a'_1, \dots, a'_n\}$ et supposons que $d(\mathcal{E}') = d(\mathcal{E})$. Soit

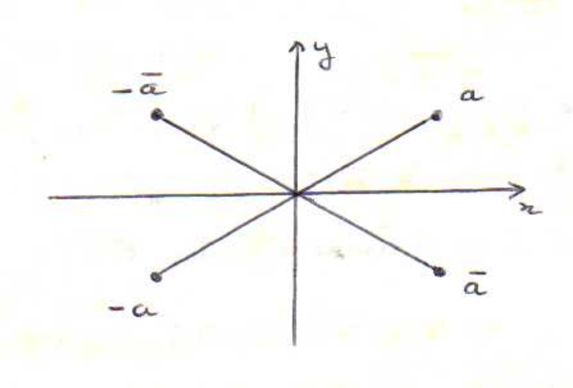
$$T(z) = (z-a'_1)\dots(z-a'_n)$$

le polynôme associé à $\mathcal{E}'$. On a :

$$d(\mathcal{E}') = d(\mathcal{E}) \Rightarrow Q'(X) = T'(X) \Rightarrow Q(X) = T(X) + cte$$

Si $\mathcal{E} \cap \mathcal{E}' \neq \emptyset$, il existe i tel que $a'_i = a_i$, donc $Q(a_i) = 0 = T(a_i) + cte = c$
ie $cte = 0$ et $Q(X) = T(X)$. Cela impose $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$.

B.4



Ici :

$$Q(z) = (z-a)(z-\bar{a})(z+a)(z+\bar{a})$$
$$= (z^2-a^2)(z^2-\bar{a}^2)$$
$$= z^4 - 2\,\mathcal{R}e(a^2).\,z^2 + |a|^4$$

donc $Q'(z) = 4z^3 - 4\,\mathcal{R}e(a^2).\,z = 4z\,(z^2 - \mathcal{R}e(a^2))$

Posons $a = x+iy$, et remarquons que :

$$\mathcal{R}e\, a^2 = 0 \iff x^2-y^2=0 \iff x = \pm y \iff A_1A_2A_3A_4 \text{ carré}$$

Cela étant :

1) Si $A_1A_2A_3A_4$ est un carré, $Q'(z) = 4z^3$ et $d(\mathcal{E}) = \{0\}$.

2) Sinon, $Q'(z)=0$ admet 3 racines distinctes et $\# d(\mathcal{E}) = 3$.

B.5

$\alpha\sqrt{3} > \beta > 0$

$A_1A_2A_3$ tri. isocèle de cdg O

$A_1(\alpha+i\beta)$, $A_2(\alpha-i\beta)$, $A_3(-2\alpha)$, O

a) $Q(z) = (z+2\alpha)(z-\alpha-i\beta)(z-\alpha+i\beta)$

$= (z+2\alpha)(z^2-2\alpha z+\alpha^2+\beta^2)$

$= z^3 + (\beta^2-3\alpha^2)z + 2\alpha(\alpha^2+\beta^2)$

$$Q'(z) = 3z^2+\beta^2-3\alpha^2$$

Les éléments de $d(\mathcal{E})$ seront d'affixes les racines de Q'.

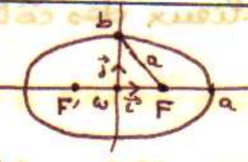
$Q'(z)=0 \iff z^2 = \frac{1}{3}(3\alpha^2-\beta^2) > 0$ par hypothèse

$$\iff z = \pm\sqrt{\alpha^2-\frac{\beta^2}{3}}$$

$d(\mathcal{E})$ est donc formé de 2 pts sym. /à O et situés sur Ox, d'affixes $\pm\sqrt{\alpha^2-\frac{\beta^2}{3}}$

b) $\mathcal{S}$ ellipse de foyers F, F' d'affixes $\pm\sqrt{\alpha^2-\frac{\beta^2}{3}}$, passant par le milieu $I(\alpha)$ de $[A_1A_2]$.

Rappel :



$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dans $(\omega,\vec{i},\vec{j})$ est la traduction de :

$$\begin{cases} MF+MF' = 2a \\ FF' = 2c \\ a^2 = b^2+c^2 \end{cases}$$

F et F' sont symétriques /à O, donc O est le centre de $\mathcal{S}$ et l'équation de $\mathcal{S}$ est $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

$I \in \mathcal{S} \Rightarrow \frac{\alpha^2}{a^2}=1 \Rightarrow a=\alpha$

$FF' = 2c = 2\sqrt{\alpha^2-\frac{\beta^2}{3}} \Rightarrow c = \sqrt{\alpha^2-\frac{\beta^2}{3}}$

d'où $b = \sqrt{a^2-c^2} = \sqrt{\alpha^2-\left(\alpha^2-\frac{\beta^2}{3}\right)} = \frac{\beta}{\sqrt{3}}$

Ccl : $\mathcal{S}$ a pour équation $$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{3y^2}{\beta^2}=1$$

c) $(A_1A_3) = \{ M \ / \ \exists \lambda \in \mathbb{R} \ \ \overrightarrow{A_1M} = \lambda \overrightarrow{A_1A_3} \}$ d'où les équations paramétriques de la dte (A_1A_3) :

$$\begin{cases} x = \alpha - 3\lambda\alpha \\ y = \beta - \lambda\beta \end{cases}$$

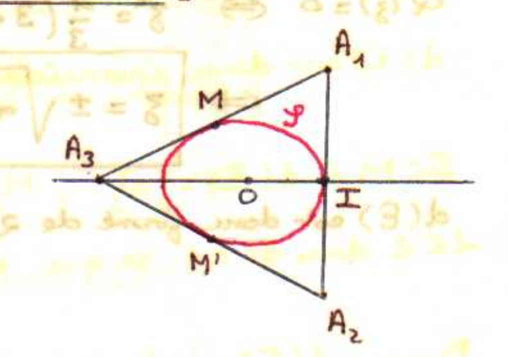
$$M\binom{x}{y} \in \mathcal{S} \cap (A_1A_3) \Leftrightarrow \frac{\alpha^2(1-3\lambda)^2}{\alpha^2} + \frac{3}{\beta^2}.\beta^2(1-\lambda)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (2\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{2}}$$

L'intersection de la dte (A_1A_3) et de l'ellipse $\mathcal{S}$ est réduite à un seul point M de coordonnées $\begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{2} \\ \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$. C'est le milieu de $[A_1A_3]$ (car obtenu pour $\lambda = \frac{1}{2}$).

(A_1A_3) est donc tangente à l'ellipse $\mathcal{S}$ en M milieu de $[A_1A_3]$.

Par symétrie, (A_2A_3) sera aussi tgte à $\mathcal{S}$ en le milieu $M'\begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{2} \\ -\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$ de $[A_2A_3]$.



d) $\mathcal{S}$ est tangente aux 3 côtés du triangle en des points qui sont les milieux des côtés.

NB : L'hypothèse $\alpha\sqrt{3} > \beta > 0$ équivaut à $\widehat{A_3} < \frac{\pi}{3}$ car :

$$\theta = \widehat{A_1A_3A_2} \Rightarrow 0 < \text{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{\beta}{3\alpha} < \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow k\pi < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$\Rightarrow k2\pi < \theta < \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

Cette hypothèse n'est pas restrictive car si $0 < \alpha\sqrt{3} < \beta$, les foyers F et F' éléments de $d(\mathcal{E})$ seront sur l'axe des imaginaires (le reste étant sans changement)

B.6

Soit s une similitude de partie linéaire σ et de rapport k.

$$M \in d(\mathcal{E}) \Leftrightarrow \sum_i \frac{\overrightarrow{MA_i}}{MA_i^2} = \vec{0} \Leftrightarrow \sigma\left(\sum \frac{\overrightarrow{MA_i}}{MA_i^2}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow k^2 \sum_i \frac{\overrightarrow{s(M)s(A_i)}}{s(M)s(A_i)^2} = \vec{0}$$

puisque $s(M)s(A_i) = k\, MA_i$.

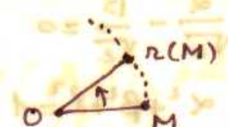
D'où $M \in d(\mathcal{E}) \Leftrightarrow s(M) \in d(s(\mathcal{E}))$ ie $\boxed{s(d(\mathcal{E})) = d(s(\mathcal{E}))}$

B.7

a) Soit $\mathcal{E}$ un polygône régulier. $\mathcal{E} = \{A_1, \dots, A_n\}$ est invariant par une rotation $r = r_{O, \frac{2\pi}{n}}$. r est une similitude particulière donc (B.6) :

$$r(d(\mathcal{E})) = d(r(\mathcal{E})) = d(\mathcal{E})$$

$d(\mathcal{E})$ est donc invariant par la rotation r.



Si $M \in d(\mathcal{E}) \setminus \{O\}$, $M, r(M), r^2(M), \dots, r^{n-1}(M)$ seront n points distincts 2 à 2 dans $d(\mathcal{E})$, ce qui est impossible car $\# d(\mathcal{E}) \leq n-1$ (B.2.c)

Donc $d(\mathcal{E}) = \{O\}$.

b) Soit $d(\mathcal{E}) = \{O\}$. On peut ~~très~~ supposer que O est le centre d'un repère du plan.

$M \in d(\mathcal{E}) \Leftrightarrow Q'(z) = 0$ où $\deg Q' = n-1$

$d(\mathcal{E}) = \{O\}$ signifie que $Q'(z)$ admet O comme seule racine,

ie $Q'(z) = \text{Cte}. z^{n-1} \Rightarrow Q(z) = \text{Cte} \frac{z^n}{n} - b$ $\quad b \in \mathbb{C}$

Q est unitaire donc $Q(z) = z^n - b = \prod_{k=0}^{n-1} (z - \rho e^{ik\frac{2\pi}{n}})$

(où ρ désigne une racine n-ième de b)

Donc $\mathcal{E} = \{ M(\rho e^{ik\frac{2\pi}{n}}) \;/\; k = 0, \dots, n-1 \}$ est un polygone régulier.

C.1.a $H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique ; donc diagonalisable dans une b.o. Le polynôme caractéristique est

$$\chi_H(X) = -(X-1)\left(X+\frac{1}{2}\right)^2$$

et les sev propres sont : $E(1) : x = y = z$

$E\left(-\frac{1}{2}\right) : x + y + z = 0$

$E(1)$ est la dte $\mathbb{R}\vec{u}'_1$ où $\vec{u}'_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

Cherchons une b.o de $E\left(-\frac{1}{2}\right)$: $\vec{u}'_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u}'_3 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ devra vérifier

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} - \frac{\beta}{\sqrt{2}} = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ \gamma = -2\alpha \\ \alpha^2 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

. On prendra $\vec{u}'_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

de sorte que $\boxed{\mathrm{Mat}(\sigma ; \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$

C.1.b $\Sigma : x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -3\alpha^2 \quad \alpha > 0$

$q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ est une forme quadratique de matrice $H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$. H se diagonalise en $D = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -\frac{1}{2} & \\ 0 & & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ dans la b.o. $\mathcal{B}'$

La matrice de q dans $\mathcal{B}'$ sera donc :

$$H' = {}^tPMP = P^{-1}MP = D$$

soit $q(x') = {x'_1}^2 - \frac{{x'_2}^2}{2} - \frac{{x'_3}^2}{2}$ lorsque $x' \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}'$.

L'équation de Σ dans $\mathcal{B}'$ sera :

$$\boxed{{x'_1}^2 - \frac{{x'_2}^2}{2} - \frac{{x'_3}^2}{2} = -3\alpha^2}$$

Σ est une hyperboloïde à 1 nappe de révolution autour de $\mathbb{R}\vec{u}'_1$.

B.7.b Autre solution :

Supposons $d(\mathcal{E})=\{O\}$. Soit r la rotation de centre O et transformant A_1 en A_2. Une telle rotation existe puisque $A_1 \neq O$ (en effet, $O \in d(\mathcal{E})$ entraîne $O \notin \mathcal{E}$). D'après B.6 :

$$r(d(\mathcal{E})) = d(r(\mathcal{E}))$$

$$\{O\} = d(r(\mathcal{E}))$$

On peut donc affirmer que $d(r(\mathcal{E})) = d(\mathcal{E})$. La question B.3 montre alors que $r(\mathcal{E}) \cap \mathcal{E} = \emptyset$ ou $r(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$. En fait $A_2 = r(A_1) \in \mathcal{E} \cap r(\mathcal{E})$, donc $r(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ et il s'avère que $\mathcal{E}$ est un polygone régulier. □

* Nature de $\mathcal{C} = \Sigma \cap \{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

Compte tenu des formules de chgt de repère de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

l'équation de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}'$ sera :

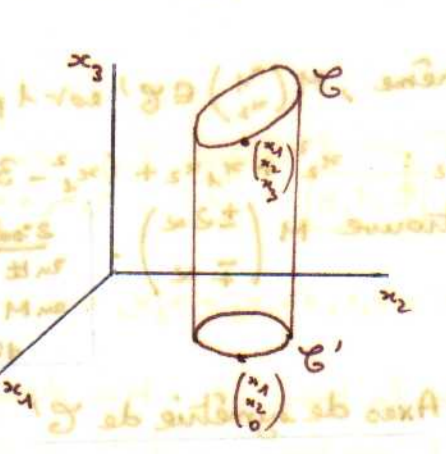
$$\begin{cases} x_1'^2 - \dfrac{x_2'^2}{2} - \dfrac{x_3'^2}{2} = -3\alpha^2 \\ \sqrt{3}\,.\,x'_1 = 0 \end{cases}$$

ie $$\begin{cases} x'_1 = 0 \\ x_2'^2 + x_3'^2 = 6\alpha^2 \end{cases}$$

$\mathcal{C}$ sera donc le cercle du plan $x'_1 = 0$ (ie du plan $E\left(-\frac{1}{2}\right)$) de centre O et de rayon $\alpha\sqrt{6}$.

C.1.c

$\mathcal{C}'$ = proj. orth. de $\mathcal{C}$ sur Π = plan $(O, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$



* Équation de $\mathcal{C}'$ dans $(O, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -3\alpha^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$\mathcal{C}'$ s'obtient en éliminant x_3 de ces 2 équations. On trouve :

$$\mathcal{C}' : x_1x_2 + (x_1+x_2)(-x_1-x_2) = -3\alpha^2$$

$$x_1x_2 - (x_1+x_2)^2 = -3\alpha^2$$

$$\boxed{\mathcal{C}' : x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 3\alpha^2 = 0}$$

* Intersections de $\mathcal{C}'$ avec $(O, \vec{u}_1)$ et $(O, \vec{u}_2)$:

Avec $(O, \vec{u}_1)$: $x_2 = 0 \Rightarrow x_1^2 = 3\alpha^2 \Rightarrow x_1 = \pm\alpha\sqrt{3}$ d'où $\begin{pmatrix} \pm\alpha\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

Avec $(O, \vec{u}_2)$: $x_1 = 0 \Rightarrow x_2^2 = 3\alpha^2$ d'où $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm\alpha\sqrt{3} \end{pmatrix}$

* Points de $\mathcal{C}'$ où la tgte est parallèle à l'un des axes $(O, \vec{u}_1)$ ou $(O, \vec{u}_2)$.

$M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}'$ est un pt où la tgte à $\mathcal{C}'$ est // à $(O, \vec{u}_1)$ ssi l'équation

en x_1 : $x_1^2 + x_2 x_1 + (x_2^2 - 3\alpha^2) = 0$ admet 1 racine double

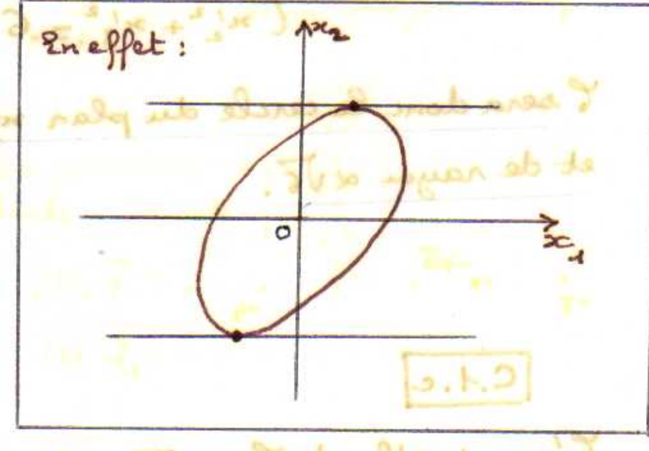
ie vérifie $\Delta = x_2^2 - 4(x_2^2 - 3\alpha^2) = 0$

$x_2 = \pm 2\alpha$

et alors $x_1 = \frac{-x_2}{2} = \mp\alpha$

On trouve 2 points : $M\begin{pmatrix} \mp\alpha \\ \pm 2\alpha \end{pmatrix}$

En effet :



De même, $M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}'$ est 1 pt où la tgte à $\mathcal{C}'$ est // à $(O, \vec{u}_2)$ ssi l'éq.

en x_2 : $x_2^2 + x_1 x_2 + (x_1^2 - 3\alpha^2) = 0$ admet 1 racine double.

On trouve $M\begin{pmatrix} \pm 2\alpha \\ \mp\alpha \end{pmatrix}$.

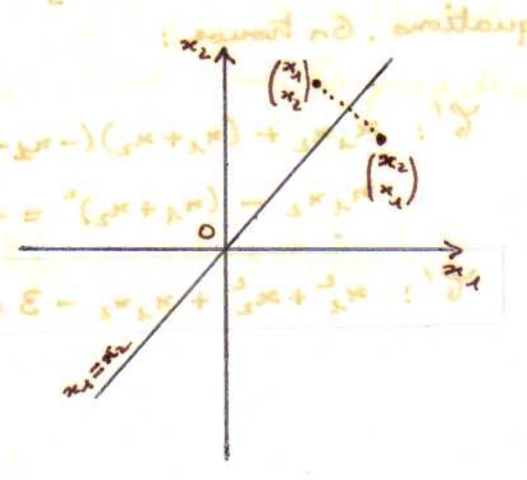
2° sol : $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 - 3\alpha^2 = 0$ définit $\mathcal{C}'$ de façon implicite. En tt pt $M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ la normale à $\mathcal{C}'$ sera $\mathbb{R}\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 2x_2 + x_1 \end{pmatrix}$. La tgte à $\mathcal{C}'$ en M sera // à Ox_1 ssi $2x_1 + x_2 = 0$ d'où $x_1 = \pm\alpha$ et $x_2 = \mp 2\alpha$.

* Axes de symétrie de $\mathcal{C}'$

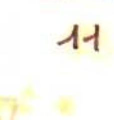
O est centre de symétrie de $\mathcal{C}'$.

La 1° bissectrice $x_1 = x_2$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}'$ car $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ laisse $\mathcal{C}'$ invariante.

Le second axe de symétrie sera donc la 2° bissectrice $x_1 = -x_2$.



NB : Les extrémités de l'axe de $\mathcal{C}'$ supporté par la 1° bissectrice seront les pts $\begin{pmatrix} \pm\alpha \\ \pm\alpha \end{pmatrix}$.



* **Figure** : pour $\alpha = 4$.

x_2

8 $4\sqrt{3}$ 4 1 -4 $-4\sqrt{3}$ -8

-8 $-4\sqrt{3}$ -4 0 1 4 $4\sqrt{3}$ 8

D'_1 D'_2 D'_3

C.1.d

$D_1 \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_2=x_3 \end{cases}$ $D_2 \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_3=x_1 \end{cases}$ $D_3 \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1=x_2 \end{cases}$

$D_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $D_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $D_3 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

L'équation de la dte D'_1 projetée de D_1 sur $\Pi : x_3 = 0$ s'obtient en éliminant x_3 des équations de D_1 :

$$D'_1 : \quad x_1 + 2x_2 = 0$$

De même : $\begin{cases} D'_2 : 2x_1 + x_2 = 0 \\ D'_3 : \quad x_1 = x_2 \end{cases}$

On construit ces 3 dtes sur la figure précédente. On note que :

D'_1 passe par les pts à tgte // à l'axe $(O, \vec{u}_2)$

D'_2 " " " $(O, \vec{u}_1)$

D'_3 est le petit axe de $\mathcal{C}'$

* Γ' est l'ellipse $\mathcal{C}'$ privée des 6 points $\begin{pmatrix} \mp\alpha \\ \pm 2\alpha \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \pm 2\alpha \\ \mp\alpha \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \pm\alpha \\ \pm\alpha \end{pmatrix}$

↑ pts à tgte // à $(O, \vec{u}_2)$ ↑ pts à tgte // à $(O, \vec{u}_1)$ ↑ extrémités du petit axe de $\mathcal{C}'$.

* Γ'' est la projection de Γ sur $\Delta = (O, \vec{u}_1)$. C'est aussi la projection de Γ' sur la droite $(O, \vec{u}_1)$ soit :

$$\Gamma'' =]-8, -4[\cup]-4, 4[\cup]4, 8[\qquad (\text{dans } (O, \vec{u}_1))$$

C.2.a

V $\quad$ O $\quad$ U

$-\alpha \quad \alpha \quad$ D

$A_1(x_1)$ $A_2(x_2)$ $A_3(x_3)$ sur D, distincts.

$\mathcal{F}' = \{A_1, A_2, A_3\}$

Montrons que $d(\mathcal{F}') = \{U, V\} \Leftrightarrow M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \Gamma$

Le polynôme associé à $\mathcal{F}'$ (B.2) est :

$$Q(X) = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$$

d'où
$$Q'(X) = (X - x_1)(X - x_2) + (X - x_2)(X - x_3) + (X - x_1)(X - x_3)$$
$$= 3X^2 - 2(x_1 + x_2 + x_3)X + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$$

$d(\mathcal{F}') = \{U, V\} \Leftrightarrow \pm\alpha$ racines de $Q'(X) \Leftrightarrow Q'(X) = k(X \pm \alpha)^2$

soit $k = 3$ et $Q'(X) = 3(X^2 - \alpha^2) = 3X^2 - 3\alpha^2$

Ainsi, $d(\mathcal{F}') = \{U, V\} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -3\alpha^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$

Comme A_1, A_2, A_3 sont distincts, $x_1 \neq x_2$, $x_2 \neq x_3$ et $x_1 \neq x_3$ se traduisent par $M \in \mathcal{C} \setminus (D_1 \cup D_2 \cup D_3) = \Gamma$. (C.1.d)

d'où le résultat.

C.2.b

J	V		U	I
-2α	$-\alpha$	0	α	2α

$\Lambda = [IJ] \setminus \{I, J, U, V\}$

(*) $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, A_3\}$ vérifie $d(\mathcal{F}) = \{U, V\}$ ssi $M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \Gamma$ (d'après C.2.a)

Identifions $D = (O, \vec{u})$ à $(O, \vec{u}_1)$ et notons p la projection orthogonale sur $(O, \vec{u}_1)$

1) On a (C.1.d) : $p(\Gamma) = \Gamma'' \doteq]-2\alpha, -\alpha[\cup]-\alpha, \alpha[\cup]\alpha, 2\alpha[\doteq \Lambda$.
Si $A_1 \in \Lambda$, A_1 d'abscisse x_1, il existe donc un point $M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \Gamma$ tel que $p(M) = A_1$, de sorte que A_1 appartienne à un ensemble $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, A_3\}$ tel que $d(\mathcal{F}) = \{U, V\}$ d'après (*).
L'ensemble $\bigcup_{d(\mathcal{F}) = \{U,V\}} \mathcal{F}$ recouvre donc Λ.

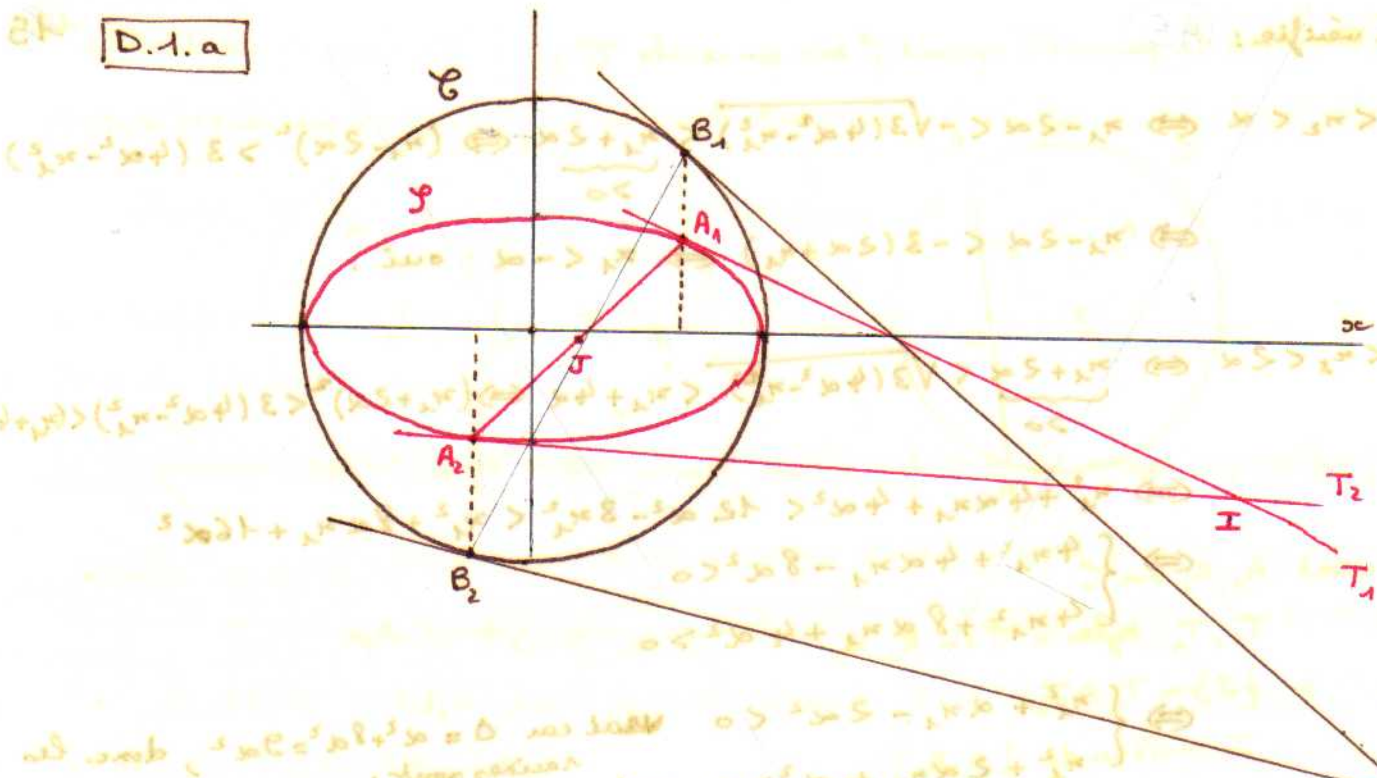
2) Toujours d'après C.1.d, $M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \Gamma$ entraine que $p(M)$ est dans $\Gamma'' \doteq \Lambda$.
Vu (*), cela prouve que $\bigcup_{d(\mathcal{F}) = \{U,V\}} \mathcal{F} \subset \Lambda$

1) et 2) assurent $\bigcup_{d(\mathcal{F}) = \{U,V\}} \mathcal{F} = \Lambda$

3) Les ensembles $\mathcal{F}$ sont non vides et disjoints 2 à 2 : en effet, si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont 2 ensembles à 3 éléments de pts de Λ tels que $d(\mathcal{F}) = d(\mathcal{F}') = \{U, V\}$, alors B.3 entraine $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ ou $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}' = \emptyset$.

<u>Ccl</u> : L'ensemble des parties $\mathcal{F}$ à 3 éléments telles que $d(\mathcal{F}) = \{U, V\}$ constitue bien une partition de Λ.

D.1.a



s = symétrie /à (IJ) //à (A_1A_2)

σ = affinité orth. de base Ox et de rapport $\frac{a}{b}$

$\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{C}$ cercle de centre O et de rayon a

$\sigma(T_1)$ = tgte à $\mathcal{C}$ en $\sigma(A_1) \doteq B_1$

$\sigma(T_2)$ = " $\sigma(A_2) \doteq B_2$

* Supposons démontrée la propriété pour le cercle $\mathcal{C}$: $\mathcal{C}$ est invariant par la symétrie s' /à $(\sigma(I)\sigma(J))$ //à $(\sigma(A_1)\sigma(A_2))$, soit :

$$s'(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \Rightarrow s'\sigma(\mathcal{S}) = \sigma(\mathcal{S}) \Rightarrow \sigma^{-1}s'\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$$

On a $\sigma^{-1}\underbrace{s'\sigma(I)}_{\sigma(I)} = I$

$\sigma^{-1}\underbrace{s'\sigma(J)}_{\sigma(J)} = J$

$\sigma^{-1}\underbrace{s'\sigma(A_1)}_{\sigma(A_2)} = A_2$

$\Rightarrow \sigma^{-1}s'\sigma = s$ d'où $s(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.

$\sigma(A_2)$ car $\sigma(J)$ milieu de $[\sigma(A_1)\sigma(A_2)]$

* Montrons la propriété quand $\mathcal{S}$ est un cercle $\mathcal{C}$:

3ᵉ méthode : LA MEILLEURE. Les triangles OA_1J et OA_2J sont rectangles et d'après Pythagore $JA_1 = JA_2$. Donc J, I et O sont sur la médiatrice de $[A_1A_2]$. La réflexion d'axe (IJ) qui passe par O laissera donc $\mathcal{C}$ invariant. Il suffit de voir que $(A_1A_2) \perp (IJ)$ pour conclure.

2ᵉ méthode : Tout revient à prouver que les pts I, J, O sont alignés puisque $\mathcal{C}$ est clairement invariant par la réflexion d'axe (OI). Soit s la réflexion d'axe (OI). $s(A_1) = A_2$ et s transforme la perp. à (OA_1) en A_1 en la perp. à (OA_2) en A_2, ie $s(T_1) = T_2$. On déduit $s(J) = J$ d'où $J \in (OI)$. CQFD

Soient A_1, A_2 sur $\mathcal{C}$

T_1, T_2 tgtes à $\mathcal{C}$ en A_1, A_2

$\{J\} = T_1 \cap T_2$

I milieu de $[A_1A_2]$

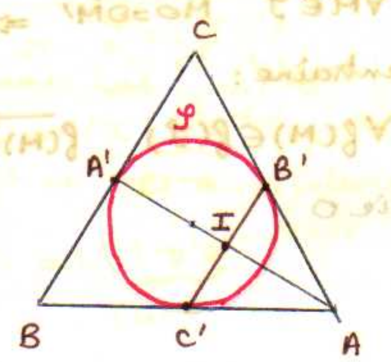
OA_1J et OA_2J sont rectangles en A_1 et A_2, donc les points O, A_1, J, A_2 sont sur le cercle de diamètre $[OJ]$. Soit Ω le milieu de $[OJ]$.

$\Omega A_1 = \frac{OJ}{2} = \Omega A_2$ allié à $OA_1 = OA_2$ montre que (OJ) est la médiatrice de $[A_1A_2]$. (OJ) passera donc par le milieu I de $[A_1A_2]$.

La symétrie s /à (IJ) //à (A_1A_2) sera donc égale à la sym. orth. /à (OJ). L'axe de s passant par le centre O du cercle, on aura bien $s(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

CQFD

D.1.b Si $\mathcal{S}'$ est une autre ellipse tgte à AB, BC, CA en C', A', B', $\mathcal{S}'$ sera invariante par la sym. s /à (AI) où I milieu I de $[B'C']$ et //à $(B'C')$.



Ici $(B'C') // (BC)$, $AA'I$ alignés et $AA' \perp BC$ donc s sera la sym. orth. /à (AA').

(AA') sera donc un axe de symétrie de $\mathcal{S}'$

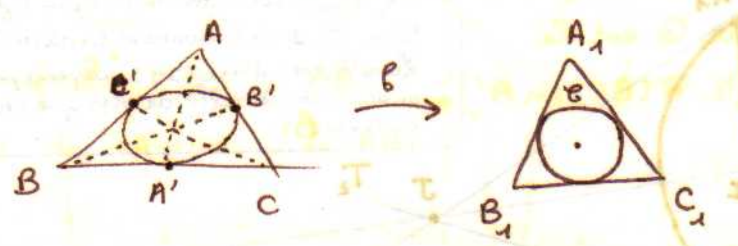
De même, (BB') et (CC') seront des axes de sym. de $\mathcal{S}'$.

$\mathcal{S}'$ sera une ellipse possédant 3 axes de symétries, donc un cercle : $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$.

CQFD

D.1.c

Soit f l'application affine transformant ABC en un triangle équilatéral $A_1B_1C_1$



f transforme un repère affine A,B,C en un repère affine A_1, B_1, C_1 donc f est bijective

Si $\mathcal{S}$ est une ellipse tgte à AB, BC, CA en C', A', B' alors $f(\mathcal{S})$ sera une ellipse vérifiant les m̂ propriétés dans le triangle équilatéral $A_1B_1C_1$.

D.1.b montre que $f(\mathcal{S}) = \mathcal{C}$ = cercle inscrit dans $A_1B_1C_1$. Son centre est le cdg G_1 de $A_1B_1C_1$.

f^{-1} affine, conserve les barycentres, donc $f^{-1}(G_1)$ sera le cdg G de ABC et sera aussi le centre de symétrie de l'unique ellipse $\mathcal{S} = f^{-1}(\mathcal{C})$ répondant à la question.

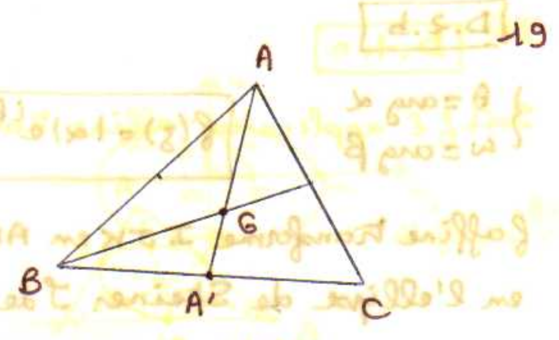
NB : f affine bijective, transforme un centre de symétrie de $\mathcal{S}$ en un centre de symétrie de $f(\mathcal{S})$ comme le montre :

$\forall M \in \mathcal{S} \quad \vec{MO} = \vec{OM'} \Rightarrow M' \in \mathcal{S}$

entraine :

$\forall f(M) \in f(\mathcal{S}) \quad \overrightarrow{f(M)f(O)} = \overrightarrow{f(O)f(M')} \Rightarrow f(M') \in f(\mathcal{S})$

D.1.d

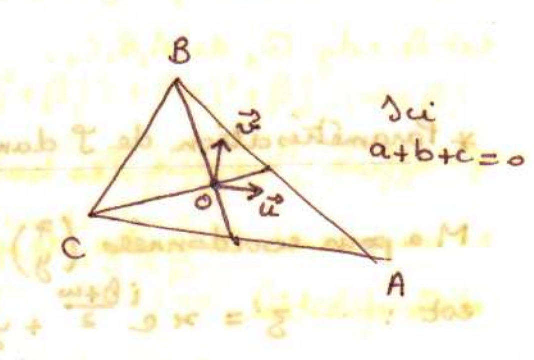


Si l'ellipse de Steiner d'un triangle ABC est un cercle $\mathcal{C}$, son centre G est le cdg de ABC. $\mathcal{C}$ étant tgte à (BC) en A', on aura (GA') ⊥ (BC). La médiane (AG) coïncide donc avec la médiatrice de [BC] d'où AB = AC.

Un raisonnement analogue montre que BC = BA.

Finalement ABC sera un triangle équilatéral.

D.2.a



$f(z) = z' = \alpha z + \beta \bar{z}$ (affine) vérifie

$$\begin{cases} f(I) = A \\ f(J) = B \\ f(K) = C \end{cases} \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha j + \beta j^2 = b \\ \alpha j^2 + \beta j = c \end{cases}$$

Ces 3 équations sont compatibles car, en additionnant m. à m. :

$$\alpha \underbrace{(1+j+j^2)}_{0} + \beta \underbrace{(1+j+j^2)}_{0} = \underbrace{a+b+c}_{0} \quad \text{est vrai.}$$

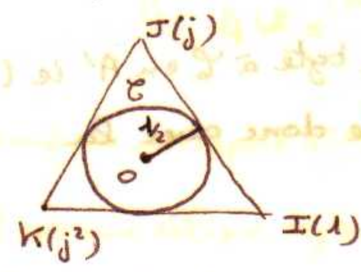
Les 2 premières équations forment un système de Cramer car $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ j & j^2 \end{vmatrix} = j^2 - j \neq 0$.

Enfin $\alpha\beta \neq 0$ (sinon $\alpha = 0 \Rightarrow a = \beta = bj = cj^2 \Rightarrow$ ABC équilatéral, rejeté)

D.2.b

$\begin{cases} \theta = \arg \alpha \\ \omega = \arg \beta \end{cases}$ $\boxed{f(z) = |\alpha| e^{i\theta} z + |\beta| e^{i\omega} \bar{z}}$

f affine transforme IJK en ABC, donc transforme le cercle inscrit $\mathcal{C}$ dans IJK en l'ellipse de Steiner $\mathcal{S}$ de ABC.



Une paramétrisation de $\mathcal{C}$ est :

$$t \longmapsto \frac{1}{2} e^{it}$$

d'où la paramétrisation de $\mathcal{S}$:

$$t \overset{\varphi}{\longmapsto} \underbrace{\frac{|\alpha| e^{i\theta}}{2} e^{it} + \frac{|\beta| e^{i\omega}}{2} e^{-it}}_{\text{affixes des pts de } \mathcal{S}}$$

* <u>Paramétrisation de $\mathcal{S}$ dans le repère $(O, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$</u> :

M a pour coordonnées $\binom{x}{y}$ dans le repère $(O, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ ssi l'affixe de M est : $z' = x e^{i\frac{\theta+\omega}{2}} + y \, i e^{i\frac{\theta+\omega}{2}} = (x+iy) e^{i\frac{\theta+\omega}{2}}$

Ainsi $\varphi(t) = \left(\frac{|\alpha| e^{it}}{2} \cdot e^{i\frac{\theta-\omega}{2}} + \frac{|\beta| e^{-it}}{2} e^{-i\frac{\theta-\omega}{2}} \right) e^{i\frac{\theta+\omega}{2}}$

$$= \underbrace{\left(\frac{|\alpha|}{2} e^{i\left(t + \frac{\theta-\omega}{2}\right)} + \frac{|\beta|}{2} e^{-i\left(t+\frac{\theta-\omega}{2}\right)} \right)}_{= x(t) + i y(t) \text{ où } \binom{x(t)}{y(t)} \text{ sont les coord. de pts de } \mathcal{S} \text{ dans le repère } (O, \vec{u}_1, \vec{u}_2)} e^{i\frac{\theta+\omega}{2}}$$

Posons $\varphi = t + \frac{\theta-\omega}{2}$, qui décrit $\mathbb{R}$ aussi bien que t. Les équations paramétriques de $\mathcal{S}$ dans $(O, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ seront :

$$\boxed{\begin{cases} x(\varphi) = \dfrac{|\alpha| + |\beta|}{2} \cos\varphi \\ y(\varphi) = \dfrac{|\alpha| - |\beta|}{2} \sin\varphi \end{cases}}$$

<u>NB</u> : Les axes de $\mathcal{S}$ sont donc $(O, \vec{u}_1)$ et $(O, \vec{u}_2)$, et l'un de ces axes (le grand : $(O, \vec{u}_1)$) contient les foyers de $\mathcal{S}$.

* Affixes des foyers de $\mathcal{S}$: soient $\pm\gamma$ ces affixes.

$c^2 = a^2 - b^2$ donne ici :

$$|\gamma|^2 = \left(\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}\right)^2 - \left(\frac{|\alpha|-|\beta|}{2}\right)^2 = |\alpha||\beta|$$

De $\gamma = \pm|\gamma| e^{i\frac{\theta+\omega}{2}}$ on déduit $\gamma^2 = |\alpha||\beta| e^{i(\theta+\omega)} = \alpha\beta$

$$\boxed{\gamma^2 = \alpha\beta}$$

u_2, b, a, O, c, F, a, u_1 d'affixe $e^{i\frac{\theta+\omega}{2}}$

D.2.c

* Compte tenu des formules de D.2.a :

$$ab+bc+ca = (\alpha+\beta)(\alpha j+\beta j^2) + (\alpha j+\beta j^2)(\alpha j^2+\beta j) + (\alpha j^2+\beta j)(\alpha+\beta)$$

préférer $= \alpha^2(j+1+j^2) + \beta^2(j^2+1+j) + \alpha\beta(j+j^2+j+j^2+j+j^2) = 3\alpha\beta(j+j^2) = -3\alpha\beta$

$$= \alpha^2+\beta^2 + j(\alpha^2+3\alpha\beta+\beta^2) + j^2(\alpha^2+3\alpha\beta+\beta^2)$$

$$= \alpha^2+\beta^2 + (\alpha^2+3\alpha\beta+\beta^2)\underbrace{(j+j^2)}_{-1} = -3\alpha\beta.$$

$$\boxed{ab+bc+ca = -3\alpha\beta}$$

* $M(z) \in d(\{A,B,C\}) \iff Q'(z) = 0$ où $Q(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$
$= z^3 - (a+b+c)z^2 + (ab+bc+ca)z - abc$

$$\iff 3z^2 - 2\underbrace{(a+b+c)}_{=0}z + \underbrace{ab+bc+ca}_{=-3\alpha\beta} = 0$$

$$\iff z^2 = \alpha\beta = \gamma^2$$

$$\iff z = \pm\gamma$$

$d(\{A,B,C\})$ est donc formé des 2 foyers de l'ellipse de Steiner $\mathcal{S}$ du triangle ABC.

CAPES externe 1991

concours externe
de recrutement de professeurs certifiés

première composition de mathématiques

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche – éventuellement programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Les parties **A, B** *et* **C** *sont indépendantes.*

Tournez la page S.V.P.

Notations et objectifs du problème

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et par $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls. Soit n un entier supérieur ou égal à un, on dit qu'une fonction réelle f définie sur un intervalle $I = (a,b)$ de $\mathbb{R}$ est de classe C^n sur I si f est n fois continûment dérivable sur I et on note $f^{(m)}$ la dérivée d'ordre m de f avec $0 \le m \le n$ et les conventions usuelles $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$ et $f^{(2)} = f''$.

On désigne par $N_{\infty,I}(f)$ et $N_{2,I}(f)$ les nombres (lorsqu'ils ont un sens):

$$N_{\infty,I}(f) = \sup_{x\in I}|f(x)| \quad \text{et} \quad N_{2,I}(f) = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le problème est centré sur les estimations des dérivées intermédiaires $f^{(m)}$ à l'aide de f et $f^{(n)}$ pour les normes $N_{\infty,I}$ et $N_{2,I}$ et quelques applications. En particulier, la partie C établit une condition suffisante (qui est aussi nécessaire) sur les dérivées $f^{(k_j)}$, pour une suite d'entiers (k_j) strictement croissante, pour qu'une fonction indéfiniment dérivable soit développable en série entière au voisinage de chaque point d'un intervalle.

A. Estimations de la dérivée première d'une fonction de classe C^2

I. Estimation ponctuelle pour le cas des fonctions de classe C^2 positives.

Dans toute cette partie A.I, f désigne une fonction positive de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et telle que f'' soit bornée sur $\mathbb{R}$.

I.1.<u>Estimation ponctuelle de f'</u>.

a. Montrer, en appliquant la formule de Taylor avec reste de Lagrange à la fonction f que, pour tout $(x,\lambda) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$: $f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} N_{\infty,\mathbb{R}}(f'') \ge 0$.

b. En déduire que, pour tout réel x:

(1) $\quad |f'(x)| \le \sqrt{2N_{\infty,\mathbb{R}}(f'').f(x)}$.

I.2.<u>Application</u>: On pose $g = \sqrt{f}$.

a. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en tout point x où $f(x) \ne 0$.

b. Soit x_0 un réel tel que $f(x_0) = 0$.

1. Déduire de (1) que $f'(x_0) = 0$.

2. Montrer que $f''(x_0) \ge 0$. (En étudiant les variations de f au voisinage de x_0, on remarquera que si $f''(x_0)$ était strictement négatif, f prendrait des valeurs strictement négatives)

3. Montrer que, pour tout réel x, $x \ne x_0$, il existe un réel c, compris entre x_0 et x tel que $f(x) = \frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(c)$.

En déduire que si $f''(x_0) > 0$, g n'est pas dérivable en x_0.

c. Soit x_0 un réel tel que $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ et soit r un réel strictement positif. On note I_r l'intervalle $[x_0-r, x_0+r]$, I_{2r} l'intervalle $[x_0-2r, x_0+2r]$ et $M_r(f'') = N_{\infty,I_{2r}}(f'')$. On suppose que $M_r(f'') \ne 0$.

1. Montrer que, pour tout x appartenant à I_r, $|f'(x)| \le r.M_r(f'')$.

2. Soit x un élément de I_r. Montrer que, si $2M_r(f'').f(x) < [f'(x)]^2$, le trinôme en λ, $\tau(\lambda) = f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} M_r(f'')$, admettrait deux racines distinctes λ_1 et λ_2 telles que $\mu = \frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)$ appartienne à l'intervalle $[-r, r]$ et que $f(x+\mu) \le \tau(\mu) < 0$.

En déduire que, pour tout x appartenant à I_r, $|f'(x)| \le \sqrt{2M_r(f'').f(x)}$.

d. Déduire des questions précédentes que, si f est une fonction positive de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que f'' s'annule en tous les zéros de f (s'il en existe), alors $g = \sqrt{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

II. Estimation en norme uniforme sur la demi-droite $\mathbb{R}_+$.

II.1. Soit I un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}_+$, de longueur 2r, avec $r > 0$, et soit f une fonction réelle de classe C^2 sur I.

A l'aide de la formule de Taylor avec reste de Lagrange, appliquée à la fonction f en l'un des deux couples (x,x+r) ou (x,x-r), montrer que, pour tout élément x de I,

$$|f'(x)| \le \frac{2}{r} N_{\infty,I}(f) + \frac{r}{2} N_{\infty,I}(f'').$$

En déduire que:

(2) $\quad N_{\infty,I}(f') \le \frac{2}{r} N_{\infty,I}(f) + \frac{r}{2} N_{\infty,I}(f'')$.

II.2.<u>Application 1</u>: Soit f une fonction réelle de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$; on suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

a. Déduire de la question précédente que f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et que, pour tout $r > 0$,

(3) $\quad N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f') \le \frac{2}{r} N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f) + \frac{r}{2} N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f'')$.

b. En minimisant le second membre de (3) par rapport à $r > 0$, montrer que:

(4) $\quad N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f') \le 2\sqrt{N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f).N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f'')}$.

II.3.<u>Application 2</u>: Soient a et b deux fonctions réelles sur $\mathbb{R}_+$, bornées respectivement par A et B sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'équation différentielle:

(E) $\quad y''(x) + a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+$.

a. En utilisant (2), montrer que si f est une solution de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ de (E), pour tout réel $r > 0$ et tout intervalle I de longueur 2r contenu dans $\mathbb{R}_+$, on a:

$$(1-\tfrac{r}{2}A)\, N_{\infty,I}(f') \le (\tfrac{2}{r} + \tfrac{r}{2}B)\, N_{\infty,I}(f).$$

b.En déduire que si f est une solution bornée de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ de (E), alors f' et f'' sont aussi bornées sur $\mathbb{R}_+$.

B. Estimation optimale en norme quadratique de la dérivée d'une fonction de classe C^2 sur la demi-droite $\mathbb{R}_+$

I.Préliminaires.

I.1 Soient f et g deux fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}_+$ telles que les intégrales $\int_0^{+\infty}[f(t)]^2dt$ et $\int_0^{+\infty}[g(t)]^2dt$ soient convergentes.Montrer, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que l'intégrale $\int_0^{+\infty}f(t)g(t)dt$ est absolument convergente.

I.2. Soit f une fonction réelle, continue sur $\mathbb{R}_+$, et ayant une limite ℓ (finie ou non) quand x tend vers $+\infty$.Montrer que, si l'intégrale $\int_0^{+\infty}f(t)dt$ est convergente, alors $\ell = 0$.

I.3.Déterminer toutes les fonctions réelles de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant:

$$\begin{cases} f''+f'+f = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+, \\ f(0)+f'(0) = 0. \end{cases}$$

Pour une telle fonction, étudier la convergence des intégrales $\int_0^{+\infty}[f(t)]^2dt$ et $\int_0^{+\infty}[f''(t)]^2dt$.

II.Estimation en norme quadratique de la dérivée d'une fonction de classe C^2sur $\mathbb{R}_+$.

Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ telle que les intégrales $\int_0^{+\infty}[f(t)]^2dt$ et $\int_0^{+\infty}[f''(t)]^2dt$ soient convergentes.

II.1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty}f(t)\,f''(t)\,dt$ est convergente.

II.2. Montrer que, pour tous x, X et Y appartenant à $\mathbb{R}_+$:

(5 $\qquad \int_0^x[f'(t)]^2dt = f(x)\,f'(x) - f(0)\,f'(0) - \int_0^x f(t)f''(t)\,dt$;

(6) $\qquad \int_X^Y f(t)\,f'(t)\,dt = \frac{1}{2}\left([f(Y)]^2 - [f(X)]^2\right)$.

II.3. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty}[f'(t)]^2dt$ est convergente.(Pour cela, on montrera, en utilisant (5) et (6), que si cette intégrale était divergente, on aurait alors $\lim_{x\to+\infty}[f(x)\,f'(x)] = +\infty$, et par suite $\lim_{x\to+\infty}[f(x)]^2 = +\infty$)

II.4.Déduire de ce qui précède que:

(i) les intégrales $\int_0^{+\infty}f(t)\,f'(t)\,dt$ et $\int_0^{+\infty}f'(t)\,f''(t)\,dt$ sont convergentes;

(ii) $\lim_{x\to+\infty}[f(x)\,f'(x)] = \lim_{x\to+\infty}[f(x)]^2 = \lim_{x\to+\infty}[f'(x)]^2 = 0$.

II.5. Montrer que, pour tout t appartenant à $\mathbb{R}_+$:

$[f(t) + f'(t) + f''(t)]^2 - \left([f(t)]^2 + [f''(t)]^2 - [f'(t)]^2\right) = \left([f + f']^2\right)'(t)$.

En déduire que:

$$\int_0^{+\infty}[f(t)]^2dt + \int_0^{+\infty}[f''(t)]^2dt - \int_0^{+\infty}[f'(t)]^2dt = [f(0) + f'(0)]^2 + \int_0^{+\infty}[f(t) + f'(t) + f''(t)]^2\,dt,$$

et que:

(7) $\qquad [N_{2,\mathbb{R}_+}(f')]^2 \le [N_{2,\mathbb{R}_+}(f)]^2 + [N_{2,\mathbb{R}_+}(f'')]^2$.

II.6. En considérant, pour tout nombre réel λ strictement positif, les fonctions f_λ définies par $f_\lambda(x) = \sqrt{\lambda}\,f(\lambda x)$, déduire de (7) que:

$$[N_{2,\mathbb{R}_+}(f')]^2 \le \frac{1}{\lambda^2}[N_{2,\mathbb{R}_+}(f)]^2 + \lambda^2[N_{2,\mathbb{R}_+}(f'')]^2.$$

En déduire que:

(8) $\qquad N_{2,\mathbb{R}_+}(f') \le \sqrt{2\,N_{2,\mathbb{R}_+}(f).N_{2,\mathbb{R}_+}(f'')}$.

II.7. Déduire de B.I.3 que (8) est optimale pour les fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$.

C. Estimation en norme quadratique des dérivées intermédiaires d'une fonction de classe C^n, $n \ge 2$

Dans toute la suite du problème, I et J désignent respectivement les intervalles $I = [-1, +1]$ et $J = [-2, +2]$ et, pour toute fonction $u: J \to \mathbb{R}$, on note $\tilde{u}$ sa restriction à I.

On rappelle, pour une fonction réelle u de classe C^n sur J, la formule de Taylor avec reste intégral: pour tous x et y appartenant à J,

$$u(y) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(y-x)^k}{k!}u^{(k)}(x) + \frac{1}{(n-1)!}\int_x^y (y-t)^{n-1}u^{(n)}(t)\,dt.$$

I.Préliminaires.

I.1.<u>Estimation de n^n</u>.

En utilisant le développement en série entière de la fonction exponentielle $x \to e^x$, montrer que, pour tout entier $n \ge 1$: $n^n \le n!\,e^n$.

Tournez la page S.V.P.

I.2. Comportement local d'un opérateur intégral.

Soient g et h deux fonctions continues réelles sur l'intervalle J et soit p un entier positif ou nul.On désigne par u la fonction définie sur J par $u(x) = \int_{-2}^{x} (x-t)^p\, g(t)\, h(t)\, dt$.

En utilisant notamment l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à J:

$$|u(x)| \le \frac{(x+2)^{p+1/2}}{\sqrt{2p+1}} N_{2,J}(g)\, N_{\infty,J}(h).$$

En déduire que:

$$N_{2,I}(\tilde{u}) \le \frac{3^{p+1}}{2p+1} N_{2,J}(g)\, N_{\infty,J}(h).$$

II.Construction d'une suite de fonctions du type de Mandelbrojt.

Soit Ψ une fonction réelle, positive, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t)\, dt = 1$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.On considère la fonction Ψ_n définie sur $\mathbb{R}$ par $\Psi_n(x) = n\Psi(nx)$; il est immédiat que Ψ_n est positive, de classe C^∞, nulle en dehors de l'intervalle $[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]$ et vérifie: $\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_n(t)\, dt = 1$.

On considère la suite de fonctions $(\varphi_r)_{1\le r\le n}$ définies sur $\mathbb{R}$ par:

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \displaystyle\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \Psi_n(x-t)\, dt \\ \varphi_{r+1}(x) = \displaystyle\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \Psi_n(t)\, \varphi_r(x-t)\, dt \text{ pour } 1\le r\le n-1. \end{cases}$$

II.1. Montrer, par récurrence sur r, que chaque φ_r, $1\le r\le n$, est une fonction positive et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

II.2. Etant donné un entier r, avec $1\le r\le n$, et un entier s, avec $0\le s\le r$, montrer, par récurrence sur r, que: $N_{\infty,\mathbb{R}}(\varphi_r^{(s)}) \le (nC_1)^s$

avec $C_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi'(t)|\, dt$ et, par convention, $(nC_1)^0 = 1$.

II.3. Montrer que chaque φ_r, $1\le r\le n$, est nulle en dehors de l'intervalle $[-\frac{3}{2} - \frac{r}{2n}, \frac{3}{2} + \frac{r}{2n}]$ et égale à 1 sur l'intervalle $[-\frac{3}{2} + \frac{r}{2n}, \frac{3}{2} - \frac{r}{2n}]$.

III.Estimation des dérivées intermédiaires d'une fonction de classe C^n.

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et m un entier avec $0\le m\le n-1$; on note φ la fonction φ_n construite dans la partie précédente C.II.

Soit f une fonction réelle de classe C^n sur J.

Pour chaque entier k tel que $0\le k\le n$, on note F_k la fonction définie sur J par:

$$F_k(x) = \frac{1}{(n-m-1)!} \int_{-2}^{x} (x-t)^{n-m-1} \varphi^{(n-k)}(t)\, f^{(k)}(t)\, dt.$$

III.1. Majoration de $N_{2,I}(\tilde{f}^{(m)})$ au moyen des $N_{2,I}(\tilde{F}_k)$.

a.Montrer que, pour tout x appartenant à I, $f^{(m)}(x) = (\varphi f)^{(m)}(x)$.

b.Montrer que, pour tout x appartenant à J:

$$(\varphi f)^{(m)}(x) = \frac{1}{(n-m-1)!} \int_{-2}^{x} (x-t)^{n-m-1} (\varphi f)^{(n)}(t)\, dt.$$

c.En désignant par $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$, déduire de **C.III.1a** et **C.III.1b** que:

$$(9)\qquad N_{2,I}(\tilde{f}^{(m)}) \le \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N_{2,I}(\tilde{F}_k).$$

III.2. Majoration de $N_{2,I}(\tilde{F}_n)$.Montrer, en utilisant **C.I.2** que:

$$(10)\qquad N_{2,I}(\tilde{F}_n) \le \frac{3^{n-m}}{(n-m)!} N_{2,J}(f^{(n)}).$$

III.3. Majoration de $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} N_{2,I}(\tilde{F}_k)$.

a.Etant donné un entier k, avec $0\le k\le n-1$, et un réel x de I, montrer, à l'aide de **C.II.3** que:

$$F_k(x) = \frac{(-1)^k}{(n-m-1)!} \int_{-2}^{x} [(x-t)^{n-m-1}\varphi^{(n-k)}]^{(k)}(t)\, f(t)\, dt.$$

En déduire que:

$$F_k(x) = (-1)^k \sum_{\ell=0}^{q} \frac{\binom{k}{\ell}}{(n-m-\ell-1)!} \int_{-2}^{x} (x-t)^{n-m-\ell-1} \varphi^{(n-\ell)}(t)\, f(t)\, dt$$

où $q = \text{Min}(k, n-m-1)$, puis, à l'aide de **C.II.2** que:

$$(11)\qquad N_{2,I}(\tilde{F}_k) \le \Big[\sum_{\ell=0}^{q} \frac{\binom{k}{\ell}}{(n-m-\ell)!} 3^{n-m-\ell} (nC_1)^{n-\ell}\Big].N_{2,J}(f).$$

b.En observant que $\binom{n}{m} \le 2^n$ et en utilisant **C.I.1**, montrer que: $n^n \le (2e)^n\, m!\,(n-m)!$.

En déduire, compte tenu de (11) et de l'inégalité $n^{-\ell} \leq \frac{1}{\ell!}$ pour $0 \leq \ell \leq n$, qu'il existe une constante C_2 positive, indépendante de n, m et f telle que:

$$(12) \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} N_{2,I}(\tilde{F}_k) \leq C_2^n\, m!\, N_{2,J}(f).$$

III.4. Déduire des inégalités (9), (10) et (12), qu'il existe une constante C_3 positive, indépendante de n, m et f telle que:

$$(13) \qquad \frac{1}{m!} N_{2,I}(\widetilde{f^{(m)}}) \leq C_3^n \left[N_{2,J}(f) + \frac{1}{n!} N_{2,J}(f^{(n)})\right].$$

IV. Application.

Soit f une fonction réelle de classe C^∞ sur J. Soit $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers telle que la suite $\left(\frac{k_{j+1}}{k_j}\right)_{j\geq 1}$ soit bornée.

On suppose qu'il existe une constante C, strictement positive, pour laquelle, pour tout entier j:

$$N_{2,J}(f^{(k_j)}) \leq C^{k_j+1}.k_j!.$$

Déduire de (13) qu'il existe une constante C', strictement positive, telle que, pour tout entier m: $\quad N_{2,I}(\widetilde{f^{(m)}}) \leq C'^{m+1}.m!.$

(On pourra considérer l'entier k_j pour lequel $k_j \leq m < k_{j+1}$).

En déduire que f est développable en série entière au voisinage de chaque point intérieur de I.

CAPES 91 EXTERNE
1ère EPREUVE

A ESTIMATION de la DERIVEE PREMIERE d'une FONCTION de CLASSE C^2

I ESTIMATION PONCTUELLE

I.1.a. la Formule de Taylor avec reste de Lagrange, appliquée à l'ordre 2 donne :

$$f(x+\lambda) = f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} f''(c),$$

où c est un réel compris entre x et $x+\lambda$.

En remarquant que $|f''(c)| \leq N_{\infty,\mathbb{R}}(f'')$, il vient :

$$0 \leq f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} f''(c) \leq \underbrace{f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} N_{\infty,\mathbb{R}}(f'')}_{T_x(\lambda)}$$

I.1.b. le Trinôme T_x précédent étant positif pour $\forall \lambda$ son discriminant est négatif ou nul : $\Delta = (f'(x))^2 - 2N_{\infty,\mathbb{R}}(f'').f(x) \leq 0$

d'où : $|f'(x)| \leq \sqrt{2N_{\infty,\mathbb{R}}(f'').f(x)}$ (1)

I.2.a. g est la composée des deux fonctions :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ $\qquad h \begin{pmatrix} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{pmatrix}$

- f est continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$; h est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc $g = h \circ f$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Soit x tel que $f(x) \neq 0$: h est dérivable en $f(x)$ (car h est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc g est dérivable en x.

I.2.b. 1) On a en un tel x_0, $f(x_0) = 0$ d'où : $\sqrt{2N_{\infty,\mathbb{R}}(f'').f(x_0)} = 0$.

Puis $f'(x_0) = 0$

2) On a : $f(x_0+h) = \frac{h^2}{2}(f''(x_0) + \varepsilon(h))$, avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

(Taylor avec reste de Young, cette fois...)

1.2.b. 2)

Si $f''(x_0) < 0$, Pour h assez petit $f(x_0+h)$ est du signe de $f''(x_0)$ est donc négatif, contrairement à l'hyp.

3) Taylor ... $f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(c)$.

$f(x) = \frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(c_x)$.

On a : $\Delta(x) = \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{g(x)}{x-x_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{|x-x_0|\sqrt{f''(c_x)}}{x-x_0}$ pour $x \neq x_0$, car :

$g(x) = \sqrt{f(x)}$ et $g(x_0) = 0$.

Pour $x > x_0$, $\Delta(x) = \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{f''(c_x)}$ - pour $x < x_0$ $\Delta(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{f''(c_x)}$

Comme f est de classe C^2. $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \Delta(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{f''(x_0)} = g'_-(x_0)$

. $\lim \Delta(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{f''(x_0)} = g'_+(x_0)$

donc : $g''_-(x_0) \neq g''_+(x_0)$. et

g n'est pas dérivable.

1.2.c. 1) Soit $x \in I_r$ il existe $\theta \in]0,1[$ telque :

On a $f'(x) = f'(x_0) + (x-x_0) f''(x_0 + \theta(x-x_0))$

(Taylor, ordre 1 !)

Comme $f'(x_0) = 0$ on en déduit : $|f'(x)| = |x-x_0||f''(x_0+\theta(x-x_0))|$
$\leq r M_r(f'')$

Car : $|x-x_0| \leq r$

$|f''(x_0+\theta(x-x_0))| \leq \sup_{y \in I_r} |f''(y)|$

2) Soit : $T(\lambda) = f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} M_r(f'')$. le discriminant de ce trinôme est : $\Delta = (f'(x))^2 - 2M_r(f'')f(x)$. Si, effectivement, $2M_r(f'')f(x) < (f'(x))^2$, ce Δ est > 0 et le trinôme a deux racines distinctes λ_1 et λ_2.

On a : $\lambda_1 + \lambda_2 =$ Somme des racines $= -\frac{2f'(x)}{M_r(f'')}$ (Attention au 2 !)

Puis $\mu = \frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2) = -\frac{f'(x)}{M_r(f'')}$

D'après 1) $\left|\frac{f'(x)}{M_r(f)}\right| \leq r$ d'où $\mu \in [-r, r]$

1.2.c [Suite] 2) - Suite

Maintenant il existe $c \in]x, x+\nu[$ (Inter. pas forc. ordonné) tq

$$f(x+\nu) = f(x) + \nu f'(x) + \frac{\nu^2}{2} f''(c)$$

$$\& \; \tau(\nu) = f(x) + \nu f'(x) + \frac{\nu^2}{2} M_r(f'')$$

$$f(x+\nu) - \tau(\nu) = \frac{\nu^2}{2}\left(f''(c) - M_r(f'')\right) \leq 0 .$$

d'où : $f(x+\nu) \leq \tau(\nu)$.

Puis $\nu \in]\lambda_1, \lambda_2[$ (Intervalle pas forcément ordonné) donc

donc : $\tau(\nu) < 0$ (ν est entre les 2 racines et $\neq$ de 2 racines)

(Remarquer que $M_r(f'') > 0$ Par hypothèse !)

le fait que $f(x+\nu)$ soit < 0 est absurde : c'est donc que : $|f'(x)| \leq \sqrt{2 M_r(f'') f(x)}$, pr $\forall x \in I_r$

Remarque la démonstration de I1b. ne marche plus ici pourquoi ?

1.2.d. 1°) Dérivabilité de g : le calcul fait en 1.2b.3. montre qu'en 1 point x_0 tel que $f(x_0) = 0$ $f''(x_0) = 0$ (et donc $f'(x_0) = 0$; 12b1) la dérivée à gauche et à droite de g coïncident ($g'_-(x_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{f''(x)}\big|_{x=x_0}$) et valent 0 !

2°) Continuité de g'

- Soit x tq $f(x) \neq 0$ Alors g' est continue en x puisque sur un voisinage de x sur lequel f ne s'annule pas : $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x)$.
- Soit x_0 tq $f(x_0) = 0$. Soit f est $\equiv 0$ et c'est terminé si $f \not\equiv 0$ alors . .

Alors (hyp sur f) $f''(x_0) = 0$ et $f'(x_0) = 0$ (1.2.b.1. toujours !). On remarque que pour $r > 0$ fixé f'' ne saurait être identiquement nulle sur I_r ($f'' \equiv 0 \Rightarrow f' \equiv$ constante $\Rightarrow f = \lambda(x - x_0)$! non positive au voisinage de x_0) donc le 1.2.c. est vérifié ; on en adopte les notations :

On a donc : $\forall x \in I_r$ $|f'(x)| \leq \sqrt{2 M_r(f'') f(x)}$ (1.2.c. 2.)

La relation $f'(x) = 2 g'(x) \sqrt{f(x)}$ est vraie pour $\forall x \in I_r$:

- Si $f(x) \neq 0$ c'est le calcul de $g'(x)$.
- Si $f(x) = 0$ alors $f'(x) = 0$ (1.2.b.1.) (et d'ailleurs $g'(x) = 0$ 1.2.b.3 et début du d)

On a donc en remplaçant dans 1.2.c. 2 :

$$|2 g'(x) \sqrt{f(x)}| \leq |\sqrt{2 M_r(f'')} \sqrt{f(x)}|$$

Puis $0 \leq |2 g'(x)| \leq \sqrt{2 M_r(f'')}$

En faisant tendre r vers 0 on voit que :

$$\lim_{x \to x_0} g'(x) = 0 = g'(x_0)$$

Car $\lim_{r \to 0} M_r(f'') = 0$ (par continuité de f'', $M_r(f'') \to f''(x_0)$ et $f''(x_0) = 0$ par hypothèse).

II - I Comme longueur $(I) = 2r$ et $x \in I$, soit $x+r$, soit $x-r$ habite I. Supposons que ce soit $x+r$. Alors : $\exists c \in]x, x+r[$ tq :

$$f(x+r) - f(x) = r f'(x) + \frac{r^2}{2} f''(c)$$

d'où :

$$f'(x) = \frac{1}{r}(f(x+r) - f(x)) - \frac{r}{2} f''(c)$$

Puis : $\forall x \in I \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{r} 2N_{\infty I}(f) + \frac{r}{2} N_{\infty, I}(f'')$. (II.1.a.)

Puis, par prolongement d'inégalité :

$$N_{\infty I}(f') \leq \frac{2}{r} N_{\infty, I}(f) + \frac{r}{2} N_{\infty, I}(f''). \quad (II.1.b)$$

II.2. - Première Application

II-2-a) On a : $\forall I \subset \mathbb{R}$ I fermé borné, I de longueur $2r$.

$$N_{\infty I}(f') \leq \frac{2}{r} N_{\infty, \mathbb{R}^+}(f) + \frac{r}{2} N_{\infty, \mathbb{R}^+}(f'') \quad (3)$$

Car $N_{\infty I}(f) \leq N_{\infty \mathbb{R}^+}(f)$.

Soit $r > 0$ fixé ; Soit $x \in \mathbb{R}^+$, il existe I fermé borné de longueur $2r$ tel que $x \in I$. Pour cet I $|f'(x)| \leq N_{\infty I}(f') \leq \frac{2}{r} N_{\infty \mathbb{R}^+}(f) + \frac{r}{2} N_{\infty \mathbb{R}^+}(f'')$

On passe au sup $N_{\infty \mathbb{R}^+}(f') = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f'(x)| \leq \frac{2}{r} N_{\infty \mathbb{R}^+}(f) + \frac{r}{2} N_{\infty \mathbb{R}^+}(f'')$.

II-2-b) Que le texte est mal rédigé ! On cherche le minimum pour r positif du membre de droite de (3).

On pose : $\varphi(r) = \frac{2}{r} N + \frac{r}{2} N''$ (Notation évidente)

φ est C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et : $\varphi'(r) = -\frac{2}{r^2} N + \frac{1}{2} N'' = \frac{1}{2r^2}(N''r^2 - 4N)$

d'où les variations de φ :

r	0		$2\sqrt{\frac{N}{N''}}$	
$\varphi'(r)$		$-$	0	$+$
φ		↘		↗

avec $\varphi\left(2\sqrt{\frac{N}{N''}}\right) = \sqrt{NN''} + \sqrt{NN''} = 2\sqrt{NN''}$

d'où :

$$(4) \qquad N_{\infty \mathbb{R}^+}(f') \leq 2\sqrt{N_{\infty \mathbb{R}^+}(f)\, N_{\infty \mathbb{R}^+}(f'')}$$

II-3 - Deuxième Application

II.3.a) Bricolage immonde jura : $y''(x) = -a(x)y'(x) - b(x)y(x)$.

D'où : si f est comme dans le texte : $N_{\infty I}(f'') \leq A N_{\infty I}(f') + B N_{\infty, I}(f)$

En remplaçant : $N_{\infty I}(f') \leq \left(\frac{2}{r} + \frac{r}{2} B\right) N_{\infty I}(f) + \frac{r}{2} A N_{\infty I}(f')$

et on bascule le dernier terme ...

II.3.b) Résultat intéressant : pour une ED linéaire dont les coefs. sont bornés, si une solution est bornée néc. ses dérivées premières et secondes le sont.

On a d'abord : $\left(1 - \frac{r}{2}A\right) N_{\infty I}(f') \leq \left(\frac{2}{r} + \frac{r}{2} B\right) N_{\infty \mathbb{R}^+}(f)$

(En utilisant $N_{\infty, I\, \mathbb{R}^+}(f) \leq N_{\infty \mathbb{R}^+}(f)$).

Puis, pr tt intervalle I de longueur $1/A$:

$$\frac{1}{2} N_{\infty I}(f') \leq \left(2A + \frac{B}{2A}\right) N_{\infty \mathbb{R}^+}(f)$$

Puis a fortiori :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \qquad \frac{1}{2}|f'(x)| \leq \left(2A + \frac{B}{2A}\right) N_{\infty \mathbb{R}^+}(f)$$

Remarques 1) Dans II-2 et II-3 les résultats sont d'abord établis pour des intervalles arbitraires mais de longueur $2r$. Le passage délicat consiste à remarquer que tt $x \in \mathbb{R}$ est enfermé dans un intervalle de longueur $2r$..

2) Toute la difficulté du II.3.b. est de choisir le bon intervalle (ou plutôt la bonne longueur pour I..)

3) Dans II.3.b. montrez en détail que f'' est bornée.

B ESTIMATION OPTIMALE EN NORME QUADRATIQUE

I – PRELIMINAIRES.

I.1. On a pour tout $A \in \mathbb{R}^+$

$$\left(\int_0^A |f(t)||g(t)|\,dt\right)^2 \leq \int_0^A (f(t))^2 dt \int_0^A (g(t))^2 dt$$

(soit $(\langle |f|,|g|\rangle)^2 \leq \|f\|^2_{2,[0,A]} \|g\|^2_{2,[0,A]}$)

d'où $0 \leq \int_0^A |f(t)||g(t)|\,dt \leq \left|\int_0^A (f(t))^2 dt\right|^{1/2} \left|\int_0^A (g(t))^2 dt\right|^{1/2}$

la famille de nombre $\int_0^A |f(t)||g(t)|\,dt$ est une famille croissante (avec A) majorée par : $\left(\left(\int_0^{+\infty} f^2(t)dt\right)\int_0^{+\infty}(g(t))^2 dt\right)^{1/2}$

donc $\lim_{A\to+\infty} \int_0^A |f(t)||g(t)|\,dt$ existe (au sens $<+\infty$) d'où la convergence.

I 2. • Si l'on a : $0<|\ell|<+\infty$ alors au voisinage de $+\infty$ on a $f(t) \sim \ell$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} \ell\,dt$ est divergente.

• Si $|\ell| = +\infty$, il existe $B, A > 0$ tels que :

1) $f(x)$ garde un signe constant sur $[A, +\infty[$.

2) $\forall x > A \quad |f(x)| > B$.

alors $\int_A^{\xi} |f(t)|\,dt > B(\xi - A)$ pour $\xi > A$. Donc $\int_A^{+\infty}|f(t)|dt$ est divergente : comme f garde un signe constant sur $[A,+\infty[$ $\int_A^{+\infty} f(t)dt$ est aussi divergente (le 2) entraîne le 1)...).

I.3. On a : $f'' + f' + f = 0$ donc $f(x) = e^{-x/2}\left(A\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + B\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

avec de plus : $f(0) + f'(0) = 0$

Or : $f(0) = B$ et: $f'(0) = \frac{A\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}B$)

(Car $f'(x) = e^{-x/2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}A\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}B\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

d'où néces. $\frac{A\sqrt{3}}{2} + \frac{B}{2} = 0$

Puis $f(x) = A\,e^{-x/2}\left(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x - \sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

On remarque que $f(t)$ s'écrit : $f(t) = A e^{-t/2} g(t)$

où g est bornée, continue sur $\mathbb{R}^+$; de même $f''(t) = A e^{-t/2} h(t)$

... [illegible]

I.3. – Suite –

Alors $f^2(t)$ s'écrit : $A^2 e^{-t}|g(t)|^2$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty}(f(t))^2 dt$ est convergente. Même raisonnement pour $(f'')^2$.

II.1. On applique I.1. avec $g = f''$, ce qui est possible car : 1°) $f, f'' \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ 2°) $\int_0^{+\infty} f^2(t)dt$ et $\int_0^{+\infty}(f''(t))^2 dt$ convergent.

donc $\int_0^{+\infty} f(t) f''(t)\,dt$ converge.

II.2. • Une intégration par parties donne :

(5) $\int_0^x (f'(t))^2 dt = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x f(t)f''(t)dt$

car : 1) f est une primitive de f' 2) f'' est la dérivée de f.

•• Une primitive de $t \mapsto f(t)f'(t)$ est $\frac{1}{2}(f(t))^2$ donc :

(6) $\int_x^y f(t) f'(t)\,dt = \frac{1}{2}[(f(y))^2 - (f(x))^2]$.

II.3. Comme la fonction $(f')^2$ est positive, dire que $\int_0^{+\infty}(f'(t))^2 dt$ diverge c'est dire que : $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x (f'(t))^2 dt = +\infty$.

Comme $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t) f''(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t) f''(t)\,dt \in \mathbb{R}$, car d'après II.1. l'intégrale converge on a nécessairement : $\lim_{x\to+\infty} f(x) f'(x) = +\infty$

On en déduit que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(t) f'(t)\,dt$$

est divergente : c'est l'intégrale généralisée, d'une fonction positive sur une section finissante de $\mathbb{R}$, de limite non nulle en $+\infty$ (I.2.)

Dans (6) on a alors ; (pour x fixé) $\lim_{y\to+\infty}\int_x^y f(t)f'(t)dt = +\infty$

d'où $\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{2}((f(y))^2 - f(x)^2) = +\infty$ et : $\lim_{y\to+\infty}(f(y))^2 = +\infty$.

Ceci contredit, toujours d'après I.2. la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty}(f(t))^2 dt.$$

C'est donc que : $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x (f'(t))^2 dt < +\infty$.

II.4. • En appliquant I 1 avec $g = f'$ ce qui est possible car
1°) $f, f' \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ 2°) $\int_0^{+\infty} (f(t))^2 dt$ et $\int_0^{+\infty} (f'(t))^2 dt$ convergent (II.3)
on obtient la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t) f'(t) dt$.

•• En appliquant I 1 avec f' et f'' en place de f et g on obtient de même la convergence de $\int_0^{+\infty} f'(t) f''(t) dt$.

• la relation (5) entraîne l'existence de la limite de $x \to f(x) f'(x)$ en $+\infty$ et la valeur ℓ de cette limite : $\ell = \int_0^{+\infty} (f'(t))^2 dt + \int_0^{+\infty} f(t) f''(t) dt + f(0) f'(0)$.
la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t) f'(t) dt$ entraîne alors $\ell = 0$ (I.2.).

⁝ la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t) f'(t) dt$ et la relation (6) entraînent l'existence de la limite de $x \to (f(x))^2$ en $+\infty$; la convergence de $\int_0^{+\infty} (f(t))^2 dt$ entraîne la nullité de cette limite.

⁝ Enfin on peut écrire : $\int_0^{y} f'(t) f''(t) dt = \frac{1}{2}\left((f'(y))^2 - (f'(0))^2\right)$. Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} f'(t) f''(t) dt$ converge, selon l'argument précédent la limite de : $y \to f'(y)$ en $+\infty$ existe et vaut 0.

II.5. • On a : $(f(t) + f'(t) + f''(t))^2 = (f(t))^2 + (f'(t))^2 + (f''(t))^2 + 2\sum_{i=0}^{1} f^{(i)}(t) f^{(i+1)}(t) + 2 f(t) f''(t)$

Puis : $(f(t) + f'(t) + f''(t))^2 - ((f(t))^2 + (f''(t))^2 - (f'(t))^2) =$
$$= 2(f'(t))^2 + 2\sum_{i=0}^{1} f^{(i)}(t) f^{(i+1)}(t) + 2 f(t) f''(t)$$

On a $((f+f')^2)'(t) = ((f(t))^2 + 2 f(t) f'(t) + (f'(t))^2)'$
$$= 2 f(t) f'(t) + 2(f'(t))^2 + 2 f(t) f''(t) + 2 f'(t) f''(t)$$
et on constate l'identité des 2 membres.

•• Toutes les intégrales du type : $\int_0^{+\infty} f^{(i)}(t) f^{(j)}(t) dt$, pour $i \in \{0,1,2\}$ et $j \in \{0,1,2\}$, étant convergentes, on peut écrire
$$\int_0^{+\infty} (f(t) + f'(t) + f''(t))^2 dt - \int_0^{+\infty} (f(t))^2 dt - \int_0^{+\infty} (f''(t))^2 dt + \int_0^{+\infty} (f'(t))^2 dt$$
$$= \int_0^{+\infty} ((f+f')^2)'(t) dt = \left[(f+f')^2 \right]_0^{+\infty}.$$

Comme $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$ et $\lim_{t \to +\infty} f'(t) = 0$, on en déduit.
$$\int_0^{+\infty} (f(t) + f'(t) + f''(t))^2 dt + (f(0) + f'(0))^2$$
$$= \int_0^{+\infty} (f(t))^2 dt + \int_0^{+\infty} (f''(t))^2 dt - \int_0^{+\infty} (f'(t))^2 dt.$$

••• On a : $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{2} f^{(i)}(t)\right)^2 dt \geq 0$ et $(f(0) + f'(0))^2 \geq 0$ d'où :
$$(7) \quad \int_0^{+\infty} (f'(t))^2 dt \leq \int_0^{+\infty} (f(t))^2 dt + \int_0^{+\infty} (f''(t))^2 dt$$
ce qui est l'inégalité voulue.

II.6. Posons : $f_\lambda(x) = \sqrt{\lambda} f(\lambda x)$

• On a : $(N_{2,\mathbb{R}^+}(f_\lambda))^2 = (N_{2,\mathbb{R}^+}(f))^2$ car : $\int_0^{+\infty} \lambda (f(\lambda x))^2 dx = \int_0^{+\infty} (f(t))^2 dt$

•• Puis : $f'_\lambda(x) = \lambda^{3/2} f'(\lambda x)$
donc : $\int_0^{+\infty} (f'_\lambda(x))^2 dx = \lambda^3 \int_0^{+\infty} (f'(\lambda x))^2 dx = \lambda^2 \int_0^{+\infty} (f'(t))^2 dt$.
d'où $(N_{2,\mathbb{R}^+}(f'_\lambda))^2 = \lambda^2 (N_{2,\mathbb{R}^+}(f'))^2$.

••• De même on obtient $f''_\lambda(x) = \lambda^{5/2} f''(\lambda x)$ d'où :
$$(N_{2,\mathbb{R}^+}(f''_\lambda))^2 = \lambda^4 (N_{2,\mathbb{R}^+}(f''))^2$$

D'après II.5. on a :
$$(N_{2,\mathbb{R}^+}(f'_\lambda))^2 \leq (N_{2,\mathbb{R}^+}(f_\lambda))^2 + (N_{2,\mathbb{R}^+}(f''_\lambda))^2$$
d'où en remplaçant :
$$\lambda^2 (N_{2,\mathbb{R}^+}(f'))^2 \leq (N_{2,\mathbb{R}^+}(f))^2 + \lambda^4 (N_{2,\mathbb{R}^+}(f''))^2$$
et en divisant par λ^2 on obtient la conclusion (ouf !)
$$(N_{2,\mathbb{R}^+}(f'))^2 \leq \frac{1}{\lambda^2} (N_{2,\mathbb{R}^+}(f))^2 + \lambda^2 (N_{2,\mathbb{R}^+}(f''))^2$$

Dans la question A II.2.a. on a montré que le minimum pour $r > 0$ de la fonction $r \to \frac{1}{r}\left(\frac{A'}{2}\right) + r\left(\frac{A''}{2}\right)$ (avec $A' A'' \geq 0$) était $2\sqrt{A' A''}$.

On obtient donc ici avec $A' = \frac{(N_{2,\mathbb{R}^+}(f))^2}{2}$ $A'' = 2 N_{2,\mathbb{R}^+}(f'')^2$
$$(N_{2,\mathbb{R}^+}(f'))^2 \leq 2\, N_{2,\mathbb{R}^+}(f)\, N_{2,\mathbb{R}^+}(f'')$$
d'où :
$$N_{2,\mathbb{R}^+}(f') \leq \sqrt{2\, N_{2,\mathbb{R}^+}(f) . N_{2,\mathbb{R}^+}(f'')}$$

II-7. Soit f une solution de l'équation dif : $y''+y'+y=0$ vérifiant : $y(0)+y'(0)=1$. On a alors ; d'après II-5.

$$(N_{2\mathbb{R}^+}(f'))^2 = (N_{2\mathbb{R}^+}(f))^2 + (N_{2\mathbb{R}^+}(f''))^2 .$$

On en déduit pour tout $\lambda>0$ l'égalité

$$(N_{2\mathbb{R}^+}(f'))^2 = \frac{1}{\lambda^2} \qquad + \lambda^2$$

Puis la relation 7' en minimisant le membre de droite :

$$(N_{2\mathbb{R}^+}(f'))^2 = \sqrt{2\, N_{2\mathbb{R}^+}(f)\, N_{2\mathbb{R}^+}(f'')}$$

Remarque : ce qui veut dire que :

$$2\, N_{2\mathbb{R}^+}(f)\, N_{2\mathbb{R}^+}(f'') = (N_{2\mathbb{R}^+}(f))^2 + N_{2\mathbb{R}^+}(f'')^2$$

C - ESTIMATION EN NORME QUADRATIQUE des DERIVEES INTERMEDIAIRES

C.I. - PRELIMINAIRES.

C.I.1. - Estimation de n^n.

On a : $e^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{n^p}{p!} \geq \frac{n^n}{n!}$ d'où : $n!\,e^n \geq n^n$.

C.I.2. On a $|u(x)| \leq \int_{-2}^{x} (x-t)^p |g(t)||h(t)|\,dt \leq \int_{-2}^{x} (x-t)^p |g(t)|\,dt\; N_{\infty,J}(h)$

Or : $\left(\int_{-2}^{x} (x-t)^p |g(t)|\,dt\right)^2 \leq \int_{-2}^{x} (x-t)^{2p}dt \int_{-2}^{x} (g(t))^2 dt$ (Cauchy-Schwarz)

$\leq \int_{-2}^{x} (x-t)^{2p}dt \quad N_{2,J}(g)$ Définition de $N_{2,J}$

Puis : $\int_{-2}^{x} (x-t)^{2p}dt = \left[\frac{(x-t)^{2p+1}}{2p+1}\right]_{-2}^{x} = \frac{(x+2)^{2p+1}}{2p+1}$

d'où effectivement : $|u(x)| \leq \frac{(x+2)^{p+1/2}}{\sqrt{2p+1}} N_{2,J}(g)\, N_{\infty J}(h)$.

•

On a $|\tilde{u}(x)|^2 \leq \frac{(x+2)^{2p+1}}{2p+1}(N_{2,J}(g)\, N_{\infty J}(h))^2$

d'où : $(N_{2I}(\tilde{u}))^2 = \int_{-1}^{1} |\tilde{u}(x)|^2 dx \leq (N_{2,J}(g)\, N_{\infty,J}(h))^2 \int_{-1}^{1} \frac{(x+2)^{2p+1}}{(2p+1)}dx$

$\leq (N_{2,J}(g)\, N_{\infty,J}(h))^2 \left[\frac{(x+2)^{2p+2}}{(2p+1)(2p+2)}\right]_{-1}^{1}$

$\leq (N_{2J}(g)\, N_{\infty J}(h))^2 \left(\frac{3^{2p+2}}{(2p+1)(2p+2)} - \frac{1}{(2p+1)(2p+2)}\right)$

d'où la majoration $(N_{2I}(\tilde{u}))^2 \leq (N_{2J}(g)\, N_{\infty J}(h))^2 \frac{3^{2p+2}}{(2p+1)^2}$

C'est l'inégalité voulue...

C-II FONCTIONS "à la" MANDELBROT

- φ est ≥ 0 positive de classe C^∞ de support inclus dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt = \int_{-1/2}^{1/2} \varphi(t)\,dt = 1.$$
- φ_n définie par : $\varphi_n(x) = n\,\varphi(nx)$ est ≥ 0 de support inclus dans $[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]$ de dérivée $\varphi'_n(x) = n^2 \varphi'(nx)$

On a $\int_{-\infty}^{+\infty} n\,\varphi(nx)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\,dy = 1$.

II-1 les φ_r sont positives de classe C^∞.

●) Cas de φ_1.

. la fonction φ_1 est définie par une intégrale sur un compact. la fonction $(t,x) \longrightarrow \varphi_n(x-t)$ figurant sous le signe somme est de classe C^∞ (d'ailleurs p_r aux 2 variables) : le résultat suit φ_1 est C^∞.

- Comme $\forall y \in \mathbb{R}$ $\varphi_n(y) \geq 0$ on a $\varphi_1(x) \geq 0$, pr $\forall x \in \mathbb{R}$

●) On suppose $\varphi_1 \dots \varphi_r$ de classe C^∞ et positives.
Alors φ_{r+1} est de classe C^∞ par le m̂ argument : $(t,x) \to \varphi_n(t)\varphi_r(x-t)$ est de classe C^∞ (hyp. de récurrence) et positive également ..

II-2 Majoration de $N_\infty \mathbb{R}(\varphi_r^{(s)})$ pour $1 \leq r \leq n$ et $0 \leq s \leq r$.

●) Cas de φ_1 $(r=1)$

- $s=0$ $\quad N_\infty \mathbb{R}(\varphi_1) = \sup_{x\in\mathbb{R}}(\varphi_1)$

Or pour $x \in \mathbb{R}$ fixé $\varphi_1(x) = \int_{-3/2}^{3/2} \varphi_n(x-t)\,dt = -\int_{3/2+x}^{-3/2+x} \varphi_n(u)\,du$
$$= \int_{x-3/2}^{x+3/2} \varphi_n(u)\,du \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(u)\,du$$
$$\leq 1$$

- $s=1$ On a par dérivation sous le signe somme
$$|\varphi_1'(x)| = \left|\int_{-3/2}^{3/2} \varphi_n'(x-t)\,dt\right| \leq \int_{-3/2}^{3/2} |n\,\varphi_n'(x-t)|\,dt \leq n\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi'(x-t)|\,dt$$
$$\leq n\,C_1$$
(notation du texte)

C II - Suite — II. 2 - Suite

●) Récurrence : on suppose que pour $r < n$ on a la propriété i.e.
$$\forall s \in \{0, \dots, r\} \quad N_\infty \mathbb{R}(\varphi_r^{(s)}) \leq (n\,C_1)^s.$$
On doit montrer que :
$$\forall s \in \{0, \dots, r+1\} \quad N_\infty \mathbb{R}(\varphi_{r+1}^{(s)}) \leq (n\,C_1)^s$$
Soit donc $s \in \{0, \dots, r\}$; on a :
$$|\varphi_{r+1}^{(s)}(x)| = \left|\int_{-3/2}^{3/2} \varphi_n(t)\,\varphi_r^{(s)}(x-t)\,dt\right| \leq \int_{-3/2}^{3/2} \varphi_n(t)\,N_\infty \mathbb{R}(\varphi_r^{(s)})\,dt$$
(Attention ! φ_r^{s} n'a aucune raison d'être positive ...)

d'où : $\varphi_{r+1}^{(s)}(x) \leq N_\infty \mathbb{R}(\varphi_r^{(s)}) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t)\,dt$
$\leq (n\,C_1)^s$ par hyp. de récurrence.

Pour $s = r+1$, on a :
$$\varphi_{r+1}^{r+1}(x) = \int_{-3/2}^{3/2} \varphi_n(t)\,\varphi_r^{r+1}(x-t)\,dt$$
$$= -\Big[\varphi_n(t)\,\varphi_r^{r}(x-t)\Big]_{-3/2}^{3/2} + \int_{-3/2}^{3/2} \varphi_n'(t)\,\varphi_r^{(r)}(x-t)\,dt$$
. le 1er terme est nul car $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset [-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]$

. Donc $|\varphi_{r+1}^{(r+1)}(x)| \leq \int_{-3/2}^{3/2} |\varphi_n'(t)|\,N_\infty(\varphi_r^{(r)})\,dt$
$\leq (n\,C_1)^r \int_{-3/2}^{3/2} |\varphi_n'(t)|\,dt$ (hyp de récurrence)
$\leq n\,C_1^{\,r+1}$

II-3 - Support des φ_r

$-\frac{3}{2}+\frac{r}{2n}$ $\quad +\frac{3}{2}-\frac{r}{2n}$ $\quad -\frac{3}{2}-\frac{r}{2n}$ $\quad \frac{3}{2}+\frac{r}{2n}$

■ Cas de φ_1

On a $\varphi_1(x) = \int_{x-3/2}^{x+3/2} \varphi(u)\,du$ (en posant $u = x-t$)

1e) Si $x > \frac{3}{2} + \frac{1}{2n}$ $\quad x - \frac{3}{2} > \frac{1}{2n}$ et φ est nulle sur $[x-\frac{3}{2}, x+\frac{3}{2}]$

2e) Si $x < -\frac{3}{2} - \frac{1}{2n}$ $\quad x + \frac{3}{2} < -\frac{1}{2n}$ et φ est nulle sur $[x-\frac{3}{2}, x+\frac{3}{2}]$

cas 1 : $\frac{3}{2}+\frac{1}{2n}$ $\quad x$ $\qquad$ cas 2 : x $\quad -\frac{3}{2}-\frac{1}{2n}$

3e) On suppose $-\frac{3}{2} + \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2n}$ d'où $\begin{cases} x - \frac{3}{2} \leq -\frac{1}{2n} \\ \frac{1}{2n} \leq x + \frac{3}{2} \end{cases}$.

donc $\operatorname{Supp}(\varphi_n) \subset [-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}] \subset [x-\frac{3}{2}, x+\frac{3}{2}]$

II suite | **II-3 suite**

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(u)\,du = \int_{\text{supp}\,\varphi_n} \varphi_n(u)\,du = \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \varphi_n(u)\,du$

d'où ici $\int_{x-3/2}^{x+3/2} \varphi(u)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(u)\,du = 1$

$x-3/2$ — $-1/2n$ — Supp φ_n — $1/2n$ — $x+3/2$

●) Récurrence ; on suppose le résultat vrai pour φ_r

1°) On suppose $x > 3/2 + \frac{r+1}{2n}$.

- Pour $t \notin \left[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right]$ $\varphi_n(t) \equiv 0$
- Pour $t \in \left[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right]$ $x - t \in \left[x-\frac{1}{2n}, x+\frac{1}{2n}\right]$

donc $x - t \geq x - \frac{1}{2n} \geq 3/2 + r/2n$.

Et alors par hyp de récurrence $\varphi_r(x-t) \equiv 0$.

Donc $\forall t \in [-3/2, 3/2]$ la fonction à intégrer est nulle.

2°) Pour $x < -3/2 - \frac{r+1}{2n}$ le raisonnement est le même

3°) Supposons $x \in \left[-\frac{3}{2} + \frac{r+1}{2n}, \frac{3}{2} - \frac{r+1}{2n}\right]$

On a en fait :

$\varphi_{r+1}(x) = \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \varphi_n(t)\,\varphi_r(x-t)\,dt$ car Supp $\varphi_n \subset \left[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right]$

- Pour $t \in \left[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right]$ on a (+ ou) $x - t \in \left[x-\frac{1}{2n}, x+\frac{1}{2n}\right]$

Or :

- $x - 1/2n > -3/2 + \frac{r+1}{2n} - \frac{1}{2n}$
$> -3/2 + r/2n$
- $x + 1/2n < \frac{3}{2} - r/2n$

$x-\frac{1}{2n}$ — $x-t$ — $x+\frac{1}{2n}$

D'où $\forall t \in \left[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right]$ $x - t \in \left[-\frac{3}{2} + \frac{r}{2n}, \frac{3}{2} - \frac{r}{2n}\right]$

Alors $\varphi(x-t) \equiv 1$ pour ~~x~~ $t \in \left[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right]$ (hyp de réc)

D'où $\varphi_{r+1}(x) = \int_{-\frac{1}{2n}}^{1/2n} \varphi_n(t)\cdot 1\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t)\,dt = 1$

C-III Estimation des dérivées intermédiaires.

Notations :
- $I = [-1, 1]$, $J = [-2, 2]$ $u\ J \to \mathbb{R}$ $\tilde{u}\ I\ \mathbb{R}$ restriction de u.
- $n \geq 2$ et $0 \leq m \leq n-1$
- $\varphi = \varphi_n$ du II
- f de classe C^n sur J.
- $F_k(x) = \frac{1}{(n-m-1)!} \int_{-2}^{x} (x-t)^{n-m-1}\,\varphi^{(n-k)}(t)\,f^{k}(t)\,dt$

(Pour $k \in \{0, 1 \ldots n\}$.

III-1) majoration de $N_{2,I}\left(\tilde{f}^{(m)}\right)$.

a) D'après C-II-3 $\varphi_n = \varphi$ est égale à 1 sur $[-1, 1]$. Alors $\forall x \in I$ $f^m(x) = (\varphi f)^m(x)$.

Remarque : On a en fait $f \equiv \varphi f$ sur I ce qui entraîne le résultat.

b) On calcule : $\int_{-2}^{x} (x-t)^{n-m-1} (\varphi f)^{(n)}(t)\,dt$ par parties :

$\int_{-2}^{x} (x-t)^{n-m-1} (\varphi f)^{n}(t)\,dt = \left[(x-t)^{n-m-1} (\varphi f)^{(n-1)}(t)\right]_{-2}^{x} + (n-m-1)\int_{-2}^{x} (x-t)^{n-m-2} (\varphi f)^{n-1}(t)$

$= (n-m-1)\int_{-2}^{x} (x-t)^{n-m-2} (\varphi f)^{n-1}(t)\,dt$

Ceci car : $(x-t)^{n-m-1}$ | prise en $x = 0$
$(\varphi f)^{n-1}(-2) = 0$ car φ est identiquement nulle sur $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ et que donc ses dérivées sont nulles en -2. (elle est de classe C^n !).

D'une manière plus générale, on a :

$\int_{-2}^{x} (x-t)^{n-\ell-1} (\varphi f)^{j}(t)\,dt = (n-\ell-1)\int_{-2}^{x} (x-t)^{n-\ell-2} (\varphi f)^{j-1}\,dt$

D'où : $\int_{-2}^{x} (x-t)^{n-m-1} (\varphi f)^{n}(t)\,dt = (n-m-1)! \int_{-2}^{x} (\varphi f)^{n-(n-m-1)}\,dt$

(En réitérant $n-m-1$ fois le procédé !)

$= (n-m-1)! \int_{-2}^{x} (\varphi f)^{m+1}\,dt$

$= (n-m-1)!\ (\varphi f)^{m}(x)$

car $(\varphi f)^{m}(-2) = 0$!

C-III SUITE

III-1 - Suite

c) Pour $x \in I$, on a $(\varphi f)^{(m)}(x) = f^{(m)}(x)$; d'où :

$$f^{(m)}(x) = \frac{1}{(n-m-1)!}\int_{-2}^{x}(x-t)^{n-m-1}(\varphi f)^{(n)}(t)\,dt .$$

Or $(\varphi f)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\varphi^{(n-k)} f^{(k)}$ Formule de Leibniz

d'où : $f^{(m)}(x) = \frac{1}{(n-m-1)!}\int_{-2}^{x}(x-t)^{n-m-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\varphi^{(n-k)}(t) f^{(k)}(t)\,dt$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k(x)$$

On a alors $N_{2I}(f^{(m)}) = N_{2I}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k\right) \leq \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}N_{2I}(\tilde{F}_k)$

(Par l'inégalité triangulaire)

III-2 - Majoration de $N_{2I}(\tilde{F}_n)$

On a $\tilde{F}_n(x) = \frac{1}{(n-m-1)!}\int_{-2}^{x}(x-t)^{n-m-1}f^{(m)}(t)\,dt$

D'après C I 2. on a :

$$N_{2I}(\tilde{F}_n) \leq \frac{3^n}{(2(n-m)+1)(n-m-1)!}N_{2J}(f^{(m)}).$$

avec $\begin{cases} g \equiv f^{(m)} \\ h \equiv 1 \end{cases}$

on a $2(n-m)+1 \geq n-m$, car $n-m \geq 1$ d'où :

$$N_{2I}(\tilde{F}_n) \leq \frac{3^n}{(n-m)!}N_{2,J}(f^{(m)})$$

III-3 Majoration de $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}N_{2,I}(\tilde{F}_k)$

a) Egalité de convolution ...

On a $\int_{-2}^{x}(x-t)^{n-m-1}\varphi^{n-k}(t)f^{k}(t)\,dt =$

$$\left[(x-t)^{n-m-1}\varphi^{(n-k)}(t)\;f^{k-1}(t)\right]_{-2}^{x} - \int_{-2}^{x}((x-t)^{n-m-1}\varphi^{n-k}(t))' f^{k-1}(t)\,dt$$

Or : $\varphi^{(j)}(-2) = 0 \quad \forall j \in \{0 \dots n\}$

. Pour $x \in I$, $\varphi^{(j)}(x) = 0$ pour $j \in \{1 \dots n\}$ car $\varphi_{|I} \equiv 1$

III-suite III-3-suite III-3 a)-suite

Donc : $\int_{-2}^{x}(x-t)^{n-m-1}\varphi^{(n-k)}(t)\,f^{(k)}(t)\,dt = -\int_{2}^{x}((x-t)^{n-m-1}\varphi^{(n-k)}(t))' f^{(k-1)}(t)\,dt$

Par des arguments identiques :

$$\int_{-2}^{x}\left[(x-t)^{n-m-1}\varphi^{(n-k)}(t)\right]^{(j)} f^{(k-j)}(t)\,dt = -\int_{2}^{x}\left[(x-t)^{n-m-1}\varphi^{(n-k)}(t)\right]^{(j+1)} f^{(k-j-1)}(t)\,dt$$

Dont on déduit le résultat ...

En posant $P(t) = (x-t)^{n-m-1}$, la formule de Leibniz donne :

$$\left((x-t)^{n-m-1}\varphi^{(n-k)}(t)\right)^{(k)} = \sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}P^{(\ell)}(t)\,\varphi^{(n-k+k-\ell)}(t)$$

On a : • $P^{(\ell)}(t) = (n-m-1)\dots(n-m-\ell)(x-t)^{n-m-1-\ell}(-1)^{\ell}$

pour $\ell \leq n-m-1$

• $P^{(\ell)}(t) = 0$ pour $\ell > n-m-1$.

En rentrant $\frac{1}{(n-m+1)!}$ sous le signe somme, on obtient :

$$F_k(x) = (-1)^k\sum_{\ell=0}^{q}\frac{\binom{k}{\ell}}{(n-m-\ell-1)!}\int_{-2}^{x}(x-t)^{n-m-1-\ell}(-1)^{\ell}\varphi^{(n-\ell)}(t)f(t)\,dt$$

On a : $u(x) = \int_{-2}^{x}(x-t)^{n-m-\ell-1}\varphi^{(n-\ell)}f(t)\,dt$ qui se majore en :

$$N_{2I}(\tilde{u}) \leq \frac{3^{n-m-\ell}}{(2(n-m-\ell)+1)}N_{2J}(f)\,N_\infty(\varphi^{(n-\ell)})$$

avec : $\begin{vmatrix} g \equiv f \\ h \equiv \varphi^{(n-\ell)} \end{vmatrix}$

Comme • $N_\infty(\varphi^{n-\ell}) \leq (n\,c_1)^{n-\ell}$

• $2(n-m-\ell)+1 \geq n-m-\ell$

(Car : $\ell \leq q \leq n-m-1$ entraîne : $-\ell \geq -q \geq -n+m+1$

Puis : $n-m-\ell \geq 1$.)

On obtient :

$$N_{2,I}(\tilde{F}_k) \leq \left(\sum_{\ell=0}^{q}\binom{k}{\ell}\frac{3^{n-m-\ell}}{(n-m-\ell)!}(n\,c_1)^{n-\ell}\right)N_{2J}(f)$$

C III C III-3-(suite)

b) ▪ On a $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ d'où, pour $k \in \{0,1,\dots n\}$:

$$2^n \geq \binom{n}{m}$$

Comme : $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

On a $n! \leq 2^n\, m!\,(n-m)!$

D'après C.I.I. : $n^n \leq n!\, e^n$, ce qui entraîne :

$$n^n \leq (2e)^n\, m!\,(n-m)!$$

▪ On a : $\ell! \leq \ell^\ell \leq n^\ell$ pour $0 \leq \ell \leq n$. d'où : $n^{-\ell} \leq \frac{1}{\ell!}$.

▪ Majorons :

$$\frac{\binom{k}{\ell}}{(n-m-\ell)!}\, 3^{n-m-\ell} (n C_1)^{n-\ell} \leq \frac{2^k}{(n-m-\ell)!} \frac{3^{n-m-\ell}}{\ell!} (2e)^n m!\,(n-m)!\, C_1^{n-\ell}$$

Car : • $\binom{k}{\ell} \leq 2^k$ • $n^n \leq (2e)^n n!(m-n)!$ • $n^{-\ell} \leq \frac{1}{\ell!}$

Ce qui entraîne (en majorant 2^k par 2^n)

$$N_{2,I,}(\tilde{F}_k) \leq (2e)^n . 2^n m!\, C_1^n \sum_{\ell=0}^{q} \frac{3^{n-m-\ell}\,(n-m)!}{(n-m-\ell)!\,\ell!}\, C_1^{-\ell}$$

$$\leq (2e)^n 2^n m!\, C_1^n \sum_{\ell=0}^{n-m} \frac{(n-m)!}{(n-m-\ell)!\,\ell!}\, 3^{n-m-\ell} \left(\frac{1}{C_1}\right)^\ell$$

$$\leq (2e)^n 2^n m!\, C_1^n \left(3 + \frac{1}{C_1}\right)^{n-m}$$

D'où $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} N_{2I}(\tilde{F}_k) \leq (2e)^n 2^n m!\, C_1^n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(3+\frac{1}{C_1}\right)^{n-m} N_{2J}(\beta)$

$$\leq \left[(4e)\, e_1 \left(3 + \frac{1}{C_1}\right)\right]^n m! \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} N_{2J}(\beta)$$

en majorant $\left(3+\frac{1}{C_1}\right)^{n-m}$ par $\left(3+\frac{1}{C_1}\right)^n$

Alors : $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

D'où $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} N_{2I}(\tilde{F}_k) \leq \Big(\underbrace{8e\, C_1 \left(3 + \frac{1}{C_1}\right)}_{C_2}\Big)^n m!\; N_{2J}(\beta)$

C-III

C.III.4. On a : $N_{2I}(\beta^{(m)}) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} N_{2I}(\tilde{F}_k) + N_{2I}(\tilde{F}_n)$ (9)

On a $N_{2I}(\beta^{(m)}) \leq C_2^n\, m!\, N_{2J}(\beta) + N_{2I}(\tilde{F}_n)$ (*)

$$\leq C_2^n\, m!\, N_{2J}(\beta) + \frac{3^{n-m}}{(n-m)!} N_{2J}(\beta^{(n)}) \quad (**)$$

(* d'après (11) ** d'après (12))

$$\leq m!\left(C_2^n\, N_{2J}(\beta) + \frac{3^n}{m!(n-m)!} N_{2J}(\beta^{(n)})\right)$$

Or $\frac{3^n}{m!(n-m)!} \leq \frac{1}{n!} C_m^n\, 3^n \leq \frac{6^n}{n!}$, en utilisant le maintenant classique $C_m^n = \binom{n}{m} \leq 2^n$.

C_3 peut être prise égale à : $\mathrm{Max}(C_2, 6)$ d'où :

(13) $\frac{1}{m!} N_{2I}(\beta^{(m)}) \leq C_3\left(N_{2J}(\beta) + \frac{1}{n!}(\beta^{(n)})\right)$

C IV - Application

•) la suite d'entiers $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ étant strictement croissante elle tend nécessairement vers $+\infty$: pour tout entier m, on peut donc trouver un entier k_j tel que : $k_j \leq m < k_{j+1}$.
En appliquant (13) avec $n = k_{j+1}$ (ce qui est possible puisque $m \leq k_{j+1} - 1$) il vient :

$$(1/m!)\, N_{2,J}(\tilde{\beta}^{(m)}) \leq (C_3)^{k_{j+1}} \left(N_{2,J}(\beta) + \frac{1}{(k_{j+1})!} N_{2J}(\beta^{(k_{j+1})})\right)$$

En utilisant l'hypothèse portant sur $N_{2J}(\beta^{(k_j)})$ il vient :

$$(1/m!)\, N_{2,J}(\tilde{\beta}^{(m)}) \leq (C_3)^{k_{j+1}} \left(N_{2J}(\beta) + C^{1+k_{j+1}} (k_j)!\right).$$

Comme la suite $(k_{j+1}/k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée il existe un nombre $M > 0$ tel que : $\forall j \in \mathbb{N}$ $k_{j+1} \leq M k_j$, il vient :

$$(1/m!)\, N_{2,J}(\tilde{\beta}^{(m)}) \leq C_3^{M k_j} \left(N_{2,J}(\beta) + C^{M k_j + 1}\right)$$

$$\leq C_3^{Mm} \left(N_{2J}(\beta) + C^{Mm+1}\right) \text{ puisque } k_j \leq m.$$

On peut alors trouver une constante L telle que :

$$(1/m!)\, N_{2J}(\tilde{\beta}^{(m)}) \leq L^{m+1}$$

C IV - Suite (bâtir L à partir de C_3, N_{2J} C ...).

•) Développement en série entière de f. - Soit x fixé dans $]-1,1[$ on va montrer que f est développable en série entière en montrant que le reste R_n du développement de Taylor de f tend vers 0, dans un voisinage de x, pour n tendant vers $+\infty$. Utilisons la formulation intégrale du reste : $R_n(y) = \frac{1}{(n-1)!}\int_x^y (y-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt$.

On a, à l'aide de l'inégalité de Cauchy Schwarz.

$$|R_n(y)| \leq \frac{1}{(n-1)!}\left(\left|\int_x^y (f^{(n)}(t))^2 dt\right| \left|\int_x^y (y-t)^{2(n-1)} dt\right|\right)^{1/2} \quad (y \in [-1,1])$$

Or : $\left|\int_x^y (f^{(n)}(t))^2\,dt\right| \leq \int_{-1}^1 (f^{(n)}(t))^2 dt = N_{2I}(\tilde{f}^{(n)})$.

Puis : $$\int_x^y (y-t)^{2(n-1)} dt = -\frac{1}{2(n-1)}\Big[(y-t)^{2n-1}\Big]_x^y = \frac{(y-x)^{2n-1}}{2n-1}$$

D'où $$|R_n(y)| \leq 1/(n-1)!\,|y-x|^{n-1/2}/(2n-1)^{1/2}\, N_{2I}(\tilde{f}^{(n)})$$

D'après la première partie de la question on aura :

$$|R_n(y)| \leq \frac{1}{(n-1)!}|y-x|^{n-1/2}/(2n-1)^{1/2}\; n!\,L^{n+1} = \frac{n}{\sqrt{2n-1}}L^{n+1}|y-x|^{n-1/2}$$

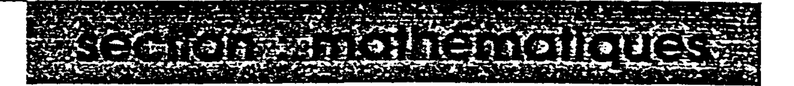
Pour $y \in \left]x-\frac{1}{2L}, x+\frac{1}{2L}\right[\cap]-1,1[$, il vient :

$$|R_n(y)| \leq \frac{n}{\sqrt{2n-1}}L^{n+1}\left(\frac{1}{2L}\right)^{n-1/2} = \frac{n}{\sqrt{2n-1}}L(2L)^{1/2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Or la suite $n \longmapsto \frac{n}{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tend vers 0 pour n tendant vers $+\infty$ donc sur l'intervalle choisi, $R_n(y)$ tend uniformément vers 0 pour n tendant vers $+\infty$. La fonction f est donc développable en série entière au voisinage de x.

CAPES externe 1991 composition 2

concours externe
de recrutement de professeurs certifiés



deuxième composition de mathématiques

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche — éventuellement programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Tournez la page S.V.P.

Notations et objectifs du problème

Dans le problème, $\mathcal{E}$ désigne un plan vectoriel euclidien, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ désignent deux vecteurs unitaires et non colinéaires de $\mathcal{E}$, D et Δ désignent les droites vectorielles orthogonales respectivement à $\vec{v}$ et à $\vec{w}$. On note s la réflexion d'axe D, c'est-à-dire la symétrie orthogonale vectorielle par rapport à D, et t la réflexion d'axe Δ.

L'objet du problème est la recherche d'une condition nécessaire et suffisante sur le produit scalaire $\vec{v}.\vec{w}$, pour que tout vecteur image de $\vec{v}$ ou de $\vec{w}$ par un élément quelconque du groupe des isométries engendré par s et t s'exprime dans la base $(\vec{v}, \vec{w})$ avec deux coefficients de même signe. Dans la partie I, on étudie une suite qui sera un outil essentiel dans les parties suivantes. Dans la partie II, on trouve la condition suffisante cherchée. Dans la partie III, on remplace le produit scalaire par une forme bilinéaire symétrique plus générale, et on résout complètement la question dans ce cadre.

I Étude d'une suite

Dans cette partie α désigne un nombre réel quelconque et on pose

$$\delta = \begin{cases} \sqrt{\alpha^2 - 1} & \text{si } |\alpha| \geq 1 \\ i\sqrt{1 - \alpha^2} & \text{si } |\alpha| < 1 \end{cases}.$$

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{(\alpha + \delta)^n - (\alpha - \delta)^n}{2\delta} & \text{si } \alpha \neq \pm 1 \\ n & \text{si } \alpha = 1 \\ (-1)^{n-1} n & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}$$

1) Calculer u_0 et u_1, puis montrer qu'on a pour tout entier $n \geq 0$

$$u_{n+2} = 2\alpha u_{n+1} - u_n.$$

En déduire que (u_n) est une suite de nombres réels.

2) Montrer que si $\alpha \geq 1$ alors, pour tout entier $n \geq 1$ on a $u_n > 0$.

3) Montrer que si $\alpha \leq -1$, on a $u_n u_{n+1} < 0$ pour tout entier $n \geq 1$ (on pourra poser $\alpha = -\alpha'$ et comparer la suite u_n avec la suite u'_n construite de façon analogue à l'aide de α').

4) On suppose $|\alpha| < 1$ et on écrit $\alpha = \cos\theta$ avec $0 < \theta < \pi$.

   a) Montrer que si $m = E(\pi/\theta)$ (où E désigne la fonction partie entière), les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$0 < m\theta \leq \pi < (m+1)\theta < 2\pi.$$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = \dfrac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}$.

c) Déduire de a) et b) que, si $u_n u_{n+1} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors il existe un entier $m \geq 2$ tel que $\theta = \pi/m$.

d) Réciproquement démontrer que si $\theta = \pi/m$ avec m entier supérieur ou égal à 2, alors $u_n u_{n+1} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) Déduire des questions 2), 3), 4) l'équivalence des propriétés (*) et (**) ci dessous :

$$u_n u_{n+1} \geq 0 \text{ pour tout } n \geq 0 \qquad (*)$$

$$\alpha \geq 1 \text{ ou } \alpha = \cos(\pi/m) \text{ avec } m \in \mathbb{N} - \{0,1\}. \qquad (**)$$

II Application à un problème de géométrie plane

On suppose, dans toute cette partie II,qu'on a $\vec{v}.\vec{w} = -\cos(\pi/m)$, où $m \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, et où $\vec{v}.\vec{w}$ désigne le produit scalaire des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

1) Montrer qu'on peut orienter $\mathcal{E}$ de manière que l'angle orienté $(\widehat{\vec{v},\vec{w}})$ ait pour mesure $\pi - \pi/m$.

On supposera $\mathcal{E}$ orienté de cette manière dans toute la suite du II.

2) On rappelle que la composée de deux réflexions vectorielles est une rotation vectorielle. On pose $r = s \circ t$.

a) Déterminer une mesure de l'angle de r.

b) Montrer que r est d'ordre fini (c'est-à-dire qu'il existe au moins un entier $d > 0$ tel que $r^d = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$) et déterminer son ordre (c'est-à-dire le plus petit entier $d > 0$ tel que $r^d = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$).

3) Si ρ est une rotation vectorielle quelconque de $\mathcal{E}$, montrer que $\rho \circ s$ est une réflexion vectorielle qui peut encore s'écrire $s \circ \rho^{-1}$ (on pourra décomposer ρ en un produit de deux réflexions bien choisies).

4) On note G l'ensemble des isométries vectorielles de la forme r^k ou $s \circ r^k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

a) En utilisant la question précédente, montrer que G est un sous-groupe du groupe des isométries vectorielles de $\mathcal{E}$.

b) Montrer que le groupe G est fini et préciser son cardinal.

Soit $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ la base orthonormée directe de $\mathcal{E}$ telle que $\vec{v}_1 = \vec{v}$. À tout vecteur de coordonnées (x_1, x_2) dans la base $\mathcal{B}$ on associe son affixe $x_1 + ix_2$.

5) Quelles sont les affixes de $\vec{v}$ et de $\vec{w}$?

6) Soit un entier $n \in \mathbb{N}$, et soit $\vec{x}$ le vecteur d'affixe $e^{in\pi/m}$.

a) En reprenant les notations de la partie I, démontrer l'égalité

$$(\alpha+\delta)^n + u_n(\alpha-\delta) = u_{n+1}.$$

b) On pose $\vec{x} = a\vec{v} + b\vec{w}$ ($(a,b) \in \mathbb{R}^2$). En faisant $\alpha = \cos(\pi/m)$ dans l'égalité précédente, déterminer a et b en fonction de u_n et de u_{n+1}, puis montrer que a et b sont de même signe (c'est-à-dire que $ab \geq 0$).

7) Soit X l'ensemble de tous les vecteurs $\vec{x}$ dont l'affixe est une racine $2m$-ième de l'unité.

a) Montrer que tout élément de X est de la forme $a\vec{v} + b\vec{w}$ avec a et b de même signe.

b) Donner les écritures complexes de r et de s.

c) En déduire que $r(X) = X$, que $s(X) = X$, puis que $g(X) = X$ pour tout élément g de G.

8) Soit $\Phi = \{\, g(\vec{v}) \mid g \in G \,\} \cup \{\, g(\vec{w}) \mid g \in G \,\}$; montrer que tout élément de Φ est de la forme $a\vec{v} + b\vec{w}$ avec a et b de même signe (on pourra commencer par montrer que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ appartiennent à X).

III Étude du problème réciproque

Soit $\varphi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique telle que $\varphi(\vec{v},\vec{v}) = \varphi(\vec{w},\vec{w}) = 1$. On définit deux endomorphismes σ et τ de $\mathcal{E}$ par

$$\begin{cases} \sigma(\vec{x}) = \vec{x} - 2\varphi(\vec{v},\vec{x})\vec{v} \\ \tau(\vec{x}) = \vec{x} - 2\varphi(\vec{w},\vec{x})\vec{w} \end{cases}$$

pour tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathcal{E}$ (on ne demande pas de montrer que σ et τ sont des applications linéaires).

1) On suppose, dans cette question seulement, que φ est le produit scalaire euclidien de $\mathcal{E}$. Préciser alors la nature de σ et de τ.

Dans toute la suite du problème on utilise les notations de la partie I, en prenant $\alpha = -\varphi(\vec{v},\vec{w})$. On pose $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Déterminer les matrices A et B respectives de σ et τ dans la base $(\vec{v},\vec{w})$.

3) Démontrer les égalités :

$$(AB)^n = \begin{pmatrix} u_{2n+1} & -u_{2n} \\ u_{2n} & -u_{2n-1} \end{pmatrix} \text{ pour } n \in \mathbb{N} - \{0\},$$

Tournez la page S.V.P.

et

$$B(AB)^n = \begin{pmatrix} u_{2n+1} & -u_{2n} \\ u_{2n+2} & -u_{2n+1} \end{pmatrix} \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

4) Calculer A^2 et B^2. En déduire que σ et τ appartiennent au groupe linéaire $GL(\mathcal{E})$ des automorphismes de $\mathcal{E}$, et que le sous-groupe Γ de $GL(\mathcal{E})$ engendré par σ et τ (c'est-à-dire le plus petit sous-groupe de $GL(\mathcal{E})$ contenant σ et τ) est constitué des automorphismes $(\sigma\tau)^n$, $\tau(\sigma\tau)^n$, $(\sigma\tau)^n\sigma$, $\tau(\sigma\tau)^n\sigma$, où n décrit $\mathbb{N}$.
5) Calculer le polynôme caractéristique de AB. En déduire que AB est toujours diagonalisable sur $\mathbb{C}$, sauf pour deux valeurs de α que l'on précisera.
6) On suppose dans cette question que $\alpha = \cos(k\pi/m)$ avec $(m,k) \in \mathbb{N}^2$, $m \geq 2$, $0 < k < m$. Diagonaliser la matrice AB et calculer $(AB)^m$.
7) Réciproquement, on suppose qu'il existe un entier $m > 0$ tel que $(AB)^m = I_2$. Montrer qu'on a $m \geq 2$, que AB est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, et que ses valeurs propres sont des racines m-ièmes de l'unité. En déduire que $\alpha = \cos(k\pi/m)$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $0 < k < m$.
8) Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que le groupe Γ soit fini.
9) Montrer que pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a $\gamma(\vec{v}) = \pm(\sigma\tau)^n(\vec{v})$ ou $\gamma(\vec{v}) = \pm\tau(\sigma\tau)^n(\vec{v})$ avec $n \in \mathbb{N}$, et que $\gamma(\vec{w}) = \pm(\sigma\tau)^n(\vec{w})$ ou $\gamma(\vec{w}) = \pm\tau(\sigma\tau)^n(\vec{w})$ avec $n \in \mathbb{N}$ (on pourra utiliser la question 4).
10) On pose

$$\Psi = \{\,\gamma(\vec{v}) \mid \gamma \in \Gamma\,\} \cup \{\,\gamma(\vec{w}) \mid \gamma \in \Gamma\,\}.$$

Montrer que tout élément de Ψ s'écrit $a\vec{v}+b\vec{w}$ avec a et b de même signe si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

$$\varphi(\vec{v},\vec{w}) = -\cos(\pi/m) \text{ avec } m \in \mathbb{N} - \{0,1\} \qquad (1)$$

$$\varphi(\vec{v},\vec{w}) \leq -1 \qquad (2)$$

11) a) Montrer que le groupe G défini dans la partie II est le sous-groupe de $GL(\mathcal{E})$ engendré par s et t.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur le produit scalaire $\vec{v}.\vec{w}$ pour que tout élément de l'ensemble Φ défini en II. 8) s'écrive $a\vec{v} + b\vec{w}$ avec a et b de même signe.

CAPES 91, 2^e composition

I.1 $u_0=0$ et $u_1=1$ dans tous les cas.

* Si $\alpha=1$, $u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n$ est triviale car $u_n=n$.
* Si $\alpha=-1$, $u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n \Leftrightarrow (-1)^{n+1}(n+2)=-2(-1)^n(n+1)-(-1)^{n-1}n$

$\Leftrightarrow n+2=2(n+1)-n$ est vraie

* Si $\alpha\neq\pm1$, $u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n$ équivaut à :

$$\frac{(\alpha+\delta)^{n+2}-(\alpha-\delta)^{n+2}}{2\delta}=2\alpha\frac{(\alpha+\delta)^{n+1}-(\alpha-\delta)^{n+1}}{2\delta}-\frac{(\alpha+\delta)^n-(\alpha-\delta)^n}{2\delta}$$

$$(\alpha+\delta)^{n+2}-2\alpha(\alpha+\delta)^{n+1}+(\alpha+\delta)^n=(\alpha-\delta)^{n+2}-2\alpha(\alpha-\delta)^{n+1}+(\alpha-\delta)^n$$

$$(\alpha+\delta)^n\underbrace{(-\alpha^2+\delta^2+1)}_{=0}=(\alpha-\delta)^n\underbrace{(-\alpha^2+\delta^2+1)}_{=0}$$ car $\delta^2=\alpha^2-1$.

L'égalité proposée est donc vraie dans tous les cas. u_0 et u_1 étant réels, supposer que $u_0,\dots,u_{n+1}$ sont réels entraine que $u_{n+2}=2\alpha u_{n+1}-u_n$ est réel. Ainsi : $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_n\in\mathbb{R}$ (par récurrence).

I.2
- Si $\alpha=1$, $u_n=n>0$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$
- Si $\alpha>1$ et $n>1$, $\delta=\sqrt{\alpha^2-1}>0$ donc :

$$u_n>0 \Leftrightarrow (\alpha+\delta)^n>(\alpha-\delta)^n \underset{(*)}{\Leftrightarrow} \alpha+\delta>\alpha-\delta \Leftrightarrow \delta>0 \text{ vrai.}$$

(*) provient de la remarque : $\delta=\sqrt{\alpha^2-1}<\alpha$ donc $\alpha-\delta>0$.

I.3
- Si $\alpha=-1$, $u_n=(-1)^{n-1}n$ et c'est trivial.
- Si $\alpha<-1$, soit $\alpha'=-\alpha>1$. Notons (u'_n) la suite construite avec α' au lieu de α. On a prouvé que :

$$\forall n\geq1 \quad u'_n>0$$

Ici $u'_n=\dfrac{(-\alpha+\delta')^n-(-\alpha-\delta')^n}{2\delta}$ où $\delta'=\sqrt{\alpha^2-1}=\delta$

$=(-1)^{n+1}u_n$

D'après I.2, pour tout n $u'_n.u'_{n+1}=(-1)^n u_n.(-1)^{n+1}u_{n+1}>0$ soit $u_n.u_{n+1}<0$. □

I.4 $\alpha = \cos\theta$ où $0 < \theta < \pi$

a) • $m = E\left(\frac{\pi}{\theta}\right) \Leftrightarrow m \in \mathbb{N}$ et $m \leq \frac{\pi}{\theta} < m+1 \Rightarrow \boxed{m\theta \leq \pi < (m+1)\theta}$

• $\theta < \pi \Rightarrow 1 < \frac{\pi}{\theta} \Rightarrow m \geq 1$. De plus $0 < \theta$, donc $\boxed{0 < m\theta}$

• $m\theta \leq \pi \Rightarrow (m+1)\theta \leq \pi + \theta < 2\pi$ soit $\boxed{(m+1)\theta < 2\pi}$

b) Si $\alpha = \cos\theta$, $\delta = i\sqrt{1-\cos^2\theta} = i\sin\theta$ puisque $0 < \theta < \pi$.

Donc $u_n = \dfrac{(e^{i\theta})^n - (e^{-i\theta})^n}{2i\sin\theta} = \dfrac{2i\sin n\theta}{2i\sin\theta} = \dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Si $u_n . u_{n+1} \geq 0$ pour tout n, en particulier pour $n = m = E\left(\frac{\pi}{\theta}\right)$,

$$\sin m\theta . \sin(m+1)\theta \geq 0$$

I.4.a montre que $0 < m\theta \leq \pi < (m+1)\theta < 2\pi$ de sorte que

$$\sin m\theta . \sin(m+1)\theta \leq 0$$

On déduit $\sin m\theta . \sin(m+1)\theta = 0$ d'où $\sin m\theta = 0$ (en effet $\pi < (m+1)\theta < 2\pi$ donc $\sin(m+1)\theta \neq 0$), puis $m\theta = \pi$ d'après la condition $0 < m\theta \leq \pi$. □

I.4.d

Si $\theta = \frac{\pi}{m}$, supposons par l'absurde qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n u_{n+1} < 0$. Alors $\sin n\frac{\pi}{m} \cdot \sin (n+1)\frac{\pi}{m} < 0$. La fonction sinus étant continue sur $\mathbb{R}$, le Théorème des valeurs intermédiaires montre que $\sin x$ s'annule sur $\left]n\frac{\pi}{m}, (n+1)\frac{\pi}{m}\right[$, soit :

$$\exists k \in \mathbb{Z} \qquad \frac{n\pi}{m} < k\pi < (n+1)\frac{\pi}{m}$$

Cela entraine $n < km < n+1$, ce qui est impossible puisque $km \in \mathbb{Z}$. □

2° solution : Il faut prouver que

$$\forall n \qquad \sin \frac{n\pi}{m} \cdot \sin \frac{(n+1)\pi}{m} \geq 0 \qquad (*)$$

1° cas : Si $n\frac{\pi}{m} \in \left]k2\pi, k2\pi+\pi\right[$, $2km < n < (2k+1)m$ et comme n est entier, $2km < n+1 \leq (2k+1)m$ donc $\frac{(n+1)\pi}{m} \in \left]k2\pi, k2\pi+\pi\right]$. Cela prouve $(*)$

2° cas : Si $n\frac{\pi}{m} \in \left]k2\pi+\pi, (k+1)2\pi\right[$, $(2k+1)m < n < 2(k+1)m$ donc $(2k+1)m < n+1 \leq 2(k+1)m$, ce qui entraine encore $\frac{(n+1)\pi}{m} \in \left]k2\pi+\pi, (k+1)2\pi\right]$ et $(*)$. □

I.5

$(**) \Rightarrow (*)$: Si $\alpha \geq 1$, I.2 entraine $u_n > 0 \ \forall n$ d'où $(*)$

Si $\alpha = \cos\frac{\pi}{m}$, $|\alpha|<1$ et I.4.d entraine $(*)$

$(*) \Rightarrow (**)$: Si $u_n u_{n+1} \geq 0 \ \forall n$, $\alpha \leq -1 \underset{(I.3)}{\Rightarrow} u_n . u_{n+1} < 0 \ \forall n \geq 1$ absurde !

$|\alpha| < 1 \underset{(I.4.c)}{\Rightarrow} \theta = \frac{\pi}{m}$ où $m \geq 2$

Finalement $\alpha \geq 1$ ou $\left\{ |\alpha|<1 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{m} \right\}$, ie $(**)$ est vrai.

II.1 Pour une orientation de $\mathcal{E}$ fixée :

$$\cos \widehat{\vec{v},\vec{w}} = \vec{v}.\vec{w} = -\cos\frac{\pi}{m} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{m}\right) \Rightarrow \widehat{\vec{v},\vec{w}} = \begin{cases} \pi - \frac{\pi}{m} \ [2\pi] \\ \text{ou} \\ -\left(\pi - \frac{\pi}{m}\right) \ [2\pi] \end{cases}$$

Si θ désigne la mesure de l'angle $\widehat{\vec{v},\vec{w}}$ pour une orientation choisie de $\mathcal{E}$, $-\theta$ sera la mesure du même angle pour l'orientation contraire, d'où II.1.

2° solution : Sans utiliser le cours...

Construisons une b.o. directe $e = (\vec{v}, \vec{e}_2)$. Soit r la rotation tq $r(\vec{v}) = \vec{w}$. On sait que :

$$Mat(r;e) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$ où $\theta \in \mathbb{R}$ est une mesure (modulo 2π) de $\widehat{\vec{v},\vec{w}}$.

(et est indépendante du choix de la b.o. directe)

Ainsi : $\vec{w} = \cos\theta.\vec{v} + \sin\theta.\vec{e}_2 \Rightarrow \vec{w}.\vec{v} = \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = -\cos\frac{\pi}{m} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{m}\right)$

d'où $\theta = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{m}\right) \ [2\pi]$

Si $\theta = \pi - \frac{\pi}{m} \ [2\pi]$, c'est fini.

Sinon $\theta = -\left(\pi - \frac{\pi}{m}\right) \ [2\pi]$, la matrice de r dans la b.o. d'orientation contraire à e : $e' = (\vec{v}, -\vec{e}_2)$ sera :

$$Mat(r;e') = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$ (car $r(\vec{v}) = \cos\theta.\vec{v} - \sin\theta(-\vec{e}_2)$)

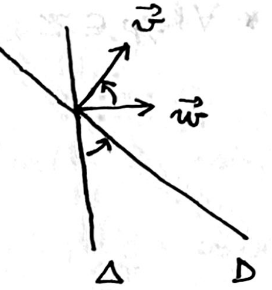
La mesure de $\widehat{\vec{v},\vec{w}}$ dans $\mathcal{E}$ orienté par e' sera bien $-\theta = \pi - \frac{\pi}{m} \ [2\pi]$.

CQFD

II.2 $r = s\circ t$ $s = $ sym. orth. /à $D = (\mathbb{R}\vec{v})^{\perp}$
$t = $ " $\Delta = (\mathbb{R}\vec{w})^{\perp}$

a) La mesure de r est $2 \cdot \text{mes}\,\widehat{\Delta, D}$ où $\widehat{\Delta, D}$ désigne l'angle de droites $\widehat{\Delta, D}$.

$$\left.\begin{array}{l} D \perp \mathbb{R}\vec{v} \\ \Delta \perp \mathbb{R}\vec{w} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{\Delta, D} = \widehat{\mathbb{R}\vec{w}, \mathbb{R}\vec{v}} \quad \text{(en angles de dtes)}$$



donc $\text{mes}\,\widehat{\Delta, D} \equiv \text{mes}\,\widehat{\vec{w}, \vec{v}} \quad [\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{m} - \pi \quad [\pi]$

On en déduit :

$$\text{mes}\, r \equiv 2 \cdot \left(\frac{\pi}{m} - \pi\right) \equiv \frac{2\pi}{m} \quad [2\pi]$$

$$\boxed{\text{mes}\, r \equiv \frac{2\pi}{m} \quad [2\pi]}$$

b) $r^k = Id_{\mathcal{E}} \Leftrightarrow k\,\text{mes}\, r \equiv 0 \quad [2\pi] \Leftrightarrow k\frac{2\pi}{m} = K\, 2\pi$ où $K \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow k = mK, \; K \in \mathbb{Z}$

r sera d'ordre fini m.

II.3 Si $\rho \in \mathcal{O}^+$ et $s \in \mathcal{O}^-$, $\det \rho\circ s = \underset{1}{\det \rho} \cdot \underset{-1}{\det s} = -1$ montre que $\rho\circ s$ est une sym. orth. /à dte. Elle est donc involutive :

$$\rho\circ s \circ \rho\circ s = Id \Rightarrow \boxed{\rho\circ s = s\circ\rho^{-1}} \quad (\text{car } s^2 = Id)$$

<u>2° solution :</u> $\exists !\, s'$ sym. orth /à dte $\rho = s'\circ s$

d'où $\rho\circ s = s'\circ s\circ s = s'$

De plus $s\circ\rho^{-1} = s\circ(s'\circ s)^{-1} = s\circ s\circ s' = s' \Rightarrow s\circ\rho^{-1} = \rho\circ s$.

II.4

a) $G = \{r^k / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{s \circ r^k / k \in \mathbb{Z}\}$.

* Si $k=0$, $r^0 = Id \in G$ donc $G \neq \emptyset$
* $\forall k, p \in \mathbb{Z}$ $\quad r^k \circ (s \circ r^p) \underset{(II.3)}{=} s \circ r^{-k} \circ r^p = s \circ r^{p-k} \in G$

$$r^k \circ r^p = r^{k+p} \in G$$

$$(s \circ r^p) \circ r^k = s \circ r^{p+k} \in G$$

$$(s \circ r^k) \circ (s \circ r^p) = s \circ s \circ r^{-k} \circ r^p = s \circ r^{p-k} \in G$$

* $\forall k \in \mathbb{Z}$ $\quad (r^k)^{-1} = r^{-k} \in G$

et $(s \circ r^k)^{-1} = r^{-k} \circ s \underset{(II.3)}{=} s \circ r^k \in G$

<u>G sera bien un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$</u>

b) r étant d'ordre fini m, le sous-groupe $\langle r \rangle = \{r^k / k \in \mathbb{Z}\}$ engendré par r sera de cardinal m : c'est $\langle r \rangle = \{Id, r, r^2, \dots, r^{m-1}\}$

Par division euclidienne :

$\forall k \in \mathbb{Z} \quad k = mq + t \quad 0 \leq t < m$

permet d'écrire $s \circ r^k = s \circ r^t$, donc $\{s \circ r^k / k \in \mathbb{Z}\} = \{s \circ r^t / t \in \{0, 1, \dots, m-1\}\}$

Si $t, t' \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ avec $t > t'$, alors :

$$s \circ r^t = s \circ r^{t'} \Leftrightarrow r^{t-t'} = Id \Leftrightarrow m \mid t - t' \Leftrightarrow t = t'$$

$(\text{car } 0 \leq t - t' \leq m-1)$

Ainsi $\{s \circ r^k / k \in \mathbb{Z}\}$ sera de cardinal m et :

<u>G est fini de cardinal $2m$.</u>

NB : 1) $\{r^k / k \in \mathbb{Z}\}$ et $\{s \circ r^k / k \in \mathbb{Z}\}$ sont disjoints (sinon $r^k = s \circ r^t \Rightarrow s = r^{k-t} \in \mathcal{O}^+$. Absurde)

2) On pouvait dire aussi plus simplement que $\langle r \rangle \to \{s \circ r^k / k \in \mathbb{Z}\}$, $r^k \mapsto s \circ r^k$ est bijective ...

II.5 $\mathcal{B} = (\vec{v_1}, \vec{v_2})$ où $\vec{v_1} = \vec{v}$.

$\vec{v} = \vec{v} + 0\,\vec{v_2}$ donc l'affixe de $\vec{v}$ est 1.

$\widehat{\vec{v},\vec{w}} = \pi - \frac{\pi}{m}\ [2\pi]$ donc l'angle de la rotation transformant $\vec{v}$ en $\vec{w}$ est $\pi - \frac{\pi}{m}$, donc $\vec{w} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{m}\right)\vec{v} + \sin\left(\pi - \frac{\pi}{m}\right)\vec{v_2}$

(en effet : la matrice de cette rotation dans la b.o. directe $\mathcal{B}$ sera $\begin{pmatrix} \cos(\pi-\frac{\pi}{m}) & -\sin(\pi-\frac{\pi}{m}) \\ \sin(\pi-\frac{\pi}{m}) & \cos(\pi-\frac{\pi}{m}) \end{pmatrix}$)

L'affixe de $\vec{w}$ sera $e^{i(\pi-\frac{\pi}{m})}$

II.6.a Si $\alpha \in \{\pm 1\}$, c'est trivial. Sinon :

$$(\alpha+\delta)^n + u_n(\alpha-\delta) = (\alpha+\delta)^n + \frac{(\alpha+\delta)^n(\alpha-\delta)-(\alpha-\delta)^{n+1}}{2\delta}$$
$$= \frac{(\alpha+\delta)^n(2\delta+\alpha-\delta)-(\alpha-\delta)^{n+1}}{2\delta}$$
$$= \frac{(\alpha+\delta)^{n+1}-(\alpha-\delta)^{n+1}}{2\delta} = u_{n+1}.$$

II.6.b

Si $\alpha = \cos\frac{\pi}{m}$, $\delta = i\sqrt{1-\alpha^2} = i\sin\frac{\pi}{m}$, et l'égalité II.6.a devient :

$$e^{in\frac{\pi}{m}} + u_n e^{-i\frac{\pi}{m}} = u_{n+1} \qquad (*)$$

$e^{in\frac{\pi}{m}}$ est l'affixe de $\vec{x} = a\vec{v} + b\vec{w}$

$e^{-i\frac{\pi}{m}}$ est celle de $-\vec{w}$

1 " " de $\vec{v}$

Il suffit de traduire $(*)$ pour obtenir :

$$\vec{x} - u_n\vec{w} = u_{n+1}\vec{v}$$

$$a\vec{v} + (b-u_n)\vec{w} = u_{n+1}\vec{v}$$

$$\begin{cases} a = u_{n+1} \\ b = u_n \end{cases}$$

I.5 montre alors que $ab \geq 0$.

II.7 a) X est l'ensemble des vecteurs d'affixe $e^{in\frac{\pi}{m}}$ où $n \in [0, 2m-1]$.
On peut appliquer II.6.b pour obtenir $\vec{x} \in X \Rightarrow \vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v}$

avec $\begin{cases} a = u_{n+1} \\ b = u_n \end{cases}$ et $ab \geq 0$.

b) r est la rotation d'angle $\frac{2\pi}{m}$, donc $\boxed{r(z) = e^{i\frac{2\pi}{m}} z}$ avec l'abus d'écriture d'usage...

s est la symétrie orth. /à $(\mathbb{R}\vec{v})^\perp$ ie /à $\mathbb{R}\vec{v_2}$

donc $\boxed{s(z) = -\bar{z}}$

(d'ailleurs : $s \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$ donc $x' + iy' = -x + iy = -\bar{z}$)

c) $\forall \vec{x} \in X$ $\vec{x}$ d'affixe $e^{in\frac{\pi}{m}}$ et :

$r(e^{in\frac{\pi}{m}}) = e^{i\frac{2\pi}{m}} \cdot e^{in\frac{\pi}{m}} = e^{i(n+2)\frac{\pi}{m}} \in X$

$s(e^{in\frac{\pi}{m}}) = -e^{-in\frac{\pi}{m}} = e^{i\pi - in\frac{\pi}{m}} = e^{i(m-n)\frac{\pi}{m}} \in X$

Donc $r(X) \subset X$ et $s(X) \subset X$. r et s étant bijectives de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$, et X étant de cardinal fini, on en déduit $r(X) = X$ et $s(X) = X$.
Comme tout élément g de G est de la forme r^k ou $s \circ r^k$, on en déduit :

$\forall g \in G$ $\boxed{g(X) = X.}$

II.8 $\Phi = \{ g(\vec{v}) \,/\, g \in G \} \cup \{ g(\vec{w}) \,/\, g \in G \}$

II.5 montre que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont d'affixes resp. 1 et $e^{i(m-1)\frac{\pi}{m}}$, donc dans X.

II.7 entraîne que $g(\vec{v})$ et $g(\vec{w})$ sont dans X pour tout $g \in G$, donc de la forme $a\vec{v} + b\vec{w}$ avec $ab \geq 0$ (II.6.b).

III.1

Si φ est un produit scalaire, $p(\vec{x}) \doteq (\vec{v} | \vec{x})\vec{v}$ est la projection orthogonale sur $\mathbb{R}\vec{v}$, donc :

$$\sigma = Id - 2p$$

Comme $2p - Id$ est la réflexion $/_{\grave{a}}\ \mathbb{R}\vec{v}$, <u>$\sigma$ sera la réflexion $/_{\grave{a}}\ (\mathbb{R}\vec{v})^{\perp}$</u>.

De même, <u>τ sera la réflexion $/_{\grave{a}}\ (\mathbb{R}\vec{w})^{\perp}$</u>.

III.2 $\alpha \doteq -\varphi(\vec{v}, \vec{w})$

$$\begin{cases} \sigma(\vec{v}) = \vec{v} - 2\varphi(\vec{v},\vec{v}).\vec{v} = -\vec{v} \\ \sigma(\vec{w}) = \vec{w} - 2\varphi(\vec{v},\vec{w})\vec{v} = 2\alpha\vec{v} + \vec{w} \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 2\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \tau(\vec{v}) = \vec{v} - 2\varphi(\vec{w},\vec{v}).\vec{w} = \vec{v} + 2\alpha\vec{w} \\ \tau(\vec{w}) = \vec{w} - 2\vec{w} = -\vec{w} \end{cases} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\alpha & -1 \end{pmatrix}$$

III.3 $AB = \begin{pmatrix} -1 & 2\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\alpha & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+4\alpha^2 & -2\alpha \\ 2\alpha & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_3 & -u_2 \\ u_2 & -u_1 \end{pmatrix}$

d'où la propriété au rang $n=1$. Supposons la vraie jusqu'au rang n. On a :

$$(AB)^{n+1} = (AB)(AB)^n = \begin{pmatrix} -1+4\alpha^2 & -2\alpha \\ 2\alpha & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{2n+1} & -u_{2n} \\ u_{2n} & -u_{2n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-1+4\alpha^2)u_{2n+1} - 2\alpha u_{2n} & (1-4\alpha^2)u_{2n} + 2\alpha u_{2n-1} \\ 2\alpha u_{2n+1} - u_{2n} & -2\alpha u_{2n} + u_{2n-1} \end{pmatrix}$$

I.1 entraîne :

$$u_{2n+3} = 2\alpha u_{2n+2} - u_{2n+1} = 2\alpha(2\alpha u_{2n+1} - u_{2n}) - u_{2n+1} = (-1+4\alpha^2)u_{2n+1} - 2\alpha u_{2n}$$

et $2\alpha u_{2n+1} - u_{2n} = u_{2n+2}$

On obtient bien $(AB)^{n+1} = \begin{pmatrix} u_{2n+3} & -u_{2n+2} \\ u_{2n+2} & -u_{2n+1} \end{pmatrix}$ et la récurrence aboutit.

* On a : $B(AB)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\alpha & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{2n+1} & -u_{2n} \\ u_{2n} & -u_{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{2n+1} & -u_{2n} \\ \underbrace{2\alpha u_{2n+1} - u_{2n}}_{u_{2n+2}} & \underbrace{-2\alpha u_{2n} + u_{2n-1}}_{-u_{2n+1}} \end{pmatrix}$

III.4 $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\alpha & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\alpha & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

* A et B sont involutive, donc σ et τ le seront aussi. σ et τ seront donc dans $GL(E)$ et $\sigma^{-1} = \sigma$, $\tau^{-1} = \tau$.

* Le sous-groupe Γ engendré par σ et τ est formé des éléments x de la forme :

$$x = \sigma^{n_1}\tau^{m_1} \dots \sigma^{n_k}\tau^{m_k} \qquad m_i, n_i \in \mathbb{Z} \quad \text{et } k \in \mathbb{N}$$

Comme $\sigma^2 = \tau^2 = Id$, ces éléments de Γ vont s'écrire dans l'une des quatre formes suivantes :

$x = \sigma\tau\sigma \dots \sigma\tau\sigma$, soit $x = (\sigma\tau)^n\sigma$ avec $n \in \mathbb{N}$ convenable

ou

$x = \sigma\tau\sigma \dots \sigma\tau$, " $x = (\sigma\tau)^n$ " "

ou

$x = \tau\sigma\tau \dots \sigma\tau$, " $x = \tau(\sigma\tau)^n$ " "

ou

$x = \tau\sigma\tau \dots \tau\sigma$, " $x = \tau(\sigma\tau)^n\sigma$ " "

Ces 4 formes des éléments de Γ sont bien celles annoncées.

III.5 $\chi_{AB}(X) = \begin{vmatrix} 4\alpha^2-1-X & -2\alpha \\ 2\alpha & -1-X \end{vmatrix} = X^2 + 2(1-2\alpha^2)X + 1$

$\Delta' = (1-2\alpha^2)^2 - 1 = 4\alpha^2(\alpha^2-1)$

- Si α est distinct de 0, de 1 et de -1, Δ' sera non nul et AB admettra 2 valeurs propres distinctes. AB sera diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
- Si $\alpha = 0$, on constate : $AB = -I$.
  Ainsi AB est déjà diagonale.
- Si $\alpha = \varepsilon$, avec $\varepsilon = \pm 1$, le sev propre associé à la valeur propre 1 est donné par les Equations :

$$\begin{cases} 2x - 2\varepsilon y = 0 \\ 2\varepsilon x - 2y = 0 \end{cases} \iff x = \varepsilon y$$

C'est une droite vectorielle bien que 1 soit racine double de $\chi_{AB}(X)$. Dans ce cas, AB n'est pas diagonalisable.

III.6 Si $\alpha = \cos k\frac{\pi}{m}$, $m \geq 2$ et $0 < k < m$, les valeurs propres de AB seront racines de :

$$X^2 + 2\left(1 - 2\cos^2 k\frac{\pi}{m}\right)X + 1$$

$$X^2 - 2\cos k\frac{2\pi}{m} . X + 1$$

Ici $\Delta' = \cos^2 k\frac{2\pi}{m} - 1 = -\sin^2 k\frac{2\pi}{m}$, et les valeurs propres de AB seront :

$$\cos k\frac{2\pi}{m} \pm i \sin k\frac{2\pi}{m} = e^{\pm ik\frac{2\pi}{m}}$$

Ces 2 valeurs propres sont distinctes pour $0 < k < m$ ssi $k \neq \frac{m}{2}$, et alors AB est diagonalisable. Si $k = \frac{m}{2}$, $\alpha = 0$ et $AB = -I$ est encore diagonalisable. Finalement, dans tous les cas, AB est semblable à :

$$D = \begin{pmatrix} e^{ik\frac{2\pi}{m}} & 0 \\ 0 & e^{-ik\frac{2\pi}{m}} \end{pmatrix}$$, et il existe une matrice inversible P

telle que $D = P^{-1}(AB)P$. Alors $(AB)^m = P \; D^m P^{-1} = P I_2 P^{-1} = I_2$.

III.7 Si $(AB)^m = I_2$, alors $m \geq 2$ (puisque $AB \neq I_2$) et AB annule le polynôme $X^m - 1$ dont toutes les racines sont simples. AB sera donc diagonalisable, et toutes ses valeurs propres seront racines de $X^m - 1$, soit des racines m-ièmes de l'unité.

NB : On peut encore le vérifier ainsi. En notant λ, μ les valeurs propres de AB, supposée diagonalisable :

$$(AB)^m = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^m = I_2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda^m = 1 \\ \mu^m = 1 \end{cases}$$ CQFD

Le polynôme caractéristique de AB est :

$$\chi_{AB}(X) = X^2 + 2(1 - 2\alpha^2)X + 1$$

donc

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 4\alpha^2 - 2 \\ \lambda\mu = 1 \end{cases} \quad (*)$$

λ et μ étant des racines m-ièmes de l'unité, on peut poser $\lambda = e^{ik\frac{2\pi}{m}}$, et alors $\mu = \frac{1}{\lambda} = e^{-ik\frac{2\pi}{m}}$, de sorte que

$$\lambda + \mu = e^{ik\frac{2\pi}{m}} + e^{-ik\frac{2\pi}{m}} = 2\cos k\frac{2\pi}{m}$$

et $(*)$ entraîne :

$$2\cos k\frac{2\pi}{m} = 4\alpha^2 - 2$$
$$\alpha^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \cos k\frac{2\pi}{m}\right) = \cos^2 k\frac{\pi}{m}$$
$$\alpha = \pm \cos k\frac{\pi}{m} \quad \text{où} \quad 0 \leq k < m$$

- $k = 0$ est impossible, car entraîne $\alpha = \pm 1$, puis AB non diagonalisable (III.5), ce qui est absurde.
- Si $\alpha = \cos k\frac{\pi}{m}$, c'est fini.
- Si $\alpha = -\cos k\frac{\pi}{m}$, on écrit $\alpha = \cos\left(\pi - k\frac{\pi}{m}\right) = \cos(m-k)\frac{\pi}{m}$ avec $0 < m-k < m$.

CQFD

III.8 Γ fini $\Rightarrow \exists m > 0 \quad (\sigma\tau)^m = Id \Rightarrow \exists m > 0 \quad (AB)^m = I$

$\underset{(III.7)}{\Rightarrow} \quad \alpha = \cos k\frac{\pi}{m} \quad$ où $k \in \{1, 2, \dots, m-1\}$

Réciproquement, si $\alpha = \cos k\frac{\pi}{m}$, III.6 entraîne $(AB)^m = I$ ie $(\sigma\tau)^m = Id$.
Les éléments $(\sigma\tau)^n$, $\tau(\sigma\tau)^n$, $(\sigma\tau)^n\sigma$, $(\tau(\sigma\tau)^n\sigma$ de Γ pourront tous s'écrire en supposant que $n \in \{0, \dots, m-1\}$ (il suffit d'écrire la div. euclidienne de n par m pour obtenir $n = mq + u \quad 0 \le u < m$ donc $(\sigma\tau)^n = (\sigma\tau)^u$) et Γ sera fini.

Ccl : $\boxed{\Gamma \text{ fini} \iff \alpha = \cos k\frac{\pi}{m} \quad k \in \{1, \dots, m-1\}}$

III.9 Soit $\gamma \in \Gamma$. γ est de l'une des 4 formes décrites au III.4. Calculons $\gamma(\vec{v})$ et $\gamma(\vec{w})$ dans chaque cas :

1) Si $\gamma = (\sigma\tau)^n$ $\quad \gamma(\vec{v}) = (\sigma\tau)^n(\vec{v})$
$\gamma(\vec{w}) = (\sigma\tau)^n(\vec{w})$ comme prévu.

2) Si $\gamma = \tau(\sigma\tau)^n$ $\quad \gamma(\vec{v}) = \tau(\sigma\tau)^n(\vec{v})$ oui
$\gamma(\vec{w}) = \tau(\sigma\tau)^n(\vec{w})$ oui

3) Si $\gamma = (\sigma\tau)^n\sigma$ $\quad \gamma(\vec{v}) = (\sigma\tau)^n \underbrace{\sigma(\vec{v})}_{-\vec{v}} = -(\sigma\tau)^n(\vec{v})$
$\gamma(\vec{w}) = (\sigma\tau)^n\sigma(\vec{w}) = (\sigma\tau)^n.\sigma\tau.\underbrace{\tau(\vec{w})}_{-\vec{w}}$ car $\tau^2 = Id$
$= -(\sigma\tau)^{n+1}(\vec{w})$ oui

4) Si $\gamma = \tau(\sigma\tau)^n\sigma$ $\quad \gamma(\vec{v}) = \tau(\sigma\tau)^n \underbrace{\sigma(\vec{v})}_{-\vec{v}} = -\tau(\sigma\tau)^n(\vec{v})$
$\gamma(\vec{w}) = \tau(\sigma\tau)^n\sigma(\vec{w}) = \tau(\sigma\tau)^n(\sigma\tau)\tau(\vec{w})$
$= -\tau(\sigma\tau)^{n+1}(\vec{w})$ oui

CQFD

AD **III.10**

Tous les éléments de Ψ sont de l'une des 4 formes obtenues au III.9 ie :

$$\pm(\sigma\tau)^n(\vec{v}) \qquad \pm\tau(\sigma\tau)^n(\vec{v}) \qquad \pm(\sigma\tau)^n(\vec{w}) \qquad \pm\tau(\sigma\tau)^n(\vec{w})$$

Dire que $(\sigma\tau)^n(\vec{v}) = a\vec{v}+b\vec{w}$ et $(\sigma\tau)^n(\vec{w}) = c\vec{v}+d\vec{w}$ revient à écrire la matrice de $(\sigma\tau)^n$ dans la base $(\vec{v},\vec{w})$ ainsi :

$$(AB)^n = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Or $(AB)^n = \begin{pmatrix} u_{2n+1} & -u_{2n} \\ u_{2n} & -u_{2n-1} \end{pmatrix}$ d'après III.3.

Ainsi : $\left.\begin{matrix} ab \geq 0 \quad \forall n \\ cd \geq 0 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} u_{2n}\cdot u_{2n+1} \geq 0 \\ u_{2n}\cdot u_{2n-1} \geq 0 \end{matrix}\right. \forall n$

$\Longleftrightarrow \quad u_n \cdot u_{n+1} \geq 0 \ \forall n$ où (u_n) est la suite du I obtenue pour $\alpha = -\varphi(\vec{v},\vec{w})$

On recommence avec $B(AB)^n = \begin{pmatrix} u_{2n+1} & -u_{2n} \\ u_{2n+2} & -u_{2n+1} \end{pmatrix}$ pour constater que

<u>tous les éléments de Ψ s'écrivent $a\vec{v}+b\vec{w}$ avec $ab \geq 0$ ssi</u>

<u>$\forall n \quad u_n \cdot u_{n+1} \geq 0$</u> $\quad (*)$.

I.5 montre que $(*)$ équivaut à $(**)$:

$$\left\{\begin{matrix} \alpha \geq 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = \cos\frac{\pi}{m} \quad m \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\} \end{matrix}\right. \quad \text{ie} \quad \left\{\begin{matrix} \varphi(\vec{v},\vec{w}) \leq -1 \\ \text{ou} \\ \varphi(\vec{v},\vec{w}) = -\cos\frac{\pi}{m} \quad m \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\} \end{matrix}\right.$$

CQFD

III.11.a

G est un groupe qui contient r et s, et comme $r = s\circ t$, il contiendra aussi $t = s\circ r$.

Si $\mathcal{G}$ est un sous-groupe de $GL(E)$ contenant s et t, il contiendra à fortiori $r = s\circ t$, et t, et donc tous les éléments de la forme r^k ou $s\circ r^k$, $k\in\mathbb{Z}$. Cela prouve que $\mathcal{G}\supset G$.

Ccl : G sera le sous-groupe engendré par s et t.

III.11.b

La partie III s'applique à la partie II, en posant :

$$\varphi(\vec{v},\vec{w}) \doteq (\vec{v}\mid\vec{w}) = \text{produit scalaire usuel de } E$$
$$\sigma = s$$
$$\tau = t$$

Alors $\begin{cases} \Gamma = \text{sgroupe engendré par } \sigma \text{ et } \tau = \text{sgroupe eng. par } s \text{ et } t = G \\ \Psi = \{\gamma(\vec{v}) \,/\, \gamma\in\Gamma\}\cup\{\gamma(\vec{w}) \,/\, \gamma\in\Gamma\} = \Phi \end{cases}$

La CNS cherchée provient alors du III.10 et s'énonce :

$$\begin{cases} (\vec{v}\mid\vec{w}) = -\cos\dfrac{\pi}{m} \qquad m\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\} & (1) \\ \quad \text{ou} \\ (\vec{v}\mid\vec{w}) \leq -1 & (2) \end{cases}$$

(2) peut s'écrire autrement puisque $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont unitaires :

$$(\vec{v}\mid\vec{w}) \leq -1 \Leftrightarrow \cos(\vec{v},\vec{w}) \leq -1 \Leftrightarrow \cos(\vec{v},\vec{w}) = -1$$
$$\Leftrightarrow (\vec{v},\vec{w}) \equiv \pi \quad [2\pi]$$
$$\Leftrightarrow \vec{w} = -\vec{v}$$

FIN

SESSION DE 1992

concours externe de recrutement de professeurs certifiés

section : mathématiques

première composition de mathématiques

Durée : 5 heures

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche — éventuellement programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Les cinq parties du problème sont largement indépendantes.

Tournez la page S.V.P.

NOTATIONS ET OBJECTIFS DU PROBLÈME

On pose, pour tout entier N supérieur ou égal à 2 et pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$:

$$R_N(x, y) = \sum_{1 \leqslant m \leqslant N} m^y \cos(x \ln m)$$

et

$$I_N(x, y) = \sum_{1 \leqslant m \leqslant N} m^y \sin(x \ln m)$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

En considérant un plan affine rapporté à un repère orthogonal, on désigne par C_N (respectivement C'_N) la courbe définie par l'équation cartésienne $R_N(x, y) = 0$ (respectivement $I_N(x, y) = 0$). On se propose d'étudier quelques propriétés des courbes C_N et C'_N.

Pour simplifier les écritures, on pourra poser :

$$\alpha = \frac{\pi}{\ln 2}, \quad \beta = \frac{\pi}{\ln 3}, \quad \text{et } \lambda = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

I. Cas où N = 2.

I.1. *a.* Déterminer l'ensemble D_2 des nombres réels x pour lesquels $\cos(x \ln 2)$ est strictement négatif.

b. Montrer que $R_2(x, y) = 0$ si et seulement si x appartient à D_2 et

$$y = -\frac{1}{\ln 2} \ln(-\cos(x \ln 2)).$$

I.2. On définit, pour tout x appartenant à D_2 :

$$f(x) = \frac{1}{\ln 2} \ln(-\cos(x \ln 2)).$$

a. Montrer que f est dérivable dans D_2 et calculer sa dérivée.

b. Étudier la fonction f dans l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2 \ln 2}, \frac{3\pi}{2 \ln 2}\right[$ (symétrie, tableau de variations, branches infinies et allure de la courbe représentative c_2).

c. Comment C_2 se déduit-elle de c_2 ?

I.3. Déterminer C'_2, c'est-à-dire l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient $I_2(x, y) = 0$.

II. Étude de C'_3.

On désigne par A l'ensemble des nombres réels de la forme $\frac{k\pi}{\ln 2}$ où k appartient à $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, par B l'ensemble des nombres réels de la forme $\frac{h\pi}{\ln 3}$ où h appartient à $\mathbb{N}^*$ et par D_3 l'ensemble des nombres réels positifs x vérifiant l'inégalité : $\sin(x \ln 2) \sin(x \ln 3) < 0$.

II.1. *a.* Démontrer que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel. En déduire que $A \cap B$ est vide.

b. Déterminer l'ensemble $D_3 \cap \left]0, \dfrac{4\pi}{\ln 3}\right[$.

II.2. *a.* Soit (x, y) un point de $\mathbb{R}^2$ tel que $x \neq 0$ et $I_3(x, y) = 0$.
Montrer qu'alors $\sin(x \ln 2)$ et $\sin(x \ln 3)$ sont non nuls.

b. Soit $x > 0$; montrer que $I_3(x, y) = 0$ si et seulement si x appartient à D_3 et $y = g(x)$ où g est la fonction définie sur D_3 par :

$$g(x) = \frac{1}{\ln \frac{3}{2}} \ln\left(-\frac{\sin(x \ln 2)}{\sin(x \ln 3)}\right).$$

II.3. *a.* Trouver les zéros de g sur chacun des deux intervalles suivants :

$$J_1 = \left]\frac{\pi}{\ln 3}, \frac{\pi}{\ln 2}\right[\qquad \text{et} \qquad J_2 = \left]\frac{2\pi}{\ln 3}, \frac{3\pi}{\ln 3}\right[.$$

b. Calculer les limites de g aux bornes de J_1. Démontrer que l'image de J_1 par g est $\mathbb{R}$.

c. Calculer la dérivée g' de g. Représenter graphiquement les fonctions $x \longmapsto \ln 2 \cot\text{an}(x \ln 2)$ et $x \longmapsto \ln 3 \cot\text{an}(x \ln 3)$ sur l'intervalle J_1.
Déterminer le signe de g' dans l'intervalle J_1.

d. Tracer la courbe représentative de la restriction de g à l'intervalle J_1.

e. Calculer les limites de g aux bornes de J_2. Démontrer, sans utiliser la dérivée de g, que g a un minimum strictement négatif sur J_2.

III. Intersection de C_3 avec la droite d'équation $y = 1$.

A. *Un algorithme de calcul approché d'un zéro d'une fonction.*

Soient x_0 et b deux nombres réels vérifiant $x_0 < b$ et soit f une fonction à valeurs réelles, de classe C^1 sur l'intervalle $[x_0, b[$. On suppose que l'on a $f(x_0) > 0$ et que f ne reste pas strictement positive. On suppose aussi que f' est bornée sur $[x_0, b[$ et n'est constante sur aucun intervalle de longueur non nulle.
Soit M_0 un majorant de $|f'|$; on pose enfin, pour tout x de $[x_0, b[$:

$$M(x) = \operatorname{Max}\{|f'(t)| ; t \in [x_0, x]\}.$$

A.1. Soient a et x deux nombres réels vérifiant $x_0 \leqslant a < x < b$ et tels que $f(t) > 0$ pour tout t appartenant à $[x_0, a]$.

a. Montrer que $\displaystyle\int_a^x |f'(t)|\, dt < (x - a) M(x)$.

b. Montrer que $|f(x) - f(a)| < (x - a) M(x)$.

c. Montrer que si $x - a \leqslant \dfrac{f(a)}{M_0}$ alors $f(x) > \left(1 - \dfrac{M(x)}{M_0}\right) f(a)$.

d. On pose $c = a + \dfrac{f(a)}{M_0}$. Montrer que pour tout x' appartenant à $[a, c]$ on a $f(x') > 0$ (on vérifiera d'abord que c appartient à l'intervalle $]a, b[$).

Tournez la page S.V.P.

A.2. *a.* Montrer que la relation de récurrence :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{M_0}, \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N},$$

permet de définir une (unique) suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ de $[x_0, b[$ et que cette suite est croissante.

b. Montrer que cette suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers un nombre x_* appartenant à l'intervalle $]a, b[$ tel que $f(x_*) = 0$ et $f(x) > 0$ pour tout x de $[x_0, x_*[$.

B. *Une application.*

On pose $r(x) = R_3(x, 1)$.

B.1. *a.* Étudier les variations de la fonction r sur $\left[0, \dfrac{\pi}{\ln 3}\right]$ et montrer que r admet un zéro et un seul sur ce même intervalle.

b. Vérifier que les hypothèses du début du A sont satisfaites pour :

$$x_0 = 0, \quad b = \frac{\pi}{\ln 3}, \quad f = r \quad \text{et} \quad M_0 = 5.$$

c. Calculer à la machine des valeurs approchées de x_5, x_6, x_7, x_8. Donner une valeur approchée du zéro x_* de r à 10^{-4} près : on justifiera le résultat.

B.2. *a.* Étudier le signe de r en chaque point $\dfrac{k\pi}{\ln 3}$, avec k entier naturel. Montrer que la fonction r admet une infinité de zéros.

b. Montrer que les zéros de r sont isolés : on pourra démontrer d'abord que la fonction r et ses dérivées successives ne peuvent s'annuler toutes simultanément.

c. Montrer que les zéros positifs de r forment un ensemble dénombrable.

IV. **Droites séparatrices d'arcs de C_N.**

Soit N un entier supérieur ou égal à 2.

IV.1. *a.* Soit ξ un nombre réel. Démontrer que de toute suite de nombres réels $(u_n)_{n \geqslant 0}$ on peut extraire une suite $(v_k)_{k \geqslant 0}$ telle que la suite :

$$(\exp(2i\pi v_k \xi))_{k \geqslant 0}$$

soit convergente.

b. En déduire que si $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ sont des nombres réels donnés, de toute suite réelle $(u_n)_{n \geqslant 0}$ on peut extraire une suite $(v_k)_{k \geqslant 0}$ telle que chacune des suites :

$$(\exp(2i\pi v_k \xi_j))_{k \geqslant 0}, \qquad j = 1, 2, \ldots, N,$$

soit convergente. Montrer qu'alors, pour $j = 1, 2, \ldots, N$, on a :

$$\lim_{k \to +\infty} \cos 2\pi (v_{k+1} - v_k) \xi_j = 1.$$

IV.2. En déduire qu'il existe une suite réelle $(x_k)_{k \geqslant 0}$ tendant vers $+\infty$ telle que $R_N(x_k, y) > 0$ pour tout y réel.

IV.3. Il existe donc une infinité de droites parallèles à l'axe des y ne contenant aucun point de la courbe C_N ; de telles droites sont appelées droites séparatrices d'arcs de C_N. Donner, dans le cas $N = 2$, une famille infinie de telles droites.

V. **Asymptotes de C_N et de C'_N.**

V.1. Soit $y_0 \leqslant -2$. Démontrer l'inégalité :

$$S_N = \sum_{2 \leqslant n \leqslant N} n^{y_0} \leqslant 2^{y_0} + \frac{N^{y_0+1} - 2^{y_0+1}}{y_0+1}.$$

En déduire que l'on a $S_N \leqslant \frac{3}{4}$ et enfin $R_N(x, y_0) \geqslant \frac{1}{4}$ pour tout x réel. Que peut-on en conclure pour C_N ?

V.2. On suppose qu'il existe deux nombres réels a et b, avec $a < b$, et une fonction $\varphi :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ indéfiniment dérivable telle que $R_N(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout x de $]a, b[$ et telle que :

$$\lim_{x \to a_+} \varphi(x) = \lim_{x \to b_-} \varphi(x) = +\infty.$$

Démontrer que $\lim_{x \to a_+} \cos(x \ln N) = 0$. En déduire qu'il existe deux entiers relatifs h et k tels que :

$$a = \frac{(2h+1)\pi}{2 \ln N} \quad \text{et} \quad b = \frac{(2k+1)\pi}{2 \ln N}.$$

V.3. On suppose qu'il existe deux nombres réels c et d, avec $c < d$, et une fonction $\psi :]c, d[\longrightarrow \mathbb{R}$ indéfiniment dérivable telle que $I_N(x, \psi(x)) = 0$ pour tout x de $]c, d[$ et telle que :

$$\lim_{x \to c_+} \psi(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to d_-} |\psi(x)| = +\infty.$$

a. Démontrer qu'il existe un entier relatif h tel que $c = \frac{h\pi}{\ln N}$

b. Démontrer qu'il existe un entier relatif k tel que :

$$d = \frac{k\pi}{\ln N} \quad \text{si} \quad \lim_{x \to d_-} \psi(x) = +\infty$$

$$d = \frac{k\pi}{\ln 2} \quad \text{si} \quad \lim_{x \to d_-} \psi(x) = -\infty.$$

V.4. Interpréter les résultats des questions V.2. et V.3. dans les cas qui ont été étudiés dans les parties I. et II. du problème.

CAPES 92 , 1^re composition.

Solution de Dany-Jack Mercier

I.1.a $\cos(x\ln 2) < 0 \iff \frac{\pi}{2} + k2\pi < x\ln 2 < \frac{3\pi}{2} + k2\pi$

$$\iff \left(2k+\frac{1}{2}\right)\alpha < x < \left(2k+\frac{3}{2}\right)\alpha$$

Ainsi $D_2 = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\left(2k+\frac{1}{2}\right)\alpha , \left(2k+\frac{3}{2}\right)\alpha\right[$

I.1.b $R_2(x,y) = \sum_{m=1}^{N} m^y \cos(x\ln m) = 1 + 2^y \cos(x\ln 2)$

$R_2(x,y) = 0 \iff 2^{-y} = -\cos(x\ln 2) \iff \begin{cases} x \in D_2 \\ \text{et} \\ y = -\frac{1}{\ln 2}\ln(-\cos(x\ln 2)) \end{cases}$

I.2.a f est dérivable sur D_2 comme composée de fcts dérivables et :

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{-\cos(x\ln 2)}(-1)(-\sin(x\ln 2)).\ln 2$$

$$f'(x) = -\tan(x\ln 2)$$

I.2.b f est définie sur $\left]\frac{\pi}{2\ln 2}, \frac{3\pi}{2\ln 2}\right[$ et :

$f'(x) = 0 \iff \tan(x\ln 2) = 0 \iff x\ln 2 = k\pi \iff x = k\frac{\pi}{\ln 2}$ $k\in\mathbb{Z}$

La dérivée $f'(x)$ ne s'annule qu'en $x = \frac{\pi}{\ln 2}$ sur l'intervalle considéré, et le tableau de variation est :

x	$\pi/2\ln 2$		$\pi/\ln 2$		$3\pi/2\ln 2$
f'	‖	$+$	0	$-$	‖
f	‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖

• La courbe c_2 est symétrique par rapport à $x = \frac{\pi}{\ln 2}$ car :

$\forall x$, convenable, $f\left(\frac{\pi}{\ln 2} - x\right) = f\left(\frac{\pi}{\ln 2} + x\right)$

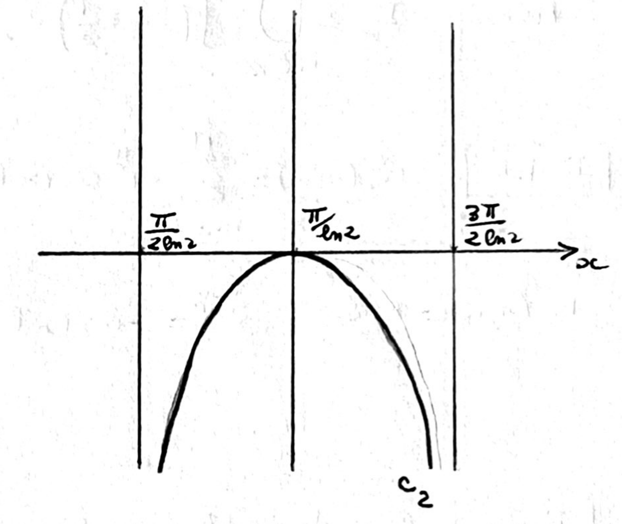
où, ce qui revient au même (poser $x = \frac{\pi}{\ln 2} - t$) : $f(t) = f\left(\frac{2\pi}{\ln 2} - t\right)$

comme on le voit ici :

$$f\left(\frac{2\pi}{\ln 2}-t\right) = \frac{1}{\ln 2}\ln\left(-\cos\left(\frac{2\pi}{\ln 2}-t\right)\ln 2\right) = f(t)$$

• Enfin : $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2\ln 2}\right)_+} f(x) = -\infty$ par composition de limites.

La courbe c_2 admettra les 2 asymptotes verticales $x = \frac{\pi}{2\ln 2}$ et $x = \frac{3\pi}{2\ln 2}$.



I.2.c C_2 se déduit de c_2 par translation de $2\alpha = \frac{2\pi}{\ln 2}$ car :

$$\forall x \in D_2 \quad f\left(x+\frac{2\pi}{\ln 2}\right) = f(x)$$

I.3 $I_2(x,y) = \sum\limits_{m=1}^{2} m^y \sin(x\ln m) = 2^y \sin(x\ln 2)$

$C_2' = \{(x,y) \,/\, 2^y \sin(x\ln 2) = 0\}$

et $\sin(x\ln 2) = 0 \iff x\ln 2 = k\pi \iff x = k\frac{\pi}{\ln 2}$, $k\in\mathbb{Z}$

C_2' sera la réunion des droites verticales d'équations $x = k\frac{\pi}{\ln 2}$ pour k décrivant $\mathbb{Z}$.

II.1.a

* $\frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{p}{q} \Rightarrow q\ln 2 = p\ln 3 \Rightarrow 2^q = 3^p$ où $\begin{cases} p\in\mathbb{Z} \\ q\in\mathbb{N}\end{cases}$

La déc. en prod. de fact. premiers de tout entier montre que cette égalité est absurde (évident si $p\in\mathbb{N}$; si $p=-p'\in\mathbb{Z}$ on obtient $2^q.3^{p'}=1$ qui est aussi absurde)

* $x\in A\cap B \iff x = k\frac{\pi}{\ln 2} = h\frac{\pi}{\ln 3}$ $h,k\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{k}{h}\in\mathbb{Q}$ absurde.

II.1.b

$$x \in D_3 \Leftrightarrow \sin(x\ln 2)\sin(x\ln 3) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \sin(x\ln 2) < 0 \Leftrightarrow -\pi + k2\pi < x\ln 2 < k2\pi \\ \sin(x\ln 3) > 0 \Leftrightarrow k2\pi < x\ln 3 < \pi + k2\pi \end{cases} \\ \text{ou} \\ \begin{cases} \sin(x\ln 2) > 0 \Leftrightarrow k2\pi < x\ln 2 < \pi + k2\pi \\ \sin(x\ln 3) < 0 \Leftrightarrow -\pi + k2\pi < x\ln 3 < k2\pi \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} -\frac{\pi}{\ln 2} + k\frac{2\pi}{\ln 2} < x < k\frac{2\pi}{\ln 2} \\ k\frac{2\pi}{\ln 3} < x < \frac{\pi}{\ln 3} + k\frac{2\pi}{\ln 3} \end{cases} \quad (1) \\ \text{ou} \\ \begin{cases} k\frac{2\pi}{\ln 2} < x < \frac{\pi}{\ln 2} + k\frac{2\pi}{\ln 2} \\ -\frac{\pi}{\ln 3} + k\frac{2\pi}{\ln 3} < x < k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (2) \end{cases}$$

Comme on désire déterminer $D_3 \cap \left]0, \frac{4\pi}{\ln 3}\right[$, on aura pour $x \in \left]0, \frac{4\pi}{\ln 3}\right[$: ($\frac{4\pi}{\ln 3} \simeq 11{,}44$)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \underbrace{\frac{\pi}{\ln 2}}_{4,53} < x < \underbrace{\frac{2\pi}{\ln 2}}_{9,06} \\ 0 < x < \underbrace{\frac{\pi}{\ln 3}}_{2,86} \text{ ou } \underbrace{\frac{2\pi}{\ln 3}}_{\simeq 5,72} < x < \underbrace{\frac{3\pi}{\ln 3}}_{8,58} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\ln 3} < x < \frac{3\pi}{\ln 3}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \underbrace{\frac{\pi}{\ln 2}}_{4,53} \text{ ou } \underbrace{\frac{2\pi}{\ln 2}}_{9,06} < x < \underbrace{\frac{3\pi}{\ln 2}}_{13,59} \\ \underbrace{\frac{\pi}{\ln 3}}_{2,86} < x < \underbrace{\frac{2\pi}{\ln 3}}_{5,72} \text{ ou } \underbrace{\frac{3\pi}{\ln 3}}_{8,58} < x < \underbrace{\frac{4\pi}{\ln 3}}_{11,44} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\pi}{\ln 3} < x < \frac{\pi}{\ln 2} \text{ ou } \frac{2\pi}{\ln 2} < x < \frac{4\pi}{\ln 3}$$

Ccl :

$$D_3 \cap \left]0, \frac{4\pi}{\ln 3}\right[= \left]\frac{\pi}{\ln 3}, \frac{\pi}{\ln 2}\right[\,\dot\cup\, \left]\frac{2\pi}{\ln 3}, \frac{3\pi}{\ln 3}\right[\,\dot\cup\, \left]\frac{2\pi}{\ln 2}, \frac{4\pi}{\ln 3}\right[$$

II.2.a

$$I_3(x,y) = \sum_{n=1}^{3} n^y \sin(x \ln n) = 2^y \sin(x\ln 2) + 3^y \sin(x \ln 3)$$

$$I_3(x,y) = 0 \iff 2^y \sin(x\ln 2) = -3^y \sin(x\ln 3)$$

Par l'absurde, si $\sin(x\ln 3) = 0$ alors $\sin(x \ln 2) = 0$ et :

$$\left.\begin{matrix} x\ln 3 = k\pi \\ x \ln 2 = h\pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{\ln 3} = \frac{h\pi}{\ln 2} \Rightarrow \frac{\ln 2}{\ln 3} \in \mathbb{Q} \text{ absurde (II.1)}$$

<u>Ni $\sin(x\ln 3)$ ni $\sin(x\ln 2)$ ne seront nuls.</u>

II.2.b Soit $x > 0$

$$I_3(x,y) = 0 \iff \frac{\sin(x\ln 2)}{\sin(x\ln 3)} = -\left(\frac{3}{2}\right)^y \iff \begin{cases} x \in D_3 \\ y = \frac{1}{\ln\frac{3}{2}} \ln\left(-\frac{\sin(x\ln 2)}{\sin(x\ln 3)}\right) \end{cases}$$

II.3.a On a vu au II.1.b que $J_1 \cup J_2 \subset D_3$. g est donc bien définie sur $J_1 \cup J_2$.

$$g(x) = 0 \iff -\frac{\sin(x\ln 2)}{\sin(x\ln 3)} = 1 \iff \sin(x\ln 2) = \sin(\pi + x\ln 3)$$

$$\iff \begin{cases} x\ln 2 = \pi + x\ln 3 + k2\pi \\ \text{ou} \\ x\ln 2 = \pi - (\pi + x\ln 3) + k2\pi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{\pi + k2\pi}{\ln 2 - \ln 3} \\ \text{ou} \\ x = \frac{k2\pi}{\ln 2 + \ln 3} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

* <u>Sur J_1</u> : $\frac{\pi(1+2\pi)}{\ln 2 - \ln 3}$, toujours négatif, ne sera ni dans J_1, ni dans J_2.

$$\frac{k2\pi}{\ln 2 + \ln 3} \in J_1 \iff \frac{\pi}{\ln 3} < \frac{k2\pi}{\ln 2 + \ln 3} < \frac{\pi}{\ln 2} \iff \underbrace{\frac{\ln 2 + \ln 3}{2\ln 3}}_{\simeq 0{,}82} < k < \underbrace{\frac{\ln 2 + \ln 3}{2\ln 2}}_{\simeq 1{,}29} \iff k = 1$$

<u>La seule racine de g sur J_1 est $x = \frac{2\pi}{\ln 2 + \ln 3} \simeq 3{,}5$.</u>

* Sur J_2 :

$$\frac{2\pi}{\ln 3} < \frac{k2\pi}{\ln 2+\ln 3} < \frac{3\pi}{\ln 3} \iff \underbrace{\frac{\ln 2+\ln 3}{\ln 3}}_{\simeq 1,63} < k < \underbrace{\frac{3(\ln 2+\ln 3)}{2\ln 3}}_{\simeq 2,44} \iff k=2$$

La seule racine de g sur J_2 est $x = \dfrac{4\pi}{\ln 2+\ln 3}$

II.3.b Par composition de limites, on obtient $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{\ln 3}\right)_+} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{\ln 2}\right)_-} g(x) = -\infty$. g étant continue sur J_1, l'image de l'intervalle J_1 par g sera un intervalle de $\mathbb{R}$ qui ne peut être que $\mathbb{R}$ lui-même vues les limites que l'on vient d'obtenir.

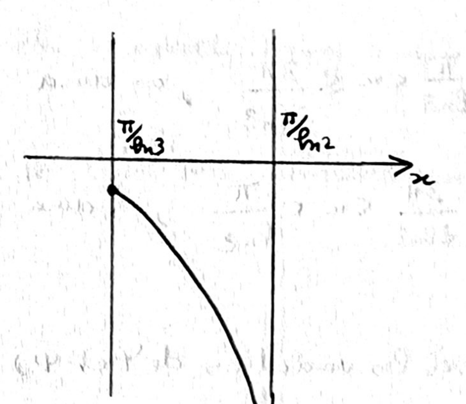
II.3.c * g est dérivable sur D_1 et :

$$g'(x) = \frac{1}{\ln\frac{3}{2}}\left(\ln 2 . \cotan(x\ln 2) - \ln 3 . \cotan(x\ln 3)\right)$$

* Etude de $\varphi(x) = \ln 2 . \cotan(x\ln 2)$:

$\varphi'(x) = \dfrac{-\ln^2 2}{\sin^2(x\ln 2)} < 0$ pour tout $x\in J_1$. φ sera strictement décroissante sur J_1, et le tableau de variation :

	$\frac{\pi}{\ln 3}$		$\frac{\pi}{\ln 2}$
φ'		$-$	
φ	$\simeq -0,3$	$\searrow$	$-\infty$



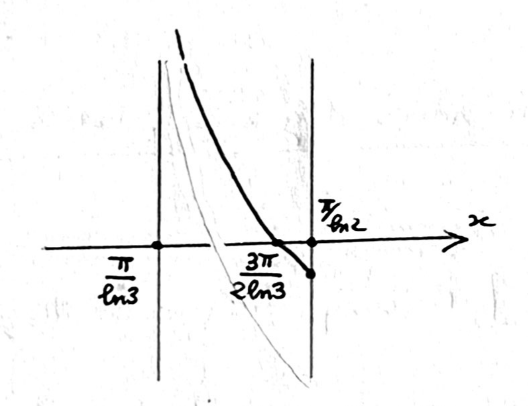
φ sera donc strictement négatif sur J_1.

* Étude de $\Psi(x) = \ln 3 . \cotan(x\ln 3)$:

$$\Psi'(x) = -\frac{\ln^2 3}{\sin^2(x\ln 3)} < 0 \qquad \forall x \in J_1$$

d'où le tableau de variation :

	$\frac{\pi}{\ln 3}$		$\frac{\pi}{\ln 2}$
Ψ'		$-$	
Ψ	$+\infty$	$\searrow$	$\simeq -0,3$



* Signe de $g'(x)$ sur J_1 :

$$g'(x) = \underbrace{\frac{1}{\ln\frac{3}{2}}}_{>0}\left(\varphi(x) - \Psi(x)\right)$$

Cherchons où s'annule Ψ :

$\Psi(x) = 0 \iff \cotan(x\ln 3) = 0 \iff x\ln 3 = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff x = \frac{\pi(1+2k)}{2\ln 3}$

avec la condition $\frac{\pi}{\ln 3} < \frac{\pi(1+2k)}{2\ln 3} < \frac{\pi}{\ln 2} \iff \frac{1}{2} < k < \underbrace{\frac{1}{2}\left(2\frac{\ln 3}{\ln 2} - 1\right)}_{\simeq 1,08} \iff k = 1$

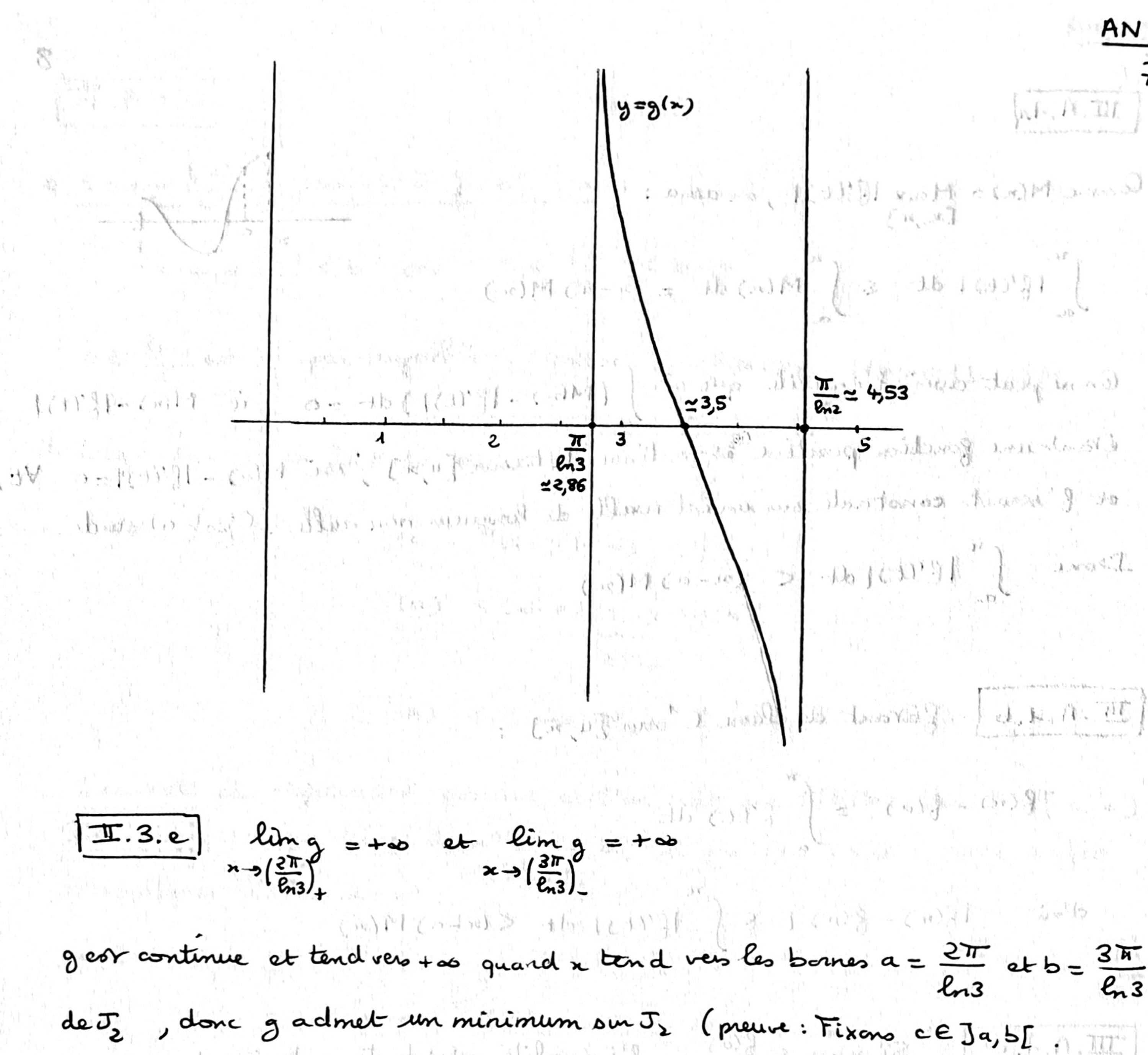
Ainsi $x = \frac{3\pi}{2\ln 3} \simeq 4,28$ est l'unique racine de Ψ sur J_1.

Si $\frac{\pi}{\ln 3} < x \leq \frac{3\pi}{2\ln 3}$, on aura $\varphi(x) - \Psi(x) < 0$ donc $g'(x) < 0$

Si $\frac{3\pi}{2\ln 3} < x < \frac{\pi}{\ln 2}$, on aura $\varphi(x) - \Psi(x) < \underbrace{\varphi\left(\frac{3\pi}{2\ln 3}\right)}_{\simeq -4,07} - \underbrace{\Psi\left(\frac{\pi}{\ln 2}\right)}_{\simeq 0,3} \simeq -4,07 + 0,3$

(d'après les variations de φ et Ψ) d'où encore $g'(x) < 0$.

Ccl : $g'(x) < 0$ pour tout $x \in J_1$, et g est strict. décroissante sur J_1.



II.3.e $\lim_{x \to \left(\frac{2\pi}{\ln 3}\right)_+} g = +\infty$ et $\lim_{x \to \left(\frac{3\pi}{\ln 3}\right)_-} g = +\infty$

g est continue et tend vers $+\infty$ quand x tend vers les bornes $a = \frac{2\pi}{\ln 3}$ et $b = \frac{3\pi}{\ln 3}$ de J_2, donc g admet un minimum sur J_2 (preuve : Fixons $c \in]a,b[$.
$\exists \eta < \frac{b-a}{2}$ $\left.\begin{array}{l}|x-a|<\eta \\ |x-b|<\eta\end{array}\right\} \Rightarrow f(x) > f(c)$ de sorte que $\operatorname{Inf}_{J_2} g = \operatorname{Inf}_{[a+\eta, b-\eta]} g$, et g, continue, admet un minimum sur l'intervalle compact $[a+\eta, b-\eta]$ ...)

On calcule : $g(7,1) \simeq -0,0506 < 0$ pour constater que ce minimum sera négatif.

III.A.1.a

Comme $M(x) = \underset{[x_0,x]}{\mathrm{Max}} |f'(t)|$, on aura :

$$\int_a^x |f'(t)|\,dt \leq \int_a^x M(x)\,dt = (x-a)M(x)$$

On ne peut avoir l'égalité que si $\int_a^x (M(x) - |f'(t)|)\,dt = 0$ ie, $M(x) - |f'(t)|$ étant une fonction positive et continue de t sur $[a,x]$, ssi $M(x) - |f'(t)| = 0$ $\forall t$, et f' serait constante sur un intervalle de longueur non nulle. C'est absurde.

Donc $\int_a^x |f'(t)|\,dt < (x-a)M(x)$

III.A.1.b f étant de classe C^1 sur $[a,x]$:

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$$

d'où $|f(x) - f(a)| \leq \int_a^x |f'(t)|\,dt < (x-a)M(x)$

III.A.1.c

On aura : $|f(x) - f(a)| < (x-a)M(x) \leq \frac{f(a)}{M_0} M(x)$

d'où $f(x) > f(a)\left(1 - \frac{M(x)}{M_0}\right)$

III.A.1.d

* $c = a + \frac{f(a)}{M_0}$ appartient à $]a,b[$ car :

$$a < a + \frac{f(a)}{M_0} < b \iff 0 < \frac{f(a)}{M_0} < b - a$$

$0 < \frac{f(a)}{M_0}$ est vrai par hypothèse. Reste à montrer que $f(a) < (b-a)M_0$.

Les inégalités du III.A.1.b donnent :

$$\forall x \in]a,b[\qquad f(a) - (x-a)M(x) < f(x)$$

$$f(a) < (x-a)\underbrace{M(x)}_{\leq M_0} + f(x)$$

$$f(a) < (x-a)M_0 + f(x) \qquad (2)$$

f ne reste pas strictement positive et l'on sait que $f(t) > 0$ pour $t \in [x_0, a]$. On en déduit l'existence de $x'' \in]a,b[$ tel que $f(x'') \leq 0$, et il suffit d'appliquer (2) en $x = x''$:

$$f(a) < (x''-a)M_0 + \underbrace{f(x'')}_{\leq 0} \leq (x''-a)M_0 \leq (b-a)M_0$$

d'où $f(a) < (b-a)M_0$.

* Si $x' \in [a,c]$,

$$x' - a \leq c - a = \frac{f(a)}{M_0} \underset{c)}{\Longrightarrow} f(x') > \underbrace{\left(1 - \frac{M(x')}{M_0}\right)}_{\geq 0} \underbrace{f(a)}_{>0}$$

$$\Longrightarrow f(x') > 0$$

CQFD

III.A.2.a

Si x_n est construit, $x_n \in [x_0, b[$ vérifie $f(t)>0$ pour tout $t \in [x_0, x_n]$.
Il suffit d'appliquer III.A.1 pour constater que

$$x_{n+1} \doteq x_n + \frac{f(x_n)}{M_0}$$

appartient à $]x_n, b[$ et $f(t)>0$ pour $t \in [x_0, x_{n+1}]$.

$(x_n)_n$ est strictement croissante (car $\frac{f(x_n)}{M_0} > 0$ pour tout n)

III.A.2.b

* $(x_n)_n$ croissante, majorée par b, convergera vers un réel $x_* \in [x_0, b]$

* Comme $x_* = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$, si $\varepsilon > 0$ il existera $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_* - \varepsilon < x_n < x_*$. On sait que $t \in [x_0, x_n] \Rightarrow f(t) > 0$, donc $f(x_* - \varepsilon) > 0$.
Ainsi $f(x) > 0$ pour tout $x \in [x_0, x_*[$.

Cela montre aussi que $x_* \neq b$ (sinon $f(x)>0$ pour tout $x \in [x_0, b[$, ce qui est contraire à l'hypothèse). Donc $x_* \in [x_0, b[$

* Passons à la limite dans l'égalité définissant $(x_n)_n$ par récurrence.

$$x_* = x_* + \frac{f(x_*)}{M_0} \quad \text{entraîne } f(x_*) = 0$$

Cela montre aussi que $x_* > a$ (car $\forall t \in [x_0, a]$ $f(t) > 0$).
En conclusion $x_* \in]a, b[$.

III.B.1.a

* $r(x) = R_3(x,1) = \sum_{m=1}^{3} m \cos(x \ln m) = 1 + 2\cos(x\ln 2) + 3\cos(x \ln 3)$

Si $x \in \left[0, \frac{\pi}{\ln 3}\right]$, $0 \leq x\ln 2 \leq \pi \frac{\ln 2}{\ln 3} < \pi$ et $0 \leq x \ln 3 \leq \pi$ donc les fonctions $\cos(x \ln 2)$, $\cos(x \ln 3)$ et par suite $r(x)$, seront strictement décroissantes sur $\left[0, \frac{\pi}{\ln 3}\right]$.

* $r(0) = 6$

$r\left(\frac{\pi}{\ln 3}\right) = -2 + 2\underbrace{\cos\left(\pi \frac{\ln 2}{\ln 3}\right)}_{<0} < 0$

donc r admettra un unique zéro dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{\ln 3}\right]$.

III.B.1.b

$r'(x) = -2\ln 2 \sin(x \ln 2) - 3\ln 3 \sin(x \ln 3)$

$|r'(x)|$ sera majoré par $2\ln 2 + 3\ln 3 \simeq 4{,}68$ sur $\left[0, \frac{\pi}{\ln 3}\right[$, et l'on peut prendre $M_0 = 5$. Les hypothèses du III.A. sont alors trivialement satisfaites.

III.B.1.c

Un petit programme nous donne :

```
1.  X←0 : N←1
5.  X←X + r(X)/5 : Print N,X
10. N=N+1 : GOTO 5
```

$x_1 = 1{,}2$

$x_2 = 1{,}819298428$

$x_3 = 1{,}892247846$

$x_4 = 1{,}902882053$

$x_5 = 1{,}904559259$

$x_6 = 1{,}904826978$

$x_7 = 1{,}904869793$

$x_8 = 1{,}904876642$

... et $x_{15} = 1{,}904877947$ (idem pour tous les suivants)

$\alpha = 1{,}9048$ est une valeur approchée de x_* à 10^{-4} près car :

$$\begin{cases} r(\alpha - 10^{-4}) = r(1{,}9047) \simeq 7{,}47.10^{-4} > 0 \\ r(\alpha + 10^{-4}) = r(1{,}9049) \simeq -9{,}26.10^{-5} < 0 \end{cases}$$

entraînent : $\alpha - 10^{-4} < x_* < \alpha + 10^{-4}$

$$|x_* - \alpha| < 10^{-4}$$

III.B.2.a

Posons $\alpha_k = \dfrac{k\pi}{\ln 3}$.

$$r(\alpha_k) = 1 + 2\cos\left(k\pi \frac{\ln 2}{\ln 3}\right) + 3 \underbrace{\cos(k\pi)}_{(-1)^k}$$

$$r(\alpha_k) = 1 + (-1)^k.3 + 2\cos\left(k\frac{\ln 2}{\ln 3}\pi\right)$$

* Si k est pair, $r(\alpha_k) = 2\left(2 + \cos\left(k\frac{\ln 2}{\ln 3}\pi\right)\right)$ est toujours positif et s'annule ssi $\cos\left(k\frac{\ln 2}{\ln 3}\pi\right) = -1 \Leftrightarrow k\frac{\ln 2}{\ln 3}\pi = (2h+1)\pi \Rightarrow \frac{\ln 2}{\ln 3} \in \mathbb{Q}$ absurde.

Donc $r(\alpha_k) > 0$.

* Si k est impair, $r(\alpha_k) = -2 + 2\cos\left(k\frac{\ln 2}{\ln 3}\pi\right) \leq 0$ et ne peut pas s'annuler car $\frac{\ln 2}{\ln 3} \notin \mathbb{Q}$.

Ccl : $\forall k \in \mathbb{N}$ $\quad r(\alpha_{2k+1}) < 0 < r(\alpha_{2k})$ et le Th. des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un zéro de r dans chaque intervalle $]\alpha_{2k}, \alpha_{2k+1}[$.

III.B.2.b

* r et ses dérivées ne s'annulent pas toutes simultanément :

On sait que $\cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$ d'où :

$$r^{(k)}(x) = 2\ln^k 2 \, . \cos\left(x\ln 2 + k\frac{\pi}{2}\right) + 3\ln^k 3 \, . \cos\left(x\ln 3 + k\frac{\pi}{2}\right) \qquad k \geq 1$$

Supposons par l'absurde que $r^{(k)}(x) = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$. On aura :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad r^{(4k)}(x) = 2\ln^{4k} 2 \cos(x\ln 2) + 3\ln^{4k} 3 \, . \cos(x\ln 3) = 0$$

d'où on va tirer une absurdité.

La résolution de :

$$\begin{cases} 2\cos(x\ln 2) + 3\cos(x\ln 3) = -1 \\ 2\ln^{4k} 2 \, . \cos(x\ln 2) + 3\ln^{4k} 3 \, . \cos(x\ln 3) = 0 \end{cases}$$

donne :

$$\cos(x\ln 2) = \frac{\ln^{4k} 3}{2(\ln^{4k} 2 - \ln^{4k} 3)} \longrightarrow -\frac{1}{2} \quad (k \to +\infty)$$

donc $\cos(x\ln 2) = -\frac{1}{2} \Rightarrow x\ln 2 = \pm\frac{2\pi}{3} \; [2\pi]$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3\ln 2} + h\frac{2\pi}{\ln 2} \qquad h \in \mathbb{Z}$$

et en remplaçant dans r :

$$r\left(\pm\frac{2\pi}{3\ln 2} + h\frac{2\pi}{\ln 2}\right) = 1 + \underbrace{2\cos\left(\pm\frac{2\pi}{3} + h2\pi\right)}_{= -\frac{1}{2}} + 3\cos\left(\frac{(3h\pm 1)2\pi}{3\ln 2} . \ln 3\right) = 0$$

d'où $\dfrac{(3h\pm 1)2\pi . \ln 3}{3\ln 2} = \dfrac{\pi}{2} + \nu\pi \qquad \nu \in \mathbb{N}$

$$\frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \nu\right) . 3}{2(3h\pm 1)} \in \mathbb{Q} \quad \text{absurde.}$$

* Les zéros de r sont isolés :

Soit x un zéro de r. D'après ce qui précède, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $r^{(k)}(x) \neq 0$.
La formule de Taylor-Young donne :

$$r(t) = \frac{r^{(k)}(x)}{k!}(t-x)^k + (t-x)^k \varepsilon(t) \quad \text{sur un voisinage } U \text{ de } x,$$

avec $\lim_{t \to x} \varepsilon(t) = 0$.

Si x n'est pas un zéro isolé, il existe une suite $(t_n)_n$ de zéros de r tendant vers x et telle que $t_n \neq x$ pour tout n.

$$\left.\begin{array}{l} r(t_n)=0 \\ t_n \neq x \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = \frac{r^{(k)}(x)}{k!}(t_n - x)^k + (t_n - x)^k \varepsilon(t_n)$$

$$\varepsilon(t_n) = -\frac{r^{(k)}(x)}{k!}$$

$$\text{donc } \lim_{n \to +\infty} \varepsilon(t_n) = 0 = -\frac{r^{(k)}(x)}{k!}, \text{ absurde.}$$

III.B.2.c

Soit Z_n l'ensemble des zéros de r contenus dans l'intervalle $[0, n]$.

Z_n est fermé car si $(x_n)_n$ est une suite de Z_n tendant vers x, alors
$x \in \overline{[0,n]} = [0,n]$ et $r(x) = \lim \underbrace{r(x_n)}_{=0} = 0$, donc $x \in Z_n$.

Z_n est fermé dans le compact $[0, n]$, donc sera compact.
Enfin, tout compact formé de points isolés est fini, donc Z_n sera fini.

L'ensemble $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n$ des zéros positifs de r est donc la réunion dénombrable d'ensembles finis, et sera dénombrable.

IV.1.a

$(e^{i2\pi u_n \xi})_n$ est une suite du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 de $\mathbb{C}$.

$\mathcal{C}$ est un compact. Toute suite d'un esp. métrique compact possède au moins une valeur d'adhérence, donc il existe une sous-suite $(\nu_k)_k$ de (u_n) telle que $(e^{i2\pi\nu_k\xi})_k$ converge.

IV.1.b Il suffit de continuer le raisonnement du IV.1.a par récurrence finie : Prenons $(e^{i2\pi u_n \xi_1})_n$ et extrayons une suite ν_k tq $(e^{i2\pi \nu_k \xi_1})_k$ converge, puis considérons $(e^{i2\pi\nu_k\xi_2})_k$ et construisons une suite $(\tau_j)_j$ extraite de $(\nu_k)_k$ telle que $(e^{i2\pi\tau_j\xi_2})_j$ converge, et ainsi de suite.

D'après le Critère de Cauchy :

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists K \quad k>K \Rightarrow |e^{i2\pi\nu_{k+1}\xi_j} - e^{i2\pi\nu_k\xi_j}| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |e^{i2\pi(\nu_{k+1}-\nu_k)\xi_j} - 1| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |\cos(2\pi(\nu_{k+1}-\nu_k)\xi_j - 1| < \varepsilon$$

ie $\lim\limits_{k\to+\infty} \cos 2\pi(\nu_{k+1}-\nu_k)\xi_j = 1 \qquad \forall j$.

IV.2 D'après IV.1.b avec $\xi_j = \ln j$, $1 \leq j \leq N$, il existe une suite $(\nu_k)_k$ que l'on peut extraire de n'importe quelle suite donnée telle que :

$$\lim_{k\to+\infty} \cos 2\pi(\nu_{k+1}-\nu_k)\ln m = 1 \qquad \forall m \in \mathbb{N}_N$$

Posons $x_k = 2\pi(\nu_{k+1}-\nu_k)$. On aura $\lim\limits_k \cos x_k \ln m = 1$ donc :

$\exists K \quad k \geq K \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}_N \quad \cos x_k \ln m > 0$

$\exists K \quad k \geq K \Rightarrow R_N(x_k, y) = \sum_{m=1}^{N} m^y \cos(x_k \ln m) > 0$

Il suffit de prendre la suite $(x_k)_{k\geq K}$ et de s'arranger pour que $x_k \to +\infty$, en agissant sur le choix de $(\nu_k)_k$ (on a $x_k = 2\pi(\nu_{k+1}-\nu_k) \to +\infty$ en choisissant $\nu_k = k^2$, par exemple)

CQFD

IV.3 $R_2(x,y) = 1 + 2^y \cos(x \ln 2)$

$\cos(x\ln 2) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2\ln 2} + k\frac{\pi}{\ln 2}$

Les droites d'équations $x = \frac{\pi}{2\ln 2} + k\frac{\pi}{\ln 2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ forment une famille infinie de droites séparatrices d'arcs de C_N.

V.1

* Si $t \in [n-1, n]$, $n^{y_0} \leq t^{y_0}$ donc $n^{y_0} \leq \int_{n-1}^{n} t^{y_0}\,dt$ et en additionnant ces inégalités :

$$\sum_{n=3}^{N} n^{y_0} \leq \int_2^N t^{y_0}\,dt = \frac{N^{y_0+1} - 2^{y_0+1}}{y_0+1}$$

d'où

$$\boxed{S_N = \sum_{n=2}^{N} n^{y_0} \leq 2^{y_0} + \frac{N^{y_0+1} - 2^{y_0+1}}{y_0+1}}$$

* Si $y_0 \leq -2$, on a : $2^{y_0} \leq 2^{-2} = \frac{1}{4}$ et :

$$\frac{N^{y_0+1} - 2^{y_0+1}}{y_0+1} \leq \frac{-2^{y_0+1}}{y_0+1} \leq 2^{y_0+1} \leq 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

Finalement : $S_n \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

* $R_N(x, y_0) = \sum_{m=1}^{N} m^{y_0} \cos(x \ln m) = 1 + \underbrace{\sum_{m=2}^{N} m^{y_0} \cos(x \ln x)}_{|\;| \leq S_n \leq \frac{3}{4}}$

donc $R_N(x, y_0) \geq \frac{1}{4}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Aucune partie de la courbe C_N ne se trouve donc dans le demi-plan $y \leq -2$.

V.2

$\forall x \in]a,b[\qquad R_N(x, \varphi(x)) = 0$

$$\sum_{m=1}^{N-1} m^{\varphi(x)} \cos(x \ln m) + N^{\varphi(x)} \cos(x \ln N) = 0$$

$$\cos(x \ln N) = - \sum_{m=1}^{N-1} \underbrace{\left(\frac{m}{N}\right)^{\varphi(x)}} \underbrace{\cos(x \ln m)}$$

$\cos(x\ln m) \to \cos(a \ln m)$

$\left(\frac{m}{N}\right)^{\varphi(x)} \to 0$ car $0 < \frac{m}{N} < 1$ et $\lim_{a_+} \varphi(x) = +\infty$

Donc $\lim_{x \to a_+} \cos(x \ln N) = 0$

On en déduit $\cos(a \ln N) = 0 \iff a \ln N = \frac{\pi}{2} + h\pi \quad h \in \mathbb{Z}$

$$\iff a = \frac{(2h+1)\pi}{2 \ln N}$$

Le même raisonnement donne $b = \frac{(2k+1)\pi}{2 \ln N}$

V.3.a $\qquad I_N(x, \varphi(x)) = 0$

$$\sum_{m=1}^{N} m^{\varphi(x)} \sin(x \ln m) = 0$$

(*) $$\sin(x \ln N) = - \sum_{m=1}^{N-1} \underbrace{\left(\frac{m}{N}\right)^{\varphi(x)}} \sin(x \ln m)$$

$\to 0$ si $x \to c_+$

Donc $\lim_{x \to c} \sin(x \ln N) = 0 \iff \sin c \ln N = 0 \iff \boxed{c = \frac{h\pi}{\ln N} \quad h \in \mathbb{Z}}$

V.3.b * Si $\lim_{d_-} \varphi(x) = +\infty$, on utilise (*) comme ci-dessus pour conclure à $d = \frac{k\pi}{\ln N}$.

* Si $\lim_{d_-} \varphi(x) = -\infty$, il faut écrire :

$\sin(x \ln 2) = - \sum_{m=3}^{N} \left(\frac{m}{2}\right)^{\varphi(x)} \sin(x \ln m)$ pour que $\left(\frac{m}{2}\right)^{\varphi(x)}$ tende vers 0 quand $x \to d$

d'où $\sin(\alpha \ln 2) = 0$ en passant à la limite, et :

$$\boxed{\alpha = \frac{k\pi}{\ln 2}} \quad , \; k \in \mathbb{Z}$$

V.4 Les questions V.2 et V.3 montrent que s'il y a asymptote verticale à la courbe C_N (ou C'_N) alors les équations de ces asymptotes sont :

$$x = \frac{(2h+1)\pi}{2\ln N} \quad \text{pour } C_N$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{k\pi}{\ln N} \quad , \text{si } \lim \varphi(x) = +\infty \quad , \text{pour } C'_N \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{k\pi}{\ln 2} \quad , \text{si } \lim \varphi(x) = -\infty \quad , \text{pour } C'_N . \end{cases}$$

De telles asymptotes existent :

- En I.2.b : $x = \dfrac{\pi}{2\ln 2}$ et $x = \dfrac{3\pi}{2\ln 2}$ sont asymptotes de C_2
- En II.3.b : $x = \dfrac{\pi}{\ln 3}$ et $x = \dfrac{\pi}{\ln 2}$ sont asymptotes de C'_3
- En II.3.e : $x = \dfrac{2\pi}{\ln 3}$ et $x = \dfrac{3\pi}{\ln 3}$ sont asymptotes de C'_3.

IUFM. Antilles Guyane
PLC 1 mathématiques

CAPES 92 ANALYSE - CORRIGÉ

I - Cas où N=2.

I.1.a. On a, pour $x \in \mathbb{R}$: $\cos x < 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid x \in]\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi[$

Donc, pour $x \in \mathbb{R}$: $\cos x \ln 2 < 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ $x \in]\frac{\pi}{2\ln 2} + \frac{2k\pi}{\ln 2}, \frac{3\pi}{2\ln 2} + \frac{2k\pi}{\ln 2}[$

D'où : $D_2 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]\frac{\pi}{2\ln 2} + \frac{2k\pi}{\ln 2}, \frac{3\pi}{2\ln 2} + \frac{2k\pi}{2\ln 2}[$.

1.1.b. Commentaire : on a une équivalence à démontrer : on procède en général par double implication, sauf si le raisonnement est simple. Ici les 2 sont possibles.

On a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $R(x,y) = 1 + 2^y \cos(x\ln 2)$

▪) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Si $R(x,y) = 0$, il est clair que : $\cos x \ln 2 < 0$. Car 2^y est strictement positif. On a alors :

$1 + 2^y \cos x \ln 2 = 0 \Rightarrow 2^{-y} = \cos x \ln 2 \Rightarrow y = -\frac{1}{\ln 2} \ln(-\cos x \ln 2)$

Réciproquement si $\cos(x \ln 2) < 0$ et si : $y = -\frac{1}{\ln 2} \ln(-\cos x \ln 2)$ (qui est défini) on a $R(x,y) = 0$.

▪) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On remarque au préalable que $R(x,y) = 0$ entraine nécessairement $x \in D_2$ on a alors les équivalences :

$1 + 2^y \cos x \ln 2 = 0 \Leftrightarrow (x \in D_2 \text{ et } 2^{-y} = \cos x \ln 2)$

$\Leftrightarrow (x \in D_2 \text{ et } y = -\frac{1}{\ln 2} \ln(\cos x \ln 2))$.

(les ~~applications~~ implications " $\Leftarrow$ " sont claires).

1.2.a. Commentaire : il est faux de dire que f est dérivable comme composées de fonctions dérivables sur D_2. La fonction logarithme n'est pas définie sur D_2, mais sur $\mathbb{R}^{+*}$! La "seule" chose à vérifier est que pour $x \in D_2$ on a : $-\cos x \ln 2 > 0$.

La fonction $h \begin{pmatrix} D_2 & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\cos(x\ln 2) \end{pmatrix}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ ($h(D) \subset \mathbb{R}^{+*}$)

1.2.b. - Pas de difficulté - ▪) on rappelle que pour une fonction f définie sur $]\frac{\alpha}{2}, \frac{3\alpha}{2}[$ la droite $x = \alpha$ est axe de symétrie du graphe de f ssi : $\forall x \in]\frac{\alpha}{2}, \frac{3\alpha}{2}[$ $f(2\alpha - x) = f(x)$

▪) Comme $\lim_{x \to \alpha/2} f(x) = -\infty$ la courbe possède une branche infinie pour x tendant vers $\alpha/2$: la droite d'équation $x = \alpha/2$ est asymptote verticale au graphe.

1.2.c. Pas de difficulté. D'après le 1.1. $\mathcal{C}_2$ est défini par : $C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D_2 \text{ et } y = -f(x)\}$. Comme C_2 est l'ensemble : $C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in]\alpha/2, 3\alpha/2[, y = f(x)\}$, $\mathcal{C}_2$ se déduit par symétrie p/r à l'axe Ox, et par translations successives de vecteurs $\frac{2k\pi}{\ln 2}\vec{e}$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

I.3. On a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $I_3(x,y) = 2^y \sin(x \ln 2)$

d'où, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ les équivalences suivantes :

$(x,y) \in \mathcal{C}'_2 \Leftrightarrow 2^y \sin(x\ln 2) = 0$

$\Leftrightarrow (y \in \mathbb{R}) \text{ et } \sin x \ln 2 = 0$

$\Leftrightarrow (y \in \mathbb{R}) \text{ et } (\exists k \in \mathbb{Z} \ x = \frac{k\pi}{\ln 2})$

D'où : $\mathcal{C}'_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists k \in \mathbb{Z} \ x = \frac{k\pi}{\ln 2}\}$

Commentaire : on peut aussi dire plus "joliment" que $\mathcal{C}'_2$ est la réunion des droites d'équation $x = \frac{k\pi}{\ln 2}$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

//

II - Etude de $\mathcal{C}'_3$.

II.1.a. ▪) Supposons $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ rationnel : il existe alors un couple d'entiers $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, (premiers entre eux) car $\ln 2/\ln 3 > 0$ tel que : $\ln 2/\ln 3 = p/q$. On en déduit que $2^q = 3^p$. Ce qui est impossible, ces 2 entiers étant de parité différentes.

II.1.a. (Suite)

■-) Supposons $A \cap B$ non vide : il existe alors $x \in A \cap B$ et donc un couple $(h,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que : $x = \frac{h\pi}{\ln 2} = \frac{k\pi}{\ln 3}$. On en déduit $\ln 2/\ln 3 = h/k$, ce qui contredit l'irrationalité de $\ln 2/\ln 3$.

$A \cap B$ est donc vide.

II.1.b.

On a pour $x \in \mathbb{R}$ $\sin(x\ln 2)\sin(x\ln 3) < 0$ ssi $\begin{cases} \sin(x\ln 2) < 0 \text{ et } \sin x\ln 3 > 0 \\ \text{ou} \\ \sin(x\ln 2) > 0 \text{ et } \sin x \ln 3 < 0 \end{cases}$

Or : $\begin{cases} \sin x \ln 2 < 0 \text{ ssi } x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{\ln 2} + \frac{2k\pi}{\ln 2}, \frac{2(k+1)\pi}{\ln 2} \right[\\ \sin x \ln 3 > 0 \text{ ssi } x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left] \frac{2k\pi}{\ln 3}, \frac{\pi}{\ln 3} + \frac{2k\pi}{\ln 3} \right[\end{cases}$

De même : $\begin{cases} \sin x \ln 2 > 0 \text{ ssi } x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left] \frac{2k\pi}{\ln 2}, \frac{\pi}{\ln 2} + \frac{2k\pi}{\ln 2} \right[\\ \sin x \ln 3 < 0 \text{ ssi } x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{\ln 3} + \frac{2k\pi}{\ln 3}, \frac{2(k+1)\pi}{\ln 3} \right[\end{cases}$

On choisit alors le tableau de signe suivant, pour $x \in D_3 \cap \left]0, \frac{4\pi}{\ln 3}\right[$

	0	$\frac{\pi}{\ln 3}$	$\frac{\pi}{\ln 2}$	$\frac{2\pi}{\ln 3}$	$\frac{3\pi}{\ln 3}$	$\frac{2\pi}{\ln 2}$	$\frac{4\pi}{\ln 3}$
$\sin x \ln 2$	+	+	−	−	−	+	
$\sin x \ln 3$	+	−	−	+	−	−	

D'où $D_3 \cap \left]0, \frac{4\pi}{\ln 3}\right[= \left]\frac{\pi}{\ln 3}, \frac{\pi}{\ln 2}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{\ln 3}, \frac{3\pi}{\ln 3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{\ln 2}, \frac{4\pi}{\ln 3}\right[$.

II.2.a. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq 0$ et $I_3(x,y) = 0$.

On a : $I_3(x,y) = 2^y \sin(x\ln 2) + 3^y \sin(x\ln 3)$.

Supposons, par exemple que : $\sin(x\ln 2) = 0$. Alors $3^y \sin(x\ln 3) = 0$ d'où : $\sin x\ln 3 = 0$, car : $3^y \neq 0$. De même en supposant que $\sin(x\ln 3)$ est nul on arrive à montrer que $\sin x\ln 2$ est nul. Mais, alors c'est que x (si x est positif) ou $-x$ (si x est négatif) appartient à $A \cap B$, qui est vide. C'est donc que $\sin(x\ln 2)$ est $\sin(x\ln 3)$ sont tous les deux non nuls, sous les hypothèses du texte.

II.2.b.

Commentaire : pose les m̂ problèmes de rédaction que le I.1.b.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$.

On a $I_3(x,y) = 0 \iff 2^y \sin(x\ln 2) + 3^y \sin x\ln 3 = 0$

$\iff 0 = 2^y \sin(x\ln 2) + 3^y \sin x \ln 3$ et $x \in D_3$

($[\Rightarrow]$; évident ; $[\Leftarrow]$ d'après 2 II.2.a.)

$\iff \left(\frac{3}{2}\right)^y = -\frac{\sin x\ln 2}{\sin x\ln 3}$ et $x \in D_3$

$\iff y = g_3(x)$ et $x \in D_3$.

II.3.a. Remarque : $D_3 \cap \left]0, \frac{4\pi}{\ln 3}\right[$ contient les intervalles J_1 et J_2

la fonction g est bien définie sur J_1 et J_2 et l'on a pour $x \in J_1 \cup J_2$

$g(x) = 0 \iff -\frac{\sin x\ln 2}{\sin x\ln 3} = 1$

$\iff \sin x\ln 2 = \sin(-x\ln 3)$ (*)

Or : Pour a et $b \in \mathbb{R}$, on a : $\sin a = \sin b$ ssi $\begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}\ a = b + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z}\ a = \pi - b + 2k\pi \end{cases}$

En remplaçant a et b par $x\ln 2$ et $-x\ln 3$, respectivement, il vient $g(x) = 0$ ssi $\exists k \in \mathbb{Z}$ $x = \frac{2k\pi}{\ln 6}$ ou $x = \frac{\pi + 2k\pi}{\ln(2/3)}$

Finalement on trouve $x_1 = \frac{2\pi}{\ln 6}$ comme seul zéro de g sur J_1

et $x_2 = \frac{\pi}{\ln 3/2}$ et $x_2' = \frac{4\pi}{\ln 6}$ comme zéros de g sur J_2.

→ Variante : l'égalité (*) $\sin x\ln 2 = \sin(-x\ln 3)$ se transforme en $\sin(x\ln 2) + \sin(x\ln 3) = 0$.

Cette somme d'arcs trigonométrique se transforme classiquement en produit.

II.3.b. Le calcul des limites ne pose pas problème :

on a $\lim_{x \to \frac{\pi}{\ln 3}} g(x) = +\infty$ $\lim_{x \to \frac{\pi}{\ln 2}} g(x) = -\infty$

(Remarquer que : $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{\ln 3} < \pi < \frac{\pi}{\ln 2} < \frac{3\pi}{2}$).

La fonction g étant continue sur J_1 tendant vers $+\infty$ pour x tendant vers $\frac{\pi}{\ln 3}$ et vers $-\infty$ pour x tendant vers $\frac{\pi}{\ln 2}$, on aura $g(J_1) = \mathbb{R}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires

II.3.b. Commentaire : Attention à ne pas écrire les bêtises suivantes $g(J_1) = \left] \lim_{x\to\beta} g(x), \lim_{x\to\alpha} g(x) \right[$; $g(J_1) =]g(\beta), g(\alpha)[$ qui sont toutes fausses ...

II.3.c. • Le calcul de g' ne pose pas de problème :

$$g'(x) = -(\ln(3/2))^{-1} \left(\ln 3 \,\mathrm{cotan}(x \ln 3) - \ln 2 \,\mathrm{cotan}(x \ln 2) \right)$$

• le graphe, sur J_1, de $f_3\ x \to \ln 3 \,\mathrm{cotan}\, x\ln 3$ et de $f_2\ x \to \ln 2 \,\mathrm{cotan}(x \ln 2)$ s'obtiennent sans étude à partir de celui de la fonction $f_1 : x \to \mathrm{cotan}\, x$.

y, π, 2π, x, $y = \mathrm{cotan}\, x$; $y = f_3(x)$, $\pi/\ln 3 = \beta$, $\pi/\ln 2 = \alpha$, $y = f_2(x)$

• le recours à une calculatrice montre que : $f_2(\beta) = -0{,}3028 \pm 10^{-4}$ alors que $f_3(\alpha) = -0{,}3004 \pm 10^{-4}$. On est donc sûr que : $f_3(\alpha) > f_2(\beta)$.

Comme f_3 est décroissante sur J_1 et f_2 croissante il en résulte que :

$$\forall x \in J_1 \quad f_3(x) > f_2(x).$$

La fonction g est donc décroissante sur J_1, puisque :

$$g'(x) = -(\ln 3/2)\,(f_3(x) - f_2(x)).$$

II.3.d. Voyez votre calculatrice graphique si vous en avez une...

II.3.e. • On a : $\lim_{x \to 2\pi/\ln 3} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 3\pi/\ln 3} g(x) = +\infty$ (en remarquant que $\frac{3\pi}{2} < \frac{2\pi}{\ln 3} < 2\pi < 2\pi + \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{\ln 3} < 3\pi$).

• Soient x_2 et x'_2 les zéros de $g|_{J_2}$ calculés en

II.3.a : comme g est continue $g([x_2, x'_2])$ sera un intervalle compact qui est d'ailleurs $[\min_{[x_2,x'_2]} g = m_0 ; \max_{[x_2,x'_2]} g = M_0]$, m_0 étant en particulier une valeur prise par g. S'il existe $\bar{x} \in [x'_2\ x'_2]$ tel que $g(\bar{x})$ soit strictement négatif on pourra conclure que m_0 est strictement négatif, a fortiori.

Or $g((x_1 + x_2)/2)$ est strictement négatif.

III Intersection de C_3 avec la droite d'équation $y = 1$.

III - A

A.1 **A.1.a.** 1ère Méthode : Avec les notations du texte, on a :

$\forall t \in [a, x] \quad |f'(t)| \leq M(x)$. D'où : $\int_a^x |f'(t)|\,dt \leq \int_a^x M(x)\,dt = (x-a)M(x)$.

Reste à voir pourquoi l'inégalité est stricte...

Si l'on avait : $\int_a^x |f'(t)|\,dt = M(x)(x-a)$, $M(x)$ serait la valeur moyenne de $|f'(t)|$ sur $[a,x]$. Comme : $\forall t \in [a,x]\ |f'(t)| \leq M(x)$ on aurait, à cause de la continuité de $t \to |f'(t)|$: $\forall t \in]a,x[\ |f'(t)| = M(x)$.

Donc la fonction $t \to |f'(t)|$ serait constante sur $]a,x[$: en utilisant la continuité de f' cette fois, on en déduit que f' elle même serait constante sur $]a,x[$ ce qui contredit une des hypothèses.

Attention ! La valeur absolue d'une fonction peut être constante sans que la fonction elle même le soit : [croquis : g ; $|g|$; $1/2$, 1]

2ème Méthode : La fonction : $t \to M(x) - |f'(t)|$ est positive sur $[a, x]$ et non nulle (i.e. il existe au moins un point où elle est strictement positive). Cette fonction étant continue, son intégrale est strictement positive.

On a donc : $\int_a^x (M(x) - |f'(t)|)\,dt > 0$ ce qui permet de conclure.

A.1.b - **A.1.c.** sans difficulté.

A.1.d. On a d'abord clairement $c \geq a$ car $f(a)$ et M_0 sont strictement positifs. Comme f ne reste pas strictement positive sur $[a,b[$, il existe x_1 de $[a,b[$ tel que : $f(x_1) \leq 0$. (et non $f(x_1) < 0$!). La continuité de f entraîne alors l'existence de $x_2 \in [a,b[$ tel que $f(x_2) = 0$. On a alors $f(a) = |f(a)| \leq M_0(x_2 - a)$ (A.1.b) d'où : $x_2 \geq a + \frac{f(a)}{M_0} = c$.

- **Nota** : Dans une rédaction de concours on peut directement affirmer l'existence de x_2.

- **Remarque** : Justifier le dessin ci-contre :

[figure : $f(a)$, tangente, $(*)$, a, $a + \frac{f(a)}{M_0}$, x_2 ; $(*)$ droite d'équation $y - f(a) = -M(x-a)$]

A.1.d - Suite. Pour $x' \in [a,c]$, on a : $x' - a \leq \frac{f(a)}{M_0}$.
D'après A.1.c. on en déduit : $f(x') > (1 - \frac{M(x')}{M_0}) f(a)$. Le nombre $M(x')$ vérifie : $M(x') \leq M(a)$; d'où $(1 - \frac{M(x')}{M_0}) f(a) \geqslant 0$ et : $f(x') > 0$.

A.2 **A.2.a.** On procède par récurrence : x_0 est donné (c'est la borne gauche de l'intervalle de définition de f !). On suppose que $x_0 ; x_1, \dots, x_n$ sont définis, tous strictement inférieurs à b et que f est strictement positive sur $[x_0, x_n]$ (là, je demande plus que le texte, on va voir pourquoi..). On pose alors $a = x_n$ et $c = a + \frac{f(a)}{M_0}$ vérifie : $c < b$; $f(c) > 0$; $\forall x \in [a,c]$ $f(x) > 0$. Alors $x_{n+1} = c$ vérifie : $x_{n+1} \geqslant x_n$ et f est strictement positive sur $[x_0, x_{n+1}]$.

A.2.b. Tout est en place : la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, majorée par b elle converge donc vers x_*. (a priori : $x_* \in [x_0, b]$).
Maintenant, f ne reste pas strictement positive sur $[a, b[$ et on ressort le x_1 de la question A.1.d. (ou le x_2...) : on a : $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \leq x_1$, car f est strictement positive sur $[x_0, x_n]$. L'inégalité se prolonge, par passage à la limite : $x_* \leq x_1$. D'où : $\underline{x_* < b}$ (car $x_1 < b$).
Comme x_* appartient à $[a, b[$, on peut "passer à la limite" dans l'expression : $x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{M_0}$. La continuité de f entraine que : $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_*)$ et $f(x_*) = 0$, en reportant dans l'égalité précédente. De plus f est positive strictement sur $[a, x_*[$ qui est la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [x_0, x_n]$.

III - B.

B.1 **B.1.a.** La fonction r est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[0, \frac{\pi}{\ln 3}]$. On obtient : $r'(x) = -2\ln 2 \sin(x \ln 2) - 3 \ln 3 \sin(x \ln 3)$.
On remarque que : $r'(0) = 0$ et que : $\forall x \in]0 \frac{\pi}{\ln 3}]$ $\sin(x \ln 2) > 0$ et : $\forall x \in]0 \frac{\pi}{\ln 3}]$ $\sin(x \ln 3) \geqslant 0$. D'où il ressort que r' est strictement négative sur $]0, \frac{\pi}{\ln 3}]$ et que r est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{\ln 3}]$
Comme : $r(0) = 6$ et $r(\frac{\pi}{\ln 3}) = 2(1 - \cos(\frac{\pi \ln 2}{\ln 3}))$, qui est strictement

négatif à cause de l'irrationnalité de $\frac{\ln 2}{\ln 3}$, f possède un zéro dans $]0, \frac{\pi}{\ln 3}[$ (th. des valeurs intermédiaires). Ce zéro est unique car f est strictement décroissante.

B.1.b. La vérification des hypothèses ne pose pas de problème. On a en particulier $|r'(x)| \leq 2\ln 2 + 3 \ln 3$. Si on se sert de la calculatrice pour vérifier que $2 \ln 2 + 3 \ln 3 < 5$ le dire ! (exercice : chercher, si elle existe une démonstration sans faire usage de valeurs approchées..). On peut aussi affirmer que r n'est constante sur aucun intervalle, car r ne peut posséder des zéros qu'isolés : ils sont liés à ceux de la fonction cos.

B.1.c. Mon P.C. donne les résultats suivants pour les valeurs approchées des x_i

$$x_i \begin{cases} \overline{x_5} \simeq 1.9045592585 & \overline{x_6} = 1.9048269775 \quad \overline{x_7} = 1.9048697928 \\ \overline{x_8} \simeq 1.9048766422 & \end{cases}$$

(le dernier chiffre pouvant ne pas être significatif).
Comment, maintenant, affirmer que : $x_* - \overline{x_8} \leq 10^{-4}$?

Méthode "de cuisine". On calcule $x' = \overline{x_8} + 10^{-4}$ et une valeur approchée de $r(x')$ dont on constate qu'elle est strictement négative : -0.0004611227, seul le dernier chiffre peut ne pas être significatif. Il est sûr que la valeur réelle de $r(\hat{x})$ vérifie : $|r(\hat{x}) + 0.0004| < 10^{-4}$ et que donc $r(\hat{x})$ est strictement négatif. Cette méthode doit être employée avec soin en précisant la qualité de la.. précision fournie par l'outil de calcul dont on se sert, et en distinguant valeurs réelles des valeurs approchées (notée ici pas très heureusement (!) avec une barre..).

Méthode du point fixe : on pose : $\varphi(t) = t + \frac{r(t)}{M_0}$. La fonction φ est définie et de classe C^∞ sur $[0 \frac{\pi}{\ln 3}]$. Le point x_* cherché est un zéro de f donc un point fixe de φ. Comme $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ l'algorithme proposé n'est autre que celui, classique, du point fixe.

Je vous laisse vérifier qu'on peut appliquer cette méthode sur tout intervalle $[\alpha, \frac{\pi}{\ln 3}]$ inclus dans $[0, \frac{\pi}{\ln 3}]$.

B.2. — <u>B.2.a.</u> On montre que $r\left(\frac{2k\pi \ln 2}{\ln 3}\right)$ est strictement positif pour tout k appartenant à $\mathbb{Z}$ (Calcul simple). De même, on montre que : $\forall k \in \mathbb{Z}$ $r\left(\frac{(2k+1)\pi \ln 2}{\ln 3}\right) < 0$. Pour ce dernier, on fait intervenir l'irrationnalité de $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ pour remarquer : $\cos\frac{(2k+1)\pi \ln 2}{\ln 3} \neq 1$. Le Théorème des valeurs intermédiaires permet d'en déduire que la fonction r s'annule au moins une fois sur chacun des intervalles disjoints $\left]\frac{k\pi}{\ln 3}, \frac{(k+1)\pi}{\ln 3}\right[$, k décrivant $\mathbb{Z}$.

— <u>B.2.b.</u> ▪ Supposons d'abord qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $r^{(n)}(x_0) = 0$. On a en particulier pour tout $p \in \mathbb{N}$, $r^{(4p)}(x_0) = 0$ et $r^{(4p+1)}(x_0) = 0$. Soit :

$$\begin{cases} 2(\ln 2)^{4p}\cos(x_0 \ln 2) + 3(\ln 3)^{4p}\cos x_0 \ln 3 = 0 \\ -2(\ln 2)^{4p+1}\sin(x_0 \ln 2) - 3(\ln 3)^{4p+1}\sin x_0 \ln 3 = 0 \end{cases}$$

d'où :

$$\sin(x_0 \ln 2) = -\tfrac{3}{2}(\ln 3/\ln 2)^{4p+1}\sin(x_0 \ln 3) \quad (\text{pour tout } p \in \mathbb{N}^*).$$

Cette équation entraîne $\sin(x_0 \ln 3) = 0$, et de manière analogue on obtient $\cos(x_0 \ln 3) = 0$. Ce qui est absurde.

▪ Dire qu'un zéro $\tilde{x}$ de r est isolé, c'est dire qu'il existe un intervalle $I =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, $(\varepsilon > 0)$ tel que : $\forall x \in I \setminus \{\tilde{x}\}$ $r(x) \neq 0$. A l'inverse, dire que $\tilde{x}$ est un zéro non isolé de r, c'est dire que : $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\setminus \{\tilde{x}\}$ $r(x) = 0$. On en déduit qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

1°) $\forall n \in \mathbb{N}$ $r(x_n) = 0$ 2°) $\lim_{n \to +\infty} x_n = \tilde{x}$.

Soit alors $n \in \mathbb{N}$, comme $r(x_n) = r(\tilde{x}) = 0$, il existe un réel x_n^1 strictement compris entre x_n et $\tilde{x}$ tel que $r'(x_n^1) = 0$, d'après le théorème de Rolle. On dispose alors d'une suite $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : 1°) $\lim_{n \to +\infty} x_n^1 = \tilde{x}$ 2°) $\forall n \in \mathbb{N}$ $r'(x_n^1) = 0$.

On commence à voir le procédé : On bâtit par récurrence une famille de suites $(x_n^p)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant chacune :

1°) $\lim_{n \to +\infty} x_n^p = \tilde{x}$ 2°) $\forall n \in \mathbb{N}$ $r^{(p)}(x_n^{(p)}) = 0$.

<u>B.2.b. (Suite)</u> Comme la fonction r est de classe C^∞, chacune de ses dérivées est continue et les 1°) et 2°) qui précèdent entraînent $\forall p \in \mathbb{N}$. $0 = \lim_{n \to +\infty} r(x_n^p) = r(\lim_{n \to +\infty} x_n^p) = r^{(p)}(\tilde{x})$.

On a donc : $\forall p \in \mathbb{N}$ $r^{(p)}(\tilde{x}) = 0$. On a montré ci-dessus qu'un tel $\tilde{x}$ ne pouvait exister : tout zéro de r est donc isolé.

— <u>B.2.c.</u> C'est un raisonnement classique. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et l'intervalle $I_k = \left[\frac{k\pi}{\ln 3}, \frac{(k+1)\pi}{\ln 3}\right]$. On montre que r ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I_k. Sinon, il existerait une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de zéros de r habitant I_k, <u>2 à 2 distincts</u>. L'intervalle I_k étant compact cette suite possède une valeur d'adhérence $\tilde{x} \in I_k$. C'est-à-dire qu'il existe une sous suite $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} = (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers $\tilde{x}$. Le réel $\tilde{x}$ apparaît alors comme un zéro non isolé de r ce qui contredit <u>B.2.b</u>.

L'ensemble des zéros de r est la réunion <u>dénombrable</u> des ensembles $Z_k = \{x \in I_k, r(x) = 0\}$. Comme chaque ensemble Z_k est <u>non vide</u>, d'après <u>B.2.a.</u>, et de cardinal <u>fini</u> d'après le raisonnement ci-dessus la réunion des Z_k est <u>exactement</u> dénombrable.

<u>Remarque – Hors programme</u>. La fonction r définie à l'aide du cosinus possède un prolongement analytique $\tilde{r}$ au corps $\mathbb{C}$ (qui coïncide avec r sur l'axe réel). (Ceci parce que la série entière définissant le cosinus a un rayon de convergence infini). Ce prolongement $\tilde{r}$ est une fonction analytique non nulle dont une des propriétés est précisément que les zéros sont isolés : sur tout compact une telle fonction ne s'annule qu'un nombre fini de fois. Comme $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable de compact, la fonction r ne s'annule que sur un ensemble au plus dénombrable.

IV Droites séparatrices d'arc de C_N

IV.1.a. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels. La suite $(\exp(2i\pi u_n \xi))_{n\in\mathbb{N}}$ à termes complexes appartient à $\Gamma(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Comme $\Gamma(0,1)$ est compact, la suite $(\exp(2i\pi u_n \xi))_{n\in\mathbb{N}}$ possède une valeur d'adhérence : il existe une suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$, extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (on a : $v_k = u_{n_k}$) tel que la suite $(\exp(2i\pi v_k \xi))_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

IV.1.b. ▪ Soit $\mathcal{S}_N$ la propriété : pour tout n-uplet $(\xi_1, \dots, \xi_N)$ de réels et toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe une suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que les N suites $(\exp 2i\pi v_k \xi_J)_{k\in\mathbb{N}}$ $(1 \le J \le N)$ convergent. On va démontrer $\mathcal{S}_N$ par récurrence.

•) $\mathcal{S}_1$ est vraie d'après IV 1.a.

•) On suppose $\mathcal{S}_N$ vraie (pour $N \ge 1$) et on va démontrer $\mathcal{S}_{N+1}$. Soient $\xi_1, \dots \xi_N, \xi_{N+1}$ $(N+1)$ points et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. D'après l'hypothèse de récurrence il existe $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour $J \in \{1, 2, \dots, n\}$ les suites $(\exp(2i\pi v_k \xi_J))_k$ convergent. D'après IV.1.a. il existe $(w_p)_{p\in\mathbb{N}}$ extraite de $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $(\exp(2i\pi w_p \xi_{N+1}))_{p\in\mathbb{N}}$ converge. Alors les $N+1$ suites $(\exp(2i\pi w_p \xi_J))_{p\in\mathbb{N}}$ $(1 \le J \le N+1)$ convergent.

▪ On reprend les notations du texte et on fixe $J \in \{1, 2, \dots, N\}$. La convergence de la suite $(\exp(2i\pi v_k \xi_J))_{k\ge 0}$ entraîne celle de la suite $(w_k)_{k\ge 0}$ définie par : $w_k = \exp(2i\pi v_{k+1} \xi_J) - \exp(2i\pi v_k \xi_J)$ converge vers 0. Ce qui entraîne que $(|w_k|^2)_{k\ge 0}$ converge vers 0. Or pour $k \in \mathbb{N}$:

$$|w_k|^2 = |\exp(2i\pi v_{k+1} \xi_J) - \exp(2i\pi v_k \xi_J)|^2$$
$$= |\exp(2i\pi v_k \xi_J)|^2 \, |\exp(2i\pi \xi_J (v_{k+1} - v_k)) - 1|^2.$$
$$\dots\dots = 2 - 2\cos(2\pi (v_{k+1} - v_k)\xi_J).$$

Comme $\lim_{k\to+\infty} |w_k|^2 = 0$, il vient $\lim_{k\to+\infty} \cos(2\pi(v_{k+1} - v_k)\xi_J) = 1$

IV.2. On rappelle que $R_N(x,y)$ peut s'écrire :

$$R_N(x,y) = 1 + \sum_{2 \le j \le N} j^y \cos(x \ln j).$$

On va construire une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de la forme $x_k = v_{k+1} - v_k$, avec $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

- $\lim_{k\to+\infty} (v_{k+1} - v_k) = +\infty$
- $\cos(v_{k+1} - v_k)\ln j > 0$, pour $j \in \{1, 2, \dots N\}$

En application de IV.1.b. le choix de ξ_J est imposé par : $2\pi(v_{k+1} - v_k)\xi_j = (v_{k+1} - v_k)\ln j$, soit $\xi_j = \frac{\ln j}{2\pi}$

On considère alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$; $\forall n \ge 0$ $u_{n+1} = u_n + n$.

D'après IV.1.b., il existe une suite extraite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $J \in \{1, 2, \dots N\}$ on ait
$$\lim_{k\to+\infty} (\cos 2\pi(v_{k+1} - v_k)\xi_j) = \lim_{k\to+\infty} \cos(v_{k+1} - v_k)\ln j = 1$$
Il existe donc un rang k_0 tel que
$$\forall j \in \{1, 2, \dots, N\} \quad \forall k \ge k_0 \quad \cos(v_{k+1} - v_k)\ln j > 0 \quad (*)$$
D'après la définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $(v_{k+1} - v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. On définit alors $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par :
$$\forall k \ge 0, \ x_k = v_{k+k_0+1} - v_{k+k_0}$$
Cette suite satisfait aux conditions imposées :

- On a en effet $\lim_{k\to+\infty} x_k = +\infty$
- Puis selon $(*)$, on a $\forall j \in \{1, 2, \dots N\}$ $\cos x_k \ln j > 0$

Comme : $\forall y \in \mathbb{R}$ $j^y > 0$, on a bien $R_N(x_k, y) > 0$, pour tout $y \in \mathbb{R}$.

IV.3. ▪ Remarque : Considérons la famille de droites $(D_k)_{k\ge 0}$ d'équation : $D_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ x = x_k\}$, où $(x_k)_{k\ge 0}$ est une suite comme dans IV.2. Comme :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \forall y \in \mathbb{R}, \ R_N(x_k, y) > 0,$$
une droite de la famille $(D_k)_{k\ge 0}$ ne rencontre pas la courbe C_N.

▪ On rappelle que $R_2(x,y) = 1 + 2^y \cos(x \ln 2)$ il suffit ici de considérer $x_k = \frac{2k\pi}{\ln 2}$ et les droites d'équations $x = x_k$ constituent une famille de droites séparatrices d'arc de C_2

V Asymptotes de C_N et de C'_N.

V.1. ▪ On a pour $N \geq 2$ $\quad S_N = \sum_{2 \leq n \leq N} n^{y_0} \leq 2^{y_0} + S'_N$,
avec $S'_N = \sum_{3 \leq n \leq N} n^{y_0}$

Or la fonction φ définie sur $[2, +\infty[$ par $\varphi(x) = x^{y_0}$ est décroissante (car y_0 est négatif), et de classe C^∞.

Il en résulte que :

$$S'_N = \sum_{3 \leq n \leq N} n^{y_0} = \sum_{3 \leq n \leq N} \varphi(n) \leq \int_2^N \varphi(x)dx$$

Or $\int_2^N \varphi(x)dx = \left[\frac{1}{y_0+1} x^{y_0+1}\right]_2^N = \frac{1}{y_0+1}(N^{y_0+1} - 2^{y_0+1})$

D'où $\quad S_N \leq 2^{y_0} + \frac{1}{(y_0+1)}(N^{y_0+1} - 2^{y_0+1})$

▪ Comme $y_0 \leq -2$ on a $2^{y_0} \leq \frac{1}{4}$. Puis :

$\frac{1}{(y_0+1)}(N^{y_0+1} - 2^{y_0+1}) = \left(-\frac{1}{y_0+1}\right)(2^{y_0+1} - N^{y_0+1})$

De $y_0 \leq -2$, il vient en quelques étapes $0 \leq -\frac{1}{y_0+1} \leq 1$ et $2^{y_0+1} \leq \frac{1}{2}$

d'où : $\left(-\frac{1}{y_0+1}\right)(2^{y_0+1} - N^{y_0+1}) \leq \frac{1}{2}$. On a donc bien :

$$S_N \leq \frac{3}{4}.$$

▪ On rappelle que $R_N(x, y_0) = 1 + \sum_{2 \leq n \leq N} n^{y_0} \cos(x \ln n)$

Comme : $\forall \theta \in \mathbb{R}$ $\cos\theta \geq -1$, il vient $R_N(x, y_0) \geq 1 - \sum_{2 \leq n \leq N} n^{y_0}$

Avec la majoration : $\sum_{2 \leq n \leq N} n^{y_0} \leq \frac{3}{4}$, on obtient $R_N(x, y_0) \geq \frac{1}{4}$, pour tout x réel.

▪ On en déduit qu'aucun point de C_N a une ordonnée inférieure à -2, puisque : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall y_0 \leq -2$ $R_N(x, y_0) > 0$.
Donc C_N est incluse dans le demi-plan $\{(x,y), y > -2\}$.

V.2. ▪ __Remarque__ : l'hypothèse faite revient à supposer qu'il existe une fonction φ paramétrant (localement) un arc de C_N.

▪ On a les équivalences, pour $x \in]a, b[$

$$R_N(x, \varphi(x)) = 0 \iff \sum_{1 \leq m \leq N} m^{\varphi(x)} \cos(x \ln m) = 0$$

$$\iff N^{\varphi(x)} \cos x \ln N = -\sum_{1 \leq m \leq N-1} m^{\varphi(x)} \cos x \ln m$$

(on met en évidence le terme qui nous intéresse)

D'où, $\forall x \in]a, b[$ $\quad \cos x \ln N = -\sum_{1 \leq m \leq N-1} \left(\frac{m}{N}\right)^{\varphi(x)} \cos x \ln m$

On obtient donc : $\forall x \in]a, b[$ $\quad |\cos x \ln N| \leq \sum_{1 \leq m \leq N-1} \left(\frac{m}{N}\right)^{\varphi(x)}$

Comme pour tout $m \in \{1, 2, .. N-1\}$ $\frac{m}{N} < 1$, l'hypothèse $\lim_{x \to a^+} \varphi(x) = -\infty$ entraîne que $\lim_{x \to a^+} \cos x \ln N = 0$. La fonction $x \mapsto \cos x \ln N$ étant continue sur $\mathbb{R}$ il vient $\cos a \ln N = 0$.
D'où l'existence de $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a \ln N = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, ou encore $a = (2k+1)\pi / (2 \ln N)$.

▪ Un raisonnement analogue montre l'existence de $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $\quad b = (2\ell+1)\pi / (2 \ln N)$.

V.3. les raisonnements sont analogues à ceux du **V.2.**

V.3.a. On rappelle que $I_N(x, y) = \sum_{1 \leq m \leq N} m^y \sin(x \ln m)$.

On a l'équivalence :

$\forall x \in]c, d[$, $R_N(x, \varphi(x)) = 0 \iff \sin x \ln N = -\sum_{m=2}^{N-1} \left(\frac{m}{N}\right)^{\varphi(x)} \sin(x \ln \varphi(x))$.

On en déduit que : $\forall x \in]c, d[$ $\quad |\sin x \ln N| \leq \sum_{m=2}^{N-1} \left(\frac{m}{N}\right)^{\varphi(x)}$

De l'hypothèse $\lim_{x \to c^+} \varphi(x) = +\infty$ il vient comme ci-dessus $\lim_{x \to c^+} (\sin(x \ln N)) = 0$ et par continuité de $x \mapsto \sin(x \ln N)$ l'égalité $\sin c \ln N = 0$: il existe alors $k \in \mathbb{Z}$ tel que $c = k\pi / \ln N$.

V.3.b. ▪ Si $\lim_{x \to d^-} \varphi(x) = +\infty$ le même raisonnement qu'en **V.3.a.** conduit à $\sin d \ln N = 0$: il existe alors $k \in \mathbb{Z}$ tel que $d = k\pi / \ln N$.

▪ Si $\lim_{x \to d^-} \varphi(x) = -\infty$, on écrit :

$\forall x \in]c, d[$ $\quad R_N(x, \varphi(x)) = 0 \iff \sin x \ln 2 = -\sum_{m=3}^{N} \left(\frac{m}{2}\right)^{\varphi(x)} \sin(x \ln \varphi(x))$

On a la majoration :

$$|\sin x \ln 2| \leq \sum_{m=3}^{N} \left(\frac{m}{2}\right)^{\varphi(x)}$$

Comme $m/2 > 1$, pour $m \in \{3, .. N\}$ et $\lim_{x \to d^-} \varphi(x) = -\infty$ il vient $\lim_{x \to d^-} (\sin x \ln 2) = 0$. d'où l'on déduit comme ci dessus $\sin d \ln 2 = 0$, puis l'existence de k tel que :

$$d = k\pi / \ln 2.$$

V.4 ▪ __Dans la partie I__, on détermine les valeurs de a et b, pour le cas $N = 2$ (resp $\frac{(1+4k)\pi}{2 \ln 2}$ et $\frac{(3+4k)\pi}{2 \ln 2}$) et on détermine explicitement φ : dans le cas $k = 0$ est φ est la fonction $-f$.

▪ __Dans la partie II__ On rencontre pour $N = 3$ les 2 cas évoqués en **V.3** avec d'une part $c = \pi / \ln 3$ $d = \pi / \ln 2$ et d'autre part $c = 2\pi / \ln 3$ et $d = 3\pi / \ln 3$

SESSION DE 1992

concours externe de recrutement de professeurs certifiés

section : mathématiques

deuxième composition de mathématiques

Durée : 5 heures

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche — éventuellement programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Tournez la page S.V.P.

Notations et objectifs du problème

Le plan affine euclidien orienté, noté $\mathcal{P}$, est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}$ d'origine O. A tout point M de coordonnées (x,y) dans $\mathcal{R}$ on associe son affixe $z = x+iy$; ceci permet d'identifier le plan à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Un point entier du plan est un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs. L'ensemble de tous les points entiers est appelé réseau. Le réseau s'identifie à la partie de $\mathbb{C}$, notée $\mathbb{Z}[i]$ et définie par: $\mathbb{Z}[i] = \{a+ib \ ; \ (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \}$.

L'objectif général du problème réside en la recherche et l'étude de configurations planes soumises à des conditions mettant en jeu les entiers:

Thème A: recherche des polygones réguliers dont les sommets appartiennent au réseau;

Thème B: recherche et étude de parties du plan dont les distances mutuelles entre les points sont des entiers;

Thème C: recherche et étude de configurations contenant un nombre fixé de points du réseau.

Les notations et objectifs spécifiques à chaque thème sont précisés en en-tête de chacun d'eux. Les thèmes B et C sont indépendants et peuvent être abordés dans n'importe quel ordre. Ils dépendent de la question préliminaire du thème A.

Thème A: **Polygones réguliers à sommets entiers**

On se propose de démontrer que les seuls polygones réguliers convexes à sommets entiers sont les carrés. Pour ceci, on établit d'abord un résultat préliminaire qui sera utilisé à nouveau dans le thème B et le thème C. Dans tout ce thème A, les coordonnées des points sont définies dans $\mathcal{R}$.

A.I Question préliminaire

A.I.1 Soit θ un nombre réel, et n un entier supérieur ou égal à 1.Montrer que:

$$\cos (n+1)\theta = 2\cos \theta . \cos n\theta - \cos (n-1)\theta.$$

A.I.2 En déduire qu'il existe une suite $(P_n)_{n\geq 1}$ de polynômes tels que, pour tout n,élément de $\mathbb{N}^*$, P_n vérifie les propriétés suivantes:

- P_n est un polynôme de degré n à coefficients entiers, et unitaire (c'est-à-dire tel que le coefficient de X^n soit égal à 1).
- pour tout réel θ, $P_n(2 \cos \theta) = 2 \cos n\theta$.

A.I.3 Soit θ un nombre réel tel que $\frac{\theta}{\pi}$ soit rationnel.Montrer que 2 cos θ est solution d'une équation de la forme

$$X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \qquad (1)$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour $0 \leq i \leq n-1$, $a_i \in \mathbb{Z}$.

A.I.4 Soit θ un nombre réel. On suppose que $\frac{\theta}{\pi}$ et cos θ sont rationnels.

Montrer que $\cos \theta \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$.

(On pourra commencer par montrer que toute solution rationnelle de l'équation (1) est un entier relatif) .

Tournez la page S.V.P.

A.II Application aux polygones réguliers à sommets entiers

Dans cette partie n désigne un entier supérieur ou égal à 3.On rappelle qu'une suite $(A_1, \dots, A_n)$ de n points distincts du plan définit un polygone régulier convexe P ayant pour sommets ces n points s'il existe une rotation r d'angle $\frac{2\pi}{n}$, ou $-\frac{2\pi}{n}$, telle que $r(A_i) = A_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq n-1$, et $r(A_n) = A_1$. On sait qu'une telle rotation est unique. On convient d'écrire $P = (A_1, \dots, A_n)$. Le centre Ω de la rotation r s'appelle le centre de P.

A.II.1 Soit $P = (A_1, \dots, A_n)$ un polygone régulier convexe dont les n sommets sont des points entiers. Soit Ω son centre.

a) Montrer que Ω est l'isobarycentre de l'ensemble des sommets de P, et en déduire que Ω est à coordonnées rationnelles.

b) En notant ω l'affixe de Ω, rappeler la représentation analytique de la rotation r de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{n}$, ou $-\frac{2\pi}{n}$, au moyen des affixes.

c) En écrivant que $r(A_1) = A_2$, montrer que $\cos\frac{2\pi}{n}$ et $\sin\frac{2\pi}{n}$ sont rationnels. En déduire, au moyen de A.I.4, que n = 4, c'est-à-dire que P est un carré.

A.II.2. Soient A_1 et A_2 deux points entiers distincts. Montrer que les deux carrés $C = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ et $C' = (A_1, A_2, A'_3, A'_4)$ admettant A_1 et A_2 comme sommets consécutifs ont tous leurs sommets entiers. Préciser les coordonnées dans $\mathcal{R}$ de A_3, A_4, A'_3, A'_4 en fonction des coordonnées (x_1, y_1) de A_1 et (x_2, y_2) de A_2.

Thème B: Ensembles à distances entières

Un sous-ensemble non vide E de points du plan est appelé ensemble à distances entières lorsque, pour tous points A et B appartenant à E, la distance AB est un nombre entier. La partie B.I étudie quelques exemples. La partie B.II établit qu'un ensemble infini à distances entières est nécessairement contenu dans une droite. Par contre, dans la partie B.III, on montre que, pour tout entier n ($n \geq 3$), il existe un ensemble à distances entières constitué de n points tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés.

B.I Etude de quelques exemples

B.I.1 Les sommets d'un carré, d'un rectangle , d'un losange peuvent-ils former un ensemble à distances entières?

B.I.2 Soit ABC un triangle équilatéral de côté 112.

a) Justifier l'existence et l'unicité du point D défini par les conditions suivantes: AD = 73, BD = 57, D et C sont d'un même côté de la droite (AB).

b) Calculer les coordonnées x et y de D dans le repère $\mathcal{R}' = (O', \vec{i}, \vec{j})$ où O' est le milieu de [AB], $\vec{i} = \frac{\overrightarrow{O'A}}{\|\overrightarrow{O'A}\|}$, $\vec{j} = \frac{\overrightarrow{O'C}}{\|\overrightarrow{O'C}\|}$. On observera que x est rationnel et on l'écrira sous forme d'une fraction irréductible. On observera également que $y = y_1\sqrt{3}$ où y_1 est un nombre rationnel qu'on écrira sous forme d'une fraction irréductible.

c) Montrer que E = {A , B , C , D} est un ensemble à distances entières.

B.II Ensembles infinis à distances entières

B.II.1 Soit H une hyperbole et $\mathcal{R}''$ un repère cartésien du plan dans lequel H a pour équation,

$$xy = 1.$$

Soit Γ une courbe du plan, d'équation, dans $\mathcal{R}''$,

$$a x^2 + b xy + c y^2 + d x + e y + f = 0,$$

où a , b , c , d , e ne sont pas tous nuls.
Montrer que, si $\Gamma \cap H$ est infini, alors $\Gamma = H$ et donner un majorant du nombre de points de $\Gamma \cap H$ lorsque $\Gamma \neq H$.

B.II.2 Soit E un ensemble à distances entières contenant trois points A, B, C non alignés. On pose $p = AB$, $q = AC$ et, pour $j \in \{0, ..., p\}$ et $k \in \{0, ..., q\}$,

$$U_j = \{M \in \mathcal{P} ; \ |MA-MB| = j\} \text{ et } V_k = \{M \in \mathcal{P} ; \ |MA-MC| = k\}.$$

a) Préciser la nature géométrique des ensembles U_j et V_k pour $j \in \{0, ..., p\}$ et $k \in \{0, ..., q\}$. On distinguera les cas $j = 0$ et $j = p$ (resp. $k = 0$ et $k = q$) des cas $0 < j < p$ (resp. $0 < k < q$).

b) Déduire de B.II.1 que, quelque soit $j \in \{0, ..., p\}$ et $k \in \{0, ..., q\}$, $U_j \cap V_k$ est une partie finie (éventuellement vide) du plan.

c) Démontrer que $E \subset \bigcup_{0 \leq j \leq p} U_j$, et $E \subset \bigcup_{0 \leq k \leq q} V_k$, et en déduire que E est fini.

B.II.3 Etant donné un point A et un vecteur $\vec{v}$, on note $E_{A,\vec{v}}$ l'ensemble de tous les points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} = x\,\vec{v}$ avec $x \in \mathbb{Z}$.
Soit E une partie infinie du plan. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:

(*) E est à distances entières;

(**) Il existe un point A et un vecteur $\vec{v}$ de norme 1 tels que $E \subset E_{A,\vec{v}}$.

B.III Ensembles finis à distances entières

Soit ϕ le nombre réel défini par $\cos \phi = \frac{4}{5}$, $0 < \phi < \pi$. Pour tout entier naturel p, on note M_p le point d'affixe $e^{2ip\phi}$.

B.III.1 Montrer que les points M_p, p appartenant à $\mathbb{N}$, sont deux à deux distincts.

B.III 2 Soient p et q deux entiers naturels. Prouver que la distance M_pM_q est égale à $2\,|\sin (p-q)\phi\,|$. En déduire que M_pM_q est un nombre rationnel.

B.III.3 Soit un entier n supérieur ou égal à 3. Montrer qu'il existe un ensemble à distances entières, constitué de n points, et contenu dans un cercle de centre O.

Thème C: **Configurations contenant un nombre fixé de points du réseau**

Après l'étude de quelques exemples (partie C.I), on se propose d'établir que, pour chaque entier n, n appartenant à $\mathbb{N}^*$, il existe:
- un cercle à l'intérieur duquel se trouvent exactement n points du réseau (partie C.II);
- un carré à l'intérieur duquel se trouvent exactement n points du réseau (partie C.III);

Tournez la page S.V.P.

- un cercle passant par exactement n points du réseau (partie C.IV).
Dans tout ce thème C, sauf mention expresse du contraire, les coordonnées sont définies dans le repère $\mathcal{R}$.

C.I Etude de quelques exemples

C.I.1 Construire, sans justification, mais en précisant les coordonnées de leurs centres et leurs rayons, quatre cercles C_1, C_2, C_3 et C_4 tels que, pour chaque $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, il existe exactement j points du réseau à l'intérieur de C_j.

C.I.2 Soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$. Donner, sans justification, les coordonnées des sommets d'un carré à l'intérieur duquel se trouvent exactement n^2 points du réseau.

C.II Cercle à l'intérieur duquel se trouvent n points du réseau

C.II.1 Classification des points du réseau

a) Soit B une partie bornée du plan. Montrer que B ne contient qu'un nombre fini de points du réseau.

b) On note A le point de coordonnées $(\sqrt{2}, \frac{1}{3})$. Montrer qu'il n'existe pas deux points du réseau à la même distance de A.
En déduire qu'on peut classer les points du réseau en une suite $(M_n)_{n\geq 1}$ telle que $AM_n < AM_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

C.II.2 Application

Etant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, déduire de C.II.1.b qu'il existe un cercle à l'intérieur duquel se trouvent exactement n points du réseau.

C.III Carré à l'intérieur duquel se trouvent n points du réseau

C.III.1 Définition d'une fonction sur le réseau

Soit D_1 la droite d'équation $x + y\sqrt{3} - \frac{1}{3} = 0$ et D_2 la droite d'équation $x\sqrt{3} - y - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$.

a) Montrer que D_1 et D_2 sont perpendiculaires, préciser les coordonnées de leur point d'intersection Ω, et représenter graphiquement ces deux droites.

b) On pose $X = \frac{1}{2}(x\sqrt{3} - y - \frac{1}{\sqrt{3}})$, $Y = \frac{1}{2}(x + y\sqrt{3} - \frac{1}{3})$. Montrer qu'on définit ainsi un changement de repère orthonormé direct dans lequel les nouveaux axes sont portés respectivement par D_1 et D_2

Soit M un point du plan. On note (x, y) ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ et (X, Y) ses coordonnées dans le repère précédent et on pose

$$f(M) = |X| + |Y| = \frac{1}{2}\left|x\sqrt{3} - y - \frac{1}{\sqrt{3}}\right| + \frac{1}{2}\left|x + y\sqrt{3} - \frac{1}{3}\right|.$$

C.III.2 Injectivité de la fonction f

On considère deux points M_1 et M_2 du réseau, de coordonnées respectives (x_1, y_1), (x_2, y_2) dans $\mathcal{R}$, tels que $f(M_1) = f(M_2)$.

a) Montrer qu'il existe quatre nombres réels α, β, γ, δ vérifiant $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \delta^2 = 1$ et tels que $\alpha x_1 + \beta y_1 - \gamma x_2 - \delta y_2 + \frac{\gamma - \alpha}{3} = 0$, $\beta x_1 - \alpha y_1 - \delta x_2 + \gamma y_2 + \frac{\delta - \beta}{3} = 0$.(On pourra observer que, pour tout réel x, on a $|x| = \lambda x$ avec $\lambda^2 = 1$)

b) En déduire que $M_1 = M_2$.(On pourra commencer par montrer que $\gamma - \alpha = \delta - \beta = 0$)

C.III.3 Nouvelle classification des points du réseau

Montrer, en utilisant la même méthode qu'en C.II.1, que l'on peut classer les points du réseau en une suite $(N_n)_{n\geq 1}$ telle que $f(N_n) < f(N_{n+1})$ pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$.

C.III.4 Soit un réel a strictement positif. Montrer que l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (X, Y) vérifient $|X| + |Y| < a$ est l'intérieur d'un carré C_a dont on précisera les sommets.
En déduire que pour tout entier n appartenant à $\mathbb{N}^*$, il existe un carré C_a dont l'intérieur contient exactement n points du réseau.

C.IV Cercle passant par n points du réseau

C.IV.1 Nombre de solutions entières de l'équation $x^2 + y^2 = 5^n$

Soit un entier n appartenant à $\mathbb{N}$. On lui associe les deux ensembles suivants:

$\mathscr{E}_n = \{(x, y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} ; x^2 + y^2 = 5^n\}$
$E_n = \{z \in \mathbb{Z}[i] ; |z|^2 = 5^n\}$

a) Montrer que $\mathscr{E}_n$ et E_n sont des ensembles finis de même cardinal.

b) Déterminer E_0.

Pour tout élément ω de E_0 et tout entier p tel que $0 \leq p \leq n$, on pose

$$Z_{\omega,p} = \omega (2 + i)^p (2 - i)^{n-p}.$$

c) Prouver que $Z_{\omega,p}$ appartient à E_n et que l'application $(\omega, p) \to Z_{\omega,p}$, de $E_0\times\{0, ..., n\}$ dans E_n, est injective.(On pourra montrer que, si $Z_{\omega,p} = Z_{\omega',q}$ avec ω et ω' éléments de E_0 et p et q entiers inférieurs ou égaux à n, alors $\left(\frac{2 + i}{2 - i}\right)^{4(p-q)} = 1$ et utiliser A.I.4)

d) Soit $z = x + iy$ un élément de E_n, avec $n \geq 1$. Montrer que (x, y) vérifie l'un des systèmes de relations suivants:

(1) $\begin{cases} 2x - y \equiv 0 \pmod 5 \\ x + 2y \equiv 0 \pmod 5 \end{cases}$ ou (2) $\begin{cases} 2x + y \equiv 0 \pmod 5 \\ -x + 2y \equiv 0 \pmod 5 \end{cases}$

En déduire que l'un des deux nombres $\frac{z}{2 + i}$ ou $\frac{z}{2 - i}$ appartient à E_{n-1}.

e) Prouver que l'application $(\omega, p) \to Z_{\omega,p}$, de $E_0\times\{0, ..., n\}$ dans E_n, est bijective. En déduire le nombre d'éléments de $\mathscr{E}_n$.

Tournez la page S.V.P.

C.IV.2 Cercle passant par un nombre pair de points du réseau

a) On pose, pour chaque entier n appartenant à $\mathbb{N}^*$, $A_n = \{(x, y) \in \mathscr{E}_n \text{ ; x pair et y impair }\}$ et $B_n = \{(x, y) \in \mathscr{E}_n \text{ ; x impair et y pair }\}$.
Montrer que A_n et B_n ont le même cardinal et que $\mathscr{E}_n = A_n \cup B_n$ et $A_n \cap B_n = \emptyset$.
b) Soit un entier k de $\mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de points du réseau appartenant au cercle de centre le point de coordonnées $(\frac{1}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}.5^{\frac{k-1}{2}}$.

C.IV.3 Cercle passant par un nombre impair de points du réseau

Soient un entier k de $\mathbb{N}^*$ et Γ_k le cercle de centre le point de coordonnées $(\frac{1}{3}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{3}.5^k$.

a) Montrer que le nombre de points du réseau appartenant à Γ_k est égal au cardinal de l'ensemble F_k défini par $F_k = \{z = x + iy \text{ ; } z \in E_{2k}, x \equiv -1 \pmod 3, y \equiv 0 \pmod 3\}$.

Les questions b, c et d ont pour objet de calculer le cardinal de F_k.

b) Montrer que quels que soient $\omega \in E_0$ et $z \in E_{2k}$, ωz et $\omega \bar{z}$ appartiennent à E_{2k}. Prouver alors que la relation (R), définie sur E_{2k} par:
"Pour z et z' dans E_{2k}, on a z(R)z' si, et seulement si, il existe $\omega \in E_0$ tel que $z' = \omega z$ ou tel que $z' = \omega \bar{z}$ "
est une relation d'équivalence sur E_{2k}.

On désigne par (R)(z) la classe d'équivalence d'un élément z de E_{2k}.

c) Soit $z = x + iy$ un élément de E_{2k}.
- On suppose $xy \neq 0$. Expliciter les éléments de (R)(z) en fonction de x et de y et montrer que $(R)(z) \cap F_k$ possède deux éléments.
- On suppose $xy = 0$. Expliciter les éléments de (R)(z) et montrer que $(R)(z) \cap F_k$ possède un élément.

d) En déduire que F_k possède 2k+1 éléments.

CAPES externe de Mathématiques
session 1992

seconde composition

solution proposée par Dany-Jack Mercier

dany-jack.mercier@hotmail.fr

NB : Le sujet de l'épreuve n'est pas joint à ce document. Il pourra être téléchargé sur le site Megamaths.

[0] [ag15e] v1.00

CAPES 92 (2^e composition)

Solution proposée par Dany-Jack MERCIER

A.I.1 provient de $\cos\theta.\cos n\theta = \frac{1}{2}(\cos(\theta+n\theta)+\cos(\theta-n\theta))$

A.I.2 Soit l'hypothèse récurrente au rang n :

"Il existe un polynôme P_n de $\mathbb{Z}[X]$, de degré n et unitaire, tel que pour tout réel θ : $P_n(2\cos\theta) = 2\cos n\theta$ "

Cette hypothèse est triviale au rang $n=1$ ou 2 (avec $P_1(X)=X$ et $P_2(X)=X^2-2$), et si elle est vraie jusqu'au rang n, cherchons P_{n+1} tel que :

$$P_{n+1}(2\cos\theta) = 2\cos(n+1)\theta = 4\cos\theta.\cos n\theta - 2\cos(n-1)\theta$$
$$= 2\cos\theta.\underbrace{2\cos n\theta}_{P_n(2\cos\theta)} - \underbrace{2\cos(n-1)\theta}_{P_{n-1}(2\cos\theta) \text{ si } n\geq 2}$$

Il suffit de poser $P_{n+1}(X) = XP_n(X) - P_{n-1}(X)$ si $n\geq 2$ et $P_2(X) = XP_1(X)-2$ si $n=2$ pour constater que la récurrence aboutit.

A.I.3 On a : $P_n(2\cos\theta) - 2\cos n\theta = 0$

Si $\frac{\theta}{\pi}\in\mathbb{Q}$, posons $\frac{\theta}{\pi} = \frac{a}{b}$ où $a,b\in\mathbb{Z}$ et choisissons $n=2b$.

$$n\theta = 2b.\frac{a}{b}\pi = a2\pi \Rightarrow \cos n\theta = 1 \Rightarrow P_n(2\cos\theta)-2=0$$

Le polynôme $P_n(X)-2$ est de la forme (1) et admet $2\cos\theta$ comme racine.

A.I.4

Lemme : Toute solution rationnelle de (1) est un entier relatif.

preuve : Si $r=\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ est solution de (1), avec $a\wedge b=1$,

$$a^n + a_{n-1}a^{n-1}b + \dots + a_1ab^{n-1} + a_0b^n = 0$$
$$a^n = b(-a_{n-1}a^{n-1} - \dots - a_1ab^{n-1} - a_0b^n)$$

montre que b divise a^n. a et b étant premiers entre eux, b divisera a (Gauss) donc $b=\pm 1$. On aura bien $r\in\mathbb{Z}$. CQFD

* Soient $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$ et $\cos\theta \in \mathbb{Q}$. (A.I.3) montre que $2\cos\theta$ sera solution (rationnelle) de (1) et le lemme précédent entraine :

$$2\cos\theta \in \mathbb{Z}$$

Comme $|2\cos\theta| \leq 2$, il y aura 5 possibilités pour $\cos\theta$:

$$\cos\theta \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$$

A.II.1.a

* L'ensemble $\{A_1, \dots, A_n\}$ est globalement conservé par la rotation r, donc l'isobarycentre G sera invariant par r (r, affine, conserve bien les barycentres).

Le seul point invariant de r étant son centre Ω, on constate : $G = \Omega$.

* L'affixe ω de Ω est donc :

$$\omega = \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n) \quad \text{où } a_j \in \mathbb{Z}[i] \text{ désigne l'affixe de } A_j$$

On constate que les coordonnées de ω seront rationnelles.

A.II.1.b

Si l'angle de r est $\frac{2\pi}{n}$, on a : $r(z) = e^{i\frac{2\pi}{n}}(z - \omega) + \omega$

Sinon, c'est $r(z) = e^{-i\frac{2\pi}{n}}(z - \omega) + \omega$

A.II.1.c

* Soient $A_j(a_j)$. $r(A_1) = A_2$ s'écrit $r(a_1) = a_2$

$$e^{\pm i\frac{2\pi}{n}}(a_1 - \omega) + \omega = a_2$$

$$e^{\pm i\frac{2\pi}{n}} = \frac{a_2 - \omega}{a_1 - \omega}$$

Les parties réelles et imaginaires de a_1, a_2, ω étant rationnelles, il en sera de même des parties réelles et imaginaires de $\frac{a_2 - \omega}{a_1 - \omega}$, donc de $e^{\pm i\frac{2\pi}{n}} = \cos\left(\pm\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\pm\frac{2\pi}{n}\right)$

<u>On en déduit que $\cos\frac{2\pi}{n}$ et $\sin\frac{2\pi}{n}$ sont rationnels.</u>

* $\theta = \frac{2\pi}{n}$ vérifie : $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$ et $\cos\theta \in \mathbb{Q}$.

On peut appliquer A.I.4, donc $\cos\frac{2\pi}{n} \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ et les cas :

$\cos\frac{2\pi}{n} = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{n} = k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow n = \frac{2}{k}$ donc pas de solution (car $n \geq 3$)

$\cos\frac{2\pi}{n} = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \sin\frac{2\pi}{n} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{Q}$ à rejeter,

$\cos\frac{2\pi}{n} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \frac{2}{n} = \frac{1}{2} + k \Leftrightarrow n = \frac{4}{1+2k} \Leftrightarrow n = 4$

Conclusion : $n = 4$ et P est un carré.

A.II.2. Notons $z_j = x_j + iy_j$ (resp. $z'_j = x'_j + iy'_j$) l'affixe de A_j (resp. de A'_j). On a :

$$\begin{cases} z_4 - z_1 = i(z_2 - z_1) \\ z_3 - z_2 = i(z_2 - z_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_3 = z_2 + i(z_2 - z_1) \\ z_4 = z_1 + i(z_2 - z_1) \end{cases}$$

A_2 A_1
A_3 A_4

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = x_2 - (y_2 - y_1) \\ y_3 = y_2 + (x_2 - x_1) \\ x_4 = x_1 - (y_2 - y_1) \\ y_4 = y_1 + (x_2 - x_1) \end{cases}$$

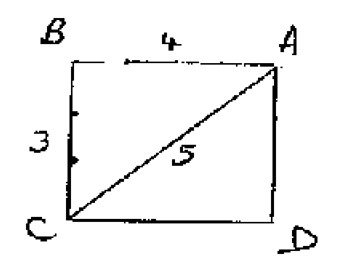
de sorte que A_1, A_2, A_3 et A_4 appartiennent à $\mathbb{Z}[i]$

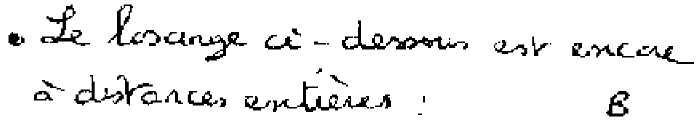
Si le carré $A_1 A_2 A'_3 A'_4$ était indirect, on recommencerait la même démonstration en prenant soin de remplacer i par $-i$ dans le premier système.

B.I.1

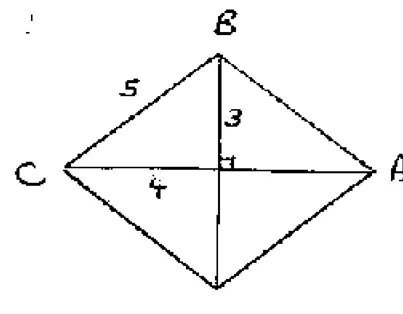
- Un carré de côté entier a ne sera pas un ensemble à distances entières, puisque sa diagonale mesure $a\sqrt{2}$ et que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

- Le rectangle ci-contre est à distances entières puisque $AC = \sqrt{3^2+4^2} = 5$.





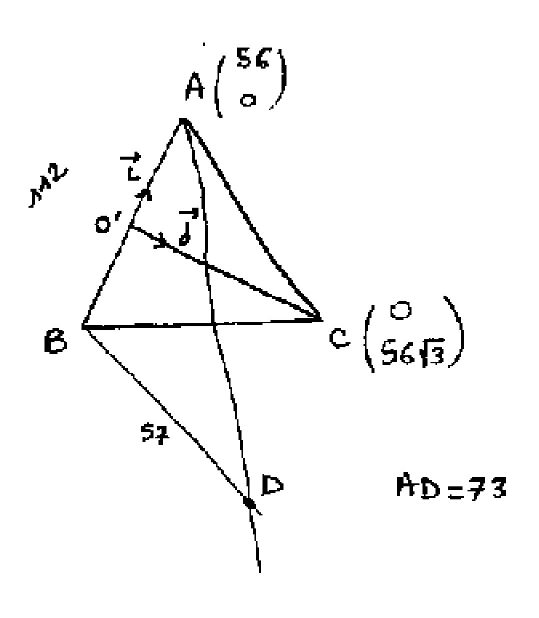
- Le losange ci-dessous est encore à distances entières :



B.I.2.a

$112 < 57+73$ donc le triangle ABD est constructible. [AB] étant fixé, il y aura 2 solutions possibles pour D : D_1 et D_2, symétriques /à [AB].

L'une de ces 2 solution sera dans le demi-plan de frontière (AB) contenant C.



B.I.2.b

$O'C = 112 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 56\sqrt{3}$, d'où les coordonnées de A, B et C sur la figure ci-dessus.

$D\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ vérifie :
$$\begin{cases} y>0 \\ AD=73 \Leftrightarrow (x-56)^2+y^2=73^2 \\ BD=57 \Leftrightarrow (x+56)^2+y^2=57^2 \end{cases}$$

$$224x = 57^2-73^2$$

$$x = -\frac{2080}{224} = -\frac{65}{7}$$

d'où $y^2 = 57^2 - \left(-\frac{65}{7}+56\right)^2 = \frac{52\,272}{49} \Rightarrow y = \frac{132\sqrt{3}}{7}$.

Ccl : $\boxed{D\begin{pmatrix}-\frac{65}{7}\\ \frac{132}{7}\sqrt{3}\end{pmatrix}}$

B.I.2.c Seule la distance CD n'est pas connue :

$$CD^2 = \left(-\frac{65}{7}\right)^2 + \left(56\sqrt{3} - \frac{132}{7}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{207025}{49} = 4225$$

$CD = 65 \in \mathbb{N}$

E sera un ensemble à distances entières.

B.II.1

$$M\binom{x}{y} \in \Gamma \cap H \iff \begin{cases} xy = 1 \\ ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} xy = 1 \\ ax^2 + b + c\frac{1}{x^2} + dx + e\frac{1}{x} + f = 0 \end{cases}$$

$$\underset{(**)}{\iff} \begin{cases} xy = 1 \\ ax^4 + dx^3 + (b+f)x^2 + ex + c = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Si $\Gamma \cap H$ est infini, il existera une infinité de racines du polynôme $(*)$ de degré ≤ 4, ce qui n'est possible que si c'est le polynôme nul, d'où $a = d = (b+f) = e = c$ et $\Gamma : xy = 1$. Alors $\Gamma = H$.

Si $\Gamma \neq H$, $\Gamma \cap H$ sera fini et l'équivalence $(**)$ assure que le polynôme $(*)$ n'est pas le polynôme nul. Ce polynôme aura au plus 4 racines et $\Gamma \cap H$ sera de cardinal au plus 4.

B.II.2.a

$U_j = \{M \ / \ |MA - MB| = j\}$

$V_k = \{M \ / \ |MA - MC| = k\}$

U_j et V_k sont des hyperboles de foyers A et B, éventuellement vides.

* Si $j = 0$, $U_0 = \{M \ / \ MA = MB\}$ est la médiatrice de $[AB]$

* Si $j = p$, $U_p = \{M \ / \ |MA - MB| = p = AB\} = (AB) \setminus]AB[$ est la réunion de 2 demi-droites opposées de support (AB) et d'extrémités A et B.

1er cas : $MA - MB = p = AB$ $\iff$ $MA = AB + BM$ $\iff$ $B \in$ … $\iff$ $M \in [Bx)$ etc

* Si $j > p$, $U_j = \emptyset$

car : $|MA - MB| \leq AB \leq MA + MB$ $\Leftrightarrow$ ABM constructible

Le cas V_k $(0 \leq k \leq p)$ se traite de la m̂ façon.

Si $U_j \neq \emptyset$, il existe M tq $|MA - MB| = j \leq AB = p$ donc $j \leq p$. On a prouvé $j > p \Rightarrow U_j = \emptyset$

* Si $0 < j < p$, l'hyperbole U_j est non vide car il existe M tq $BM = p$; $AM = p + j$, $AB = p \Rightarrow M \in U_j$.

B.II.2.b B.II.1 signifie que 2 hyperboles se coupent en au plus 4 points, sauf si elles sont confondues. Ici <u>$U_j \cap V_k$ aura au plus 4 points</u>

($U_j = V_k$ est impossible car les foyers de U_j sont A, B et ceux de V_j : A, C)

B.II.2.c

$\forall M \in E \quad MA \in \mathbb{N}$ et $MB \in \mathbb{N}$ donc : $\exists j \in \mathbb{N} \quad |MA - MB| = j$

ie $\exists j \in \mathbb{N} \quad M \in U_j$

De plus $0 \leq j \leq p$, sinon $U_j = \emptyset$ (penser à l'inégalité triangulaire), donc :

$$E \subset \bigcup_{0 \leq j \leq p} U_j$$

De même : $E \subset \bigcup_{0 \leq k \leq q} V_k$

On en déduit : $E \subset (\bigcup U_j) \cap (\bigcup V_k) = \bigcup_{j,k} (U_j \cap V_k)$

<u>E, inclus dans une réunion finie d'ensembles finis, sera fini.</u>

B.II.3

(*) ⇒ (**) Si E n'était pas inclus dans une droite, il existerait 3 points A, B, C de E non alignés et B.II.2 montrerait que E est fini. C'est absurde.

Donc E est inclus dans une droite Δ de vecteur directeur unitaire $\vec{v}$.

Soit $A \in E$. $\quad \forall M \in E \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad \vec{AM} = x\vec{v}$

Comme $AM = |x| \in \mathbb{N}$, on constate : $M \in E_{A,\vec{v}}$

<u>Soit</u> : <u>$E \subset E_{A,\vec{v}}$</u>

(**) ⇒ (*) est trivial car si $E \subset E_{A,\vec{v}}$,

$\forall M, N \in E \quad \exists x_M, x_N \in \mathbb{Z} \quad \vec{AM} = x_M \vec{v} \quad \vec{AN} = x_N \vec{v}$

d'où $\vec{MN} = (x_N - x_M)\vec{v} \Rightarrow MN = |x_N - x_M| \in \mathbb{N}$. CQFD

B.III.1

$M_p = M_q \Leftrightarrow e^{i2p\varphi} = e^{i2q\varphi} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad 2p\varphi = 2q\varphi + k2\pi \Leftrightarrow (p-q)\varphi = k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Si $p-q \neq 0$, on aurait $\frac{\varphi}{\pi} = \frac{k}{p-q} \in \mathbb{Q}$. C'est absurde (car $\frac{\varphi}{\pi} \in \mathbb{Q}$ et $\cos\varphi = \frac{4}{5} \in \mathbb{Q}$ entraînent (A.I.4) : $\cos\varphi \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$, faux).

Donc $\boxed{M_p = M_q \Leftrightarrow p = q}$

B.III.2

* $M_pM_q = |e^{i2p\varphi} - e^{i2q\varphi}| = |e^{i2(p-q)\varphi} - 1| = |e^{i(p-q)\varphi}(e^{i(p-q)\varphi} - e^{-i(p-q)\varphi})|$

$= |2i \sin(p-q)\varphi|$

soit $\boxed{M_pM_q = 2\,|\sin(p-q)\varphi|}$

* Montrer que $M_pM_q \in \mathbb{Q}$ revient à prouver le :

‖ __lemme__ : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sin n\varphi \in \mathbb{Q}$

preuve : C'est trivial si $n=1$ car $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{3}{5}$

Notons que $\cos k\varphi \in \mathbb{Q}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En effet, (A.I.2) assure l'existence d'une suite $(P_k)_{k\geq 1}$ de polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ telle que $P_n(2\cos\varphi) = 2\cos k\varphi$

d'où $\cos k\varphi = \frac{1}{2} P_n\left(2 \cdot \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{2} P_n\left(\frac{8}{5}\right) \in \mathbb{Q}$.

Il suffit alors d'écrire :

$$\underbrace{\sin\theta}_{=\frac{3}{5}\in\mathbb{Q}} \sin n\theta = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\cos(n-1)\theta}_{\in\mathbb{Q}} - \underbrace{\cos(n+1)\theta}_{\in\mathbb{Q}} \Big)$$

pour obtenir : $\sin n\theta \in \mathbb{Q}$.

CQFD

__2^e solution__. On montre que $\sin n\varphi$ et $\cos n\varphi$ sont rationnels par récurrence sur n. C'est trivial si $n=1$. Au rang n : $\cos n\varphi = \cos(n-1)\varphi\cos\varphi - \sin(n-1)\varphi\sin\varphi$ et $\sin n\varphi = \sin(n-1)\varphi\cos\varphi + \sin\varphi\cos(n-1)\varphi$ assurent que $\cos n\varphi$ et $\sin n\varphi$ seront rationnels par application de l'hypothèse récurrente.

B.III.3 Soit $n \geq 3$. Les pts M_p d'affixe $e^{i2p\varphi}$, $1 \leq p \leq n$, sont situés sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ et vérifient :

$$M_pM_q = \frac{r_{pq}}{s_{pq}} \quad \text{où } r_{pq} \in \mathbb{N} \ , \ s_{pq} \in \mathbb{N}^*$$

Soit $s = \prod_{\substack{1 \leq p \leq n \\ 1 \leq q \leq n \\ p \neq q}} s_{pq}$. Les points $N_p(s\,e^{i2p\varphi})$ seront sur le cercle $s\mathcal{C}$ de centre O et de rayon s, et $N_pN_q = s\,M_pM_q = s.\frac{r_{pq}}{s_{pq}}$ seront dans $\mathbb{N}$

$\{N_p\}_{1 \leq p \leq n}$ <u>est un ensemble à distances entières formé de n points de $s\mathcal{C}$.</u>

C.I.1

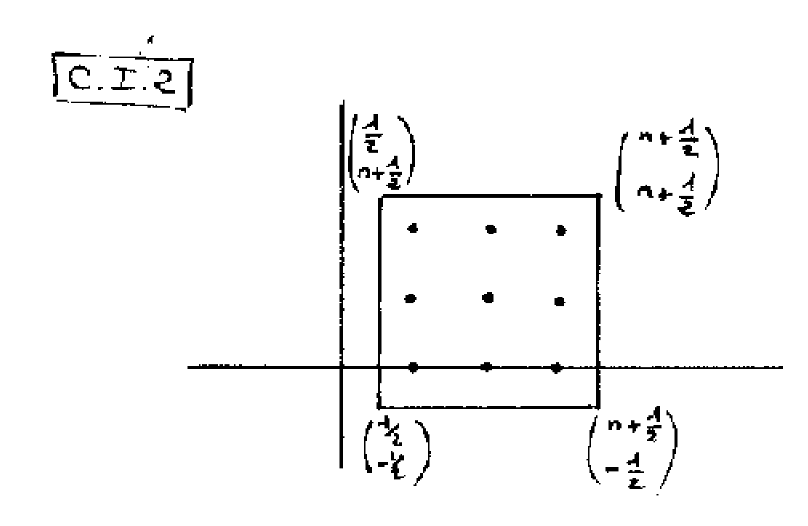
$C_1 = \mathcal{C}(0, \frac{1}{2})$

$C_2 = \mathcal{C}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ car $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x = 0$ puis $y \in \{0, 1\}$

$C_3 = \mathcal{C}\left(\begin{pmatrix} \frac{9}{10} \\ \frac{9}{10} \end{pmatrix}, 1\right)$ ie [sketch C_3] car $(x - \frac{9}{10})^2 + (y - \frac{9}{10})^2 \leq 1$ entraîne $(x, y) = (1,1)$ ou $(0,1)$ ou $(1,0)$

$C_4 = \mathcal{C}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ car $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} x \in \{-1, 0, 1\} \\ y \in \{-1, 0, 1\} \end{cases}$ et en fait, seuls $(x, y) = (0,0)$ ou $(0, 1)$ ou $(1, 0)$ ou $(1$ conviennent.

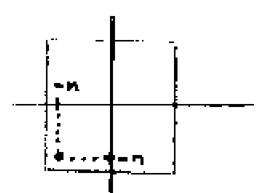
C.I.2



C.II.1.a

Toute partie bornée B du plan est incluse dans un carré de sommets :

$$\begin{pmatrix} -n-\frac{1}{2} \\ -n-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -n-\frac{1}{2} \\ n+\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} n+\frac{1}{2} \\ -n-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} n+\frac{1}{2} \\ n+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



qui contient exactement $(2n+1)^2$ points du réseau.

C.II.1.b

* Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}[i]$. $AM^2 = (x-\sqrt{2})^2 + (y-\frac{1}{3})^2 = x^2 - 2\sqrt{2}x + y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{19}{9}$

Si $N\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est un autre point du réseau et si $AM^2 = AN^2$, alors :

$$2\sqrt{2}\,(x'-x) \in \mathbb{Q}$$

donc $x' = x$ et :

$$y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{19}{9} = y'^2 - \frac{2}{3}y' + \frac{19}{9}$$

$$(y-y')\left(y+y'-\frac{2}{3}\right) = 0$$

Si $y - y' \neq 0$, $y+y' = \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$ est absurde, donc $y = y'$ et $M = N$.

Ccl : <u>2 points distincts du réseau ne se trouvent pas à la même distance de A.</u>

* On peut alors définir une suite $(M_n)_{n\geq 1}$ par :

M_1 est l'unique point du réseau tel que $AM_1 = \text{Inf}\,\{AM \,/\, M \in \mathbb{Z}[i]\}$

M_2 " " $AM_2 = \text{Inf}\,\{AM \,/\, M \in \mathbb{Z}[i] \setminus \{M_1\}\}$

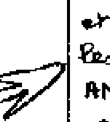
- - - -

M_n est " " $AM_n = \text{Inf}\,\{AM \,/\, M \in \mathbb{Z}[i] \setminus \{M_1, \dots, M_{n-1}\}\}$

Cette suite est infinie car $\mathbb{Z}[i]$ est infini, et par construction :

$$AM_1 < \dots < AM_n < AM_{n+1} < \dots$$

$$\mathbb{Z}[i] = \{M_n \,/\, n \in \mathbb{N}^*\}$$



<u>Vérifions que $\mathbb{Z}[i] \subset \{M_n / n \in \mathbb{N}^*\}$, le reste étant trivial</u>

* $\lim_{+\infty} AM_n = +\infty$. En effet, si $K > 0$, il existe un nbre fini m de pts du réseau dans la boule fermée de centre A et de rayon K (C.II.1.a). $M_1, \dots, M_m$ étant les m points les plus proches de A dans $\mathbb{Z}[i]$, on aura $AM_{m+1} > K$ donc $AM_n > K$ pour tout $n > m$.
* Alors : $\forall N \in \mathbb{Z}[i] \quad \exists n \quad AM_n \leq AN < AM_{n+1}$.
$AM_n < AN < AM_{n+1}$ étant impossible par construction de M_n, on aura $AM_n = AN \Rightarrow N = M_n$ $\square$

C.II.2 Il suffit de considérer un cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon r tel que $AM_n < r < AM_{n+1}$.

C.III.1.a

$D_1 \perp D_2$ car $\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}=0$

$$\Omega\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in D_1\cap D_2 \iff \begin{cases} x+y\sqrt{3}=\frac{1}{3}\\ x\sqrt{3}-y=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{cases} \iff \begin{cases} x+y\sqrt{3}=\frac{1}{3}\\ 3x-y\sqrt{3}=1\end{cases}$$

$$4x=\frac{4}{3}$$

$$x=\frac{1}{3} \quad \text{d'où } y=0$$

$$\boxed{\Omega\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}}$$

y

x

O

Ω

D_2 : $x\sqrt{3}-y-\frac{1}{\sqrt{3}}=0$

D_1 : $x+y\sqrt{3}-\frac{1}{3}=0$

C.III.1.b

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}}_{\Delta}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\\-\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

exprime les nouvelles coordonnées $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ en fonction des anciennes $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Il s'agit bien d'un chgt de repère orthonormé direct car Δ est la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$

$$\Delta^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\Delta^{-1}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\underbrace{\Delta^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{3}}\\ \frac{1}{6}\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}1/3\\0\end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}}_{\Delta^{-1}} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

montre que :

1) la matrice de chgt de base de l'ancienne base vers la nouvelle $(\vec{I}, \vec{J})$ est Δ^{-1}, soit : $\vec{I}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\vec{J}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$. Il s'agit des vecteurs directeurs resp. de D_1 et D

2) la nouvelle origine est $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$. C'est Ω.

C.III.2.a

$f(M_1) = f(M_2) \Leftrightarrow |X_1| + |Y_1| = |X_2| + |Y_2|$ et $\exists \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{\pm 1\}$ $\begin{cases} |X_1| = \alpha X_1 \\ |X_2| = \gamma X_2 \\ |Y_1| = \beta Y_1 \\ |Y_2| = \delta Y_2 \end{cases}$

d'où : $\alpha X_1 + \beta Y_1 = \gamma X_2 + \delta Y_2$ (*)

En remplaçant en fonction de x_1, y_1, x_2, y_2 :

$$\alpha X_1 + \beta Y_1 = \frac{\alpha}{2}\left(x_1\sqrt{3} - y_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\beta}{2}\left(x_1 + y_1\sqrt{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\alpha\sqrt{3}+\beta}{2} x_1 + \frac{\beta\sqrt{3}-\alpha}{2} y_1 - \frac{\alpha\sqrt{3}+\beta}{6}$$

De même pour $\gamma X_2 + \delta Y_2$. (*) s'écrira donc :

$$\frac{\alpha\sqrt{3}+\beta}{2} x_1 + \frac{\beta\sqrt{3}-\alpha}{2} y_1 - \frac{\gamma\sqrt{3}+\delta}{2} x_2 - \frac{\delta\sqrt{3}-\gamma}{2} y_2 - \frac{\alpha\sqrt{3}+\beta}{6} + \frac{\gamma\sqrt{3}+\delta}{6} = 0$$

$$(3\alpha\sqrt{3}+3\beta)x_1 + (3\beta\sqrt{3}-3\alpha)y_1 - (3\gamma\sqrt{3}+3\delta)x_2 + (3\gamma - 3\delta\sqrt{3})y_2 + \delta - \beta + \gamma\sqrt{3} - \alpha\sqrt{3} =$$

$$(3\alpha x_1 + 3\beta y_1 - 3\gamma x_2 - 3\delta y_2 + \gamma - \alpha)\sqrt{3} + (3\beta x_1 - 3\alpha y_1 - 3\delta x_2 + 3\gamma y_2 + \delta - \beta) = 0$$

$(1, \sqrt{3})$ est une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$, donc :

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta y_1 - \gamma x_2 - \delta y_2 + \frac{\gamma - \alpha}{3} = 0 \\ \beta x_1 - \alpha y_1 - \delta x_2 + \gamma y_2 + \frac{\delta - \beta}{3} = 0 \end{cases}$$

comme désiré.

C.III.2.b

* N'oublions pas que x_1, x_2, y_1, y_2 sont entiers. Les 2 égalités du a) entraînent que $\frac{\gamma-\alpha}{3}$ et $\frac{\delta-\beta}{3}$ sont entiers. Comme $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{\pm 1\}$, la seule possibilité qui reste est $\gamma-\alpha = \delta-\beta = 0$.

* Finalement : $\begin{cases} \alpha(x_1-x_2) + \beta(y_1-y_2) = 0 \\ \beta(x_1-x_2) - \alpha(y_1-y_2) = 0 \end{cases}$

$$D = -\alpha^2 - \beta^2 = -2.$$

C'est un système de Cramer homogène, donc $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$.

CQFD

C.III.3

$f(M) = |X| + |Y|$ apparaît comme la distance de M au pt Ω associée à la norme de $\vec{P}$: $\left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right\| = |X| + |Y|$ (coordonnées dans le nouveau repère)

L'application $f : P \to \mathbb{R}$ est donc continue.

* Définissons $(N_n)_{n \geq 1}$ par récurrence.

$$\exists !\ N_1 \in \mathbb{Z}[i] \qquad f(N_1) = \inf \{ f(M) \ /\ M \in \mathbb{Z}[i] \}$$

Cette borne inférieure existe car $f(M) \geq 0$ $\forall M \in \mathbb{Z}[i]$, et est atteinte en un point N_1 de $\mathbb{Z}[i]$ car si $a > 0$ est donné suffisamment grand pour que le carré $C_a = \{ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \ /\ |X| + |Y| \leq a \}$ vérifie $\mathbb{Z}[i] \cap C_a \neq \emptyset$,

alors $\forall M \in C_a \quad \forall N \notin C_a \qquad \underset{|X|+|Y| \leq a}{f(M)} \leq \underset{|X|+|Y| > a}{f(N)}$

et $\text{Inf}\,\{\beta(M)\,/\,M\in\mathbb{Z}[i]\} = \text{Inf}\,\underbrace{\{\beta(M)\,/\,M\in C_a\cap\mathbb{Z}[i]\}}$

Cet ensemble est fini d'après C.II.1.a, donc sa borne inférieure est un Minimum, et s'écrira $\beta(N_1)$ avec $N_1\in C_a\cap\mathbb{Z}[i]$.

* et ainsi de suite : si $N_1,\dots,N_{n-1}$ sont définis, on pose :

$$\beta(N_n)=\text{Inf}\,\{\beta(M)\,/\,M\in\mathbb{Z}[i]\setminus\{N_1,\dots,N_{n-1}\}\}$$

N_n existe et est unique d'après C.III.2.

<u>Par construction</u> : $\begin{cases}\beta(N_n)<\beta(N_{n+1}) & \forall n\in\mathbb{N}\\ \mathbb{Z}[i]=\{N_n\,/\,n\in\mathbb{N}\}\end{cases}$

C.III.4 $C_a=\left\{\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}/\ |X|+|Y|<a\right\}$ est l'intérieur d'un carré de centre Ω et de sommets $\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-a\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-a\end{pmatrix}$ dans le repère (Ω,D_1,D_2) du C.III.1

(car $|X|+|Y|<a \Leftrightarrow |Y|<a-|X| \Leftrightarrow \begin{cases}\text{Si } X,Y\in\mathbb{R}_+ \quad Y<a-X\\ \text{Si } X\geq 0 \text{ et } Y\leq 0 \quad Y>-a+X\\ \dots\end{cases}$)

* <u>Coordonnées des sommets de C_a dans $\mathcal{R}$</u> :

On applique :

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2} & \frac12\\ -\frac12 & \frac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac13\\0\end{pmatrix}$$

(C III 1 b) avec $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix}-a\\0\end{pmatrix}$, ...

On trouve : $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2}a+\frac13\\ -\frac12 a\end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt3}{2}a+\frac13\\ \frac12 a\end{pmatrix}$, puis $\begin{pmatrix}\frac a2+\frac13\\ \frac{\sqrt3}{2}a\end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix}-\frac a2+\frac13\\ -\frac{\sqrt3}{2}a\end{pmatrix}$

* Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Choisissons $a\in\mathbb{R}_+$ tel que $\beta(N_n)<a<\beta(N_{n+1})$.

Un point N_k de $\mathbb{Z}[i]$ sera dans C_a ssi $\beta(N_k)=|X|+|Y|<a$ ie ssi $k\in\mathbb{N}_n$

<u>Exactement n points de $\mathbb{Z}[i]$ seront à l'intérieur du carré C_a.</u>

C.IV.1.a

$\mathcal{E}_n$ est fini car $x^2+y^2=5^n \Rightarrow \begin{cases} |x| \leq 5^{n/2} \\ |y| \leq 5^{n/2} \end{cases}$

$\mathcal{E}_n$ et E_n ont m̂ cardinal vu la bijection :

$$\begin{array}{ccc} E_n & \longrightarrow & \mathcal{E}_n \\ z=x+iy & \longmapsto & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array} \qquad (\text{car } |z|^2 = x^2+y^2)$$

C.IV.1.b

$z \in E_0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{Z}[i]$ et $|z|=1 \Leftrightarrow z \in \{\pm 1; \pm i\}$

$\# E_0 = 4$ et E_0 est le groupe multiplicatif des racines 4-ième de l'unité.

C.IV.1.c

* $|Z_{\omega,p}|^2 = |\omega (2+i)^p (2-i)^{n-p}|^2 = (\sqrt{5})^{2n} = 5^n$ car $|\omega|=1$ et $|2+i| = |2-i| = \sqrt{5}$

donc $Z_{\omega,p} \in E_n$

* $$\begin{array}{ccc} E_0 \times \{0,\dots,n\} & \xrightarrow{f} & E_n \\ (\omega \,,\, p) & \longmapsto & Z_{\omega,p} \end{array}$$ <u>est injective car</u> :

$$Z_{\omega,p} = Z_{\omega',q} \Rightarrow \omega (2+i)^p (2-i)^{n-p} = \omega' (2+i)^q (2-i)^{n-q}$$

$$\Rightarrow \frac{(2+i)^{p-q}}{(2-i)^{p-q}} = \frac{\omega'}{\omega}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2+i}{2-i}\right)^{4(p-q)} = 1$$

Si $p-q \neq 0$, posons $p-q=m$. On a : $\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^{4m} = 1$, d'où :

$$\underbrace{\frac{2+i}{2-i}}_{\frac{3+4i}{5}} = e^{ik\frac{2\pi}{4m}} = e^{ik\frac{\pi}{2m}} \qquad k \in [0, 4m-1] \cap \mathbb{N}$$

On en déduit : $\begin{cases} \cos \frac{k\pi}{2m} = \frac{3}{5} \in \mathbb{Q} \\ \sin \frac{k\pi}{2m} = \frac{4}{5} \end{cases}$

Si $\theta = \frac{k\pi}{2m}$, $\cos\theta = \frac{3}{5} \in \mathbb{Q}$ et $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$, donc (A.I.4) entraîne $\cos\theta \in \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$

ce qui est absurde. Donc $p-q=0 \Rightarrow p=q \Rightarrow \omega=\omega'$ CQFD

C.IV.1.d

* $x^2+y^2=5^n \Rightarrow x^2+y^2 \equiv 0 \ [5]$

On envisage tous les cas :

1) $x \equiv 0 \Rightarrow y^2 \equiv 0 \Rightarrow y \equiv 0$ donc $(x,y) \equiv (0,0)$

2) $x \equiv 1 \Rightarrow y^2 \equiv 4 \Rightarrow y \equiv 2$ ou 3 donc $(x,y) \equiv (1,2)$ ou $(1,3)$

3) $x \equiv 2 \Rightarrow y^2 \equiv 1 \Rightarrow y \equiv 1$ ou 4 ...

4) $x \equiv 3 \Rightarrow y^2 \equiv 1 \Rightarrow y \equiv 1$ ou 4

5) $x \equiv 4 \Rightarrow y^2 \equiv 4 \Rightarrow y \equiv 2$ ou 3

Il est alors facile de vérifier que chacun de ces cas entraîne (1) ou (2).

* Si $z \in E_n$, calculons :

$$\frac{z}{2+i} = \frac{x+iy}{2+i} = \frac{2x+y+i(2y-x)}{5}$$

$$\frac{z}{2-i} = \frac{x+iy}{2-i} = \frac{(x+iy)(2+i)}{5} = \frac{2x-y+i(x+2y)}{5}$$

Vu (1) et (2) on aura $\frac{z}{2+i} \in \mathbb{Z}[i]$ ou $\frac{z}{2-i} \in \mathbb{Z}[i]$.

Comme $\begin{cases} \left|\frac{z}{2+i}\right|^2 = \frac{|z|^2}{5} = \frac{5^n}{5} = 5^{n-1} \\ \left|\frac{z}{2-i}\right|^2 = 5^{n-1} \end{cases}$

on constate que $\frac{z}{2+i} \in E_{n-1}$ ou $\frac{z}{2-i} \in E_{n-1}$.

C.IV.1.e

* Il reste seulement à prouver que :

$$E_0 \times \{0,\dots,n\} \xrightarrow{f} E_n \quad \text{est surjective}$$
$$(\omega, p) \longmapsto Z_{\omega,p}$$

C'est évident si $n=0$. Si c'est vrai jusqu'au rang $n-1$, on a :

$$z \in E_n \Rightarrow \frac{z}{2+i} \in E_{n-1} \quad \text{ou} \quad \frac{z}{2-i} \in E_{n-1}$$

d'après l'hypothèse récurrente, il existe $(\omega,p) \in E_0 \times \{0,\dots,n-1\}$ tel que :

$$\frac{z}{2+i} = \omega\,(2+i)^p(2-i)^{n-1-p} \quad \text{ou} \quad \frac{z}{2-i} = \omega\,(2+i)^p(2-i)^{n-1-p}$$

d'où $\quad z = \omega(2+i)^{p+1}(2-i)^{n-(p+1)} \quad$ ou $\quad z = \omega\,(2+i)^p(2-i)^{n-p}$

et l'on a exhibé un antécédent de z. CQFD

* On a : $\boxed{\#E_n = 4(n+1)}$

C.IV.2.a

Clairement $E_n = A_n \cup B_n$ et $A_n \cap B_n = \emptyset$.

$\varphi : A_n \longrightarrow B_n$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ étant bijective, A_n et B_n auront le même cardinal, à savoir $\frac{4(n+1)}{2} = 2(n+1)$

C.IV.2.b

Il s'agit de résoudre $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{5^{\frac{k-1}{2}}}{2}\right)^2$ dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

$$(2x-1)^2 + (2y)^2 = 5^{k-1}$$

Le nbre de points du réseau situés sur ce cercle sera le cardinal de B_{k-1}, soit : $2k$.

C.IV.3.a

$M \in \mathbb{Z}[i] \cap \Gamma_k \Leftrightarrow M\binom{x}{y}\ ;\ x,y \in \mathbb{Z}$ et $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{5^{2k}}{9}$

soit : $(3x-1)^2 + (3y)^2 = 5^{2k}$

ce qui prouve que $\#(\mathbb{Z}[i] \cap \Gamma_k) = \# F_k$

C.IV.3.b

$$* \quad \left.\begin{matrix} \omega \in E_0 \\ z \in E_{2k} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} |\omega z|^2 = |z|^2 = 5^{2k} \\ |\omega \bar{z}|^2 = |z|^2 = 5^{2k} \end{matrix}\right. \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \omega z \in E_{2k} \\ \omega \bar{z} \in E_{2k} \end{matrix}\right.$$

* $z \mathcal{R} z' \Leftrightarrow \exists \omega \in E_0 \quad z' = \omega z$ ou $z' = \omega \bar{z}$ est une relation d'équivalence car réflexive ($z \mathcal{R} z$ puisque $z = 1.z$ et $1 \in E_0$) , symétique (car $z\mathcal{R}z' \Rightarrow z' = \omega z$ ou $z' = \omega \bar{z} \Rightarrow z = \omega^3 z'$ ou $z = \bar{\omega}^3 \bar{z}' \Rightarrow z' \mathcal{R} z$) et transitive (car $z' = \omega z$ ou $z' = \omega \bar{z}$, et $z'' = \omega' z'$ ou $z'' = \omega' \bar{z}'$ entraînent $z'' = \omega'' z$ ou $z'' = \omega'' \bar{z}$ avec $\omega'' \in E_0$, les nbres $\omega'\omega$ et $\omega' \bar{\omega}$ étant aussi des racines 4-ième de l'unité)

C.IV.3.c

Soit $z = x + iy \in E_{2k}$

* Si $xy \neq 0$, $(\mathcal{R})(z) = \{ z' \in E_{2k} \ /\ z' = \omega z$ ou $\omega \bar{z} \}$

$\omega \in \{\pm 1, \pm i\}$ donc $(\mathcal{R})(z)$ contient les 8 éléments suivants, distincts entre eux 2 à 2 (car $x = \pm y \Rightarrow$ x et y de même parité , absurde car $x^2 + y^2 = 5^{2k} \equiv 1\ [2]$)

$$\left.\begin{matrix} z = x + iy & \bar{z} = x - iy \\ iz = -y + ix & i\bar{z} = y + ix \\ -z = -x - iy & -\bar{z} = -x + iy \\ -iz = y - ix & -i\bar{z} = -y - ix \end{matrix}\right\} \quad (\mathcal{R})(z)$$

$z' \in (R)(z) \cap F_k \iff z'$ appartient à la liste ci-dernière
et $\begin{cases} x' \equiv -1 & [3] \\ y' \not\equiv 0 & [3] \end{cases}$

Notons que $z \in E_{2k} \Rightarrow x^2+y^2 = 5^{2k} \Rightarrow x^2+y^2 \equiv 1 \quad [3]$ ce qui permet d'éliminer de nombreux cas :

1° cas : $\begin{cases} x \equiv -1 & [3] \\ y \equiv -1 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2 \not\equiv 1 \quad [3]$ absurde

2° cas : $\begin{cases} x \equiv -1 \\ y \equiv 0 \end{cases}$ on conserve les éléments suivant de la liste de $(R)(z)$ pour obtenir $(R)(z) \cap F_k$:

(qui sont distincts car $y \neq 0$)

3° cas : $\begin{cases} x \equiv -1 \\ y \equiv 1 \end{cases}$ impossible

4° cas : $\begin{cases} x \equiv 0 \\ y \equiv -1 \end{cases}$ alors $(R)(z) = \{ y+ix \, ; \, y-ix \}$

5° cas : $\begin{cases} x \equiv 0 \\ y \equiv 0 \end{cases}$ impossible

6° cas : $\begin{cases} x \equiv 0 \\ y \equiv 1 \end{cases}$ alors $(R)(z) = \{ -y+ix \, ; \, -y-ix \}$

7° cas $\begin{cases} x \equiv 1 \\ y \equiv -1 \end{cases}$ impossible (car $x^2+y^2 \equiv 1$)

8° cas $\begin{cases} x \equiv 1 \\ y \equiv 0 \end{cases}$ alors $(R)(z) = \{ -x+iy \, ; \, -x-iy \}$

9° cas $\begin{cases} x \equiv 1 \\ y \equiv 1 \end{cases}$ impossible (car $x^2+y^2 \equiv 1$)

Ccl : Si $xy \neq 0$, en posant $z = x+iy$, on a : $\#(R)(z) \cap F_k = 2$

* <u>Si $xy=0$</u>, soit $y=0$ pour fixer les idées (le cas $x=0$ se traitant de la même manière). La liste des éléments de $(R)(z)$ devient :

$$x \quad ix \quad -x \quad -ix$$

et $E_{2k} = \{ z = x+iy \in \mathbb{Z}[i] \ / \ x^2+y^2 = 5^{2k} \}$

$z' \in (R)(z) \cap F_k \iff z'$ est dans cette liste et $\begin{cases} x' \equiv -1 & [3] \\ y' \equiv 0 & [3] \end{cases}$

- Si $x \equiv -1 \ [3]$, $(R)(z) \cap F_k = \{x\}$
- Si $x \equiv 0 \ [3]$, c'est absurde : z ne peut être dans E_{2k} puisque $x^2+y^2 = 5^{2k} \Rightarrow x^2+y^2 \equiv 1 \ [3]$ serait en défaut
- Si $x \equiv 1 \ [3]$, $(R) \cap F_k = \{-x\}$

<u>Ccl</u> : Si $z = x+iy$ et $xy=0$, $(R)(z) \cap F_k$ est réduit à 1 élément.

C.IV.3.d

* Soit $z \in E_{2k}$, $z = x+iy$. On a vu que :

- si $xy \neq 0$, la classe $(R)(z)$ contient 8 éléments distincts
- si $xy = 0$, $(R)(z)$ contient 4 éléments

($(x,y) = (0,0)$ est impossible !)

Il y a seulement 4 éléments de E_{2k} tels que $xy=0$ car :

si $x^2+y^2 = 5^{2k}$ $\quad x=0 \Rightarrow y = \pm 5^k$

et $\quad y=0 \Rightarrow x = \pm 5^k$

On en déduit qu'<u>il n'existe qu'une seule classe d'équivalence à 4 éléments</u>, à savoir : $\quad$ si $y=0$ $\quad (R)(x) = \{x, ix, -x, -ix\}$ avec $x = \pm 5^k$

(ou, ce qui revient au même, si $x=0$: $(R)(y) = \{y, iy, -y, -iy\}$ et $y=\pm$

* Nombre de classes d'équivalence $(R)(z)$ à 8 éléments :

$$\frac{\# E_{2k} - 4}{8} = \frac{4(2k+1) - 4}{8} = k$$

* Considérons la relation (R) induite sur F_k :

D'après C.IV.3.c :

- les classes à 8 éléments de E_{2k} induisent des classes à 2 éléments sur F_k
- la classe à 4 " " (correspondant à $(R)(z)$ avec $z = x+iy$ et $xy=0$)

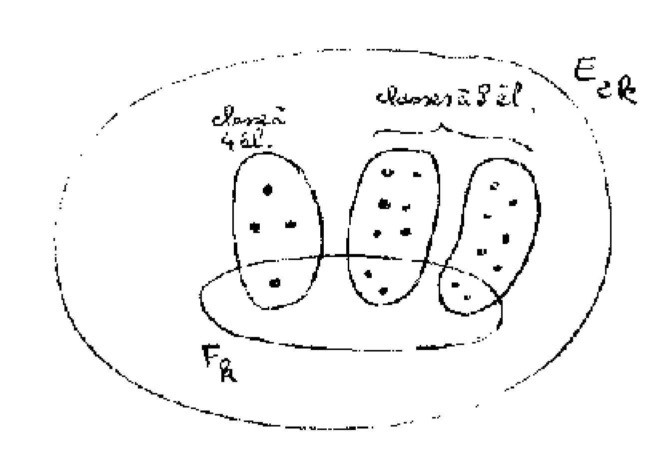
induit une classe à 1 seul élément de F_k.

Donc :

$$\# F_k = \underbrace{k}_{\substack{\text{nbre de} \\ \text{classes à 8 él.} \\ (\text{dans } E_{2k})}} \times \underbrace{2}_{\substack{\text{nbre d'éléments} \\ \text{de } R(z) \cap F_k}} + \underbrace{1}_{\substack{\text{1 seule} \\ \text{classe à} \\ \text{4 él.} \\ \text{dans } E_{2k}}} \times \underbrace{1}_{\substack{\text{1 seul élément} \\ \text{de } R(z) \cap F_k \text{ ici}}}$$

$$\boxed{\# F_k = 2k + 1}$$

Visualisation :



SESSION DE 1993

concours externe de recrutement de professeurs certifiés

section : mathématiques

première composition de mathématiques

Durée : 5 heures

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche — éventuellement programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Les quatre parties du problème sont largement indépendantes.

Tournez la page S.V.P.

NOTATIONS ET OBJECTIFS DU PROBLÈME

On désigne par E l'espace vectoriel constitué des fonctions ϕ réelles, continues et bornées sur $[0, +\infty[$, et telles que, pour tout réel strictement positif x, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t\,\phi(t)}{x^2+t^2}\,dt$ soit convergente.

On convient de désigner, en abrégé, par C^∞ l'espace vectoriel des fonctions réelles indéfiniment dérivables sur $]0, +\infty[$.

L'objet du problème est l'étude de l'application linéaire S qui, à tout élément ϕ de E, fait correspondre la fonction $S\phi$ définie sur $]0, +\infty[$ par $S\phi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t\,\phi(t)}{x^2+t^2}\,dt$.

Les deux premières parties sont consacrées à la détermination de quelques transformées $S\phi$ et à la preuve de l'appartenance de $S\phi$ à C^∞, pour tout élément ϕ de E. Les deux autres parties étudient une suite d'endomorphismes L_n de C^∞ telle que, pour tout élément ϕ de E, et pour tout x strictement positif, on ait :

$$\lim (L_n\, S\phi(x)) = \phi(x).$$

PREMIÈRE PARTIE

I.1. **Appartenance à** E.

a. La fonction constante, égale à 1 sur $[0, +\infty[$, est-elle élément de E ?

b. Montrer que la fonction ϕ_1, définie sur $[0, +\infty[$ par $\phi_1(t) = \frac{t}{1+t^2}$, appartient à E.

c. Soit ψ une fonction continue sur $[0, +\infty[$, qui admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que ψ est bornée sur $[0, +\infty[$.

Montrer que, si ℓ n'est pas nulle, ψ n'appartient pas à E. ψ appartient-elle à E si $\ell = 0$?

I.2. **Étude de** $S\phi_1$.

a. Déterminer deux nombres réels a et b tels que, pour tout couple de réels $(x, t) \neq (0, 0)$, on ait :

$$\frac{t^2(1-x^2)}{(x^2+t^2)(1+t^2)} = \frac{a}{1+t^2} + \frac{bx^2}{x^2+t^2}.$$

En déduire, pour $x \neq 1$, la valeur de $S\phi_1(x)$.

b. Calculer $S\phi_1(1)$ (on pourra faire une intégration par parties ou utiliser le changement de variable défini par $t = \tan\theta$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$).

c. Vérifier que $S\phi_1$ appartient à C^∞.

I.3. **Appartenance de** $S\phi$ **à** C^∞.

Dans cette question ϕ est un élément quelconque de E, k est un entier strictement positif. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on désigne par u_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $u_n(x) = \int_n^{n+1} \frac{t\,\phi(t)}{x^2+t^2}\,dt$.

a. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers $S\phi$.

b. Montrer que, pour tout entier n, la fonction u_n appartient à C^∞.

c. Déterminer deux nombres complexes α et β tels que, pour tout couple de réels $(x, t) \neq (0, 0)$, on ait :

$$\frac{t}{x^2 + t^2} = \frac{\alpha}{x - it} + \frac{\beta}{x + it}.$$

Utiliser cette égalité pour calculer $\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2 + t^2}\right)$ et en déduire que, pour tout couple de réels $(x, t) \neq (0, 0)$, on a : $\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2 + t^2}\right)\right| \leqslant \frac{k!}{(x^2 + t^2)^{\frac{k+1}{2}}}$.

d. On note $u_n^{(k)}$ la dérivée k-ième de la fonction u_n.
Soit a un réel strictement positif. Montrer qu'il existe une constante A_k telle que, pour tout $x \geqslant a$ et tout entier n, on ait :

$$|u_n^{(k)}(x)| \leqslant A_k \int_n^{n+1} \frac{dt}{(a^2 + t^2)^{\frac{k+1}{2}}}.$$

En déduire que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

e. Prouver que la fonction $S\phi$ appartient à C^∞ et que, pour tout entier $k > 0$, on a :

$$(S\phi)^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2 + t^2}\right) \phi(t)\, dt.$$

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie on étudie un exemple de détermination de $S\phi$ à l'aide d'une équation différentielle.

II.1. **Définition d'une fonction ϕ_2, élément de** E.

Soit ϕ_2 la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $\phi_2(t) = \sin t$.
Montrer que, pour tout nombre positif T, on a :

$$\int_0^T \frac{t \sin t}{x^2 + t^2}\, dt = \frac{-T\cos T}{x^2 + T^2} + \int_0^T \frac{x^2 - t^2}{(x^2 + t^2)^2} \cos t\, dt.$$

En déduire que ϕ_2 appartient à E.

II.2. **Détermination et intégration d'une équation différentielle dont $S\phi_2$ est solution.**

a. Prouver que, pour tout couple de réels $(x, t) \neq (0, 0)$, on a :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{t}{x^2 + t^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{t}{x^2 + t^2}\right) = 0.$$

b. En déduire que, sur $]0, +\infty[$, la fonction $S\phi_2$ est solution de l'équation différentielle $y'' - y = 0$ (on utilisera I.3.*e.* et on fera deux intégrations par parties successives).

c. Déterminer l'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle précédente sur $]0, +\infty[$.

II.3. **Détermination explicite de $S\phi_2$.**

a. Prouver que, pour tout $x > 0$, on a :

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{x^2 + t^2}\, dt\right| \leqslant \frac{\pi}{2x}$$

(on pourra utiliser l'égalité obtenue en II.1.). En déduire la limite de $S\phi_2(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Tournez la page S.V.P.

b. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ est convergente et que, pour tout $x > 0$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{x^2 + t^2}\, dt - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = - \int_0^{+\infty} \frac{\sin (x\lambda)}{\lambda (\lambda^2 + 1)}\, d\lambda .$$

Déduire de cette égalité que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{x^2 + t^2}\, dt$ a une limite finie lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

c. On admet sans démonstration l'égalité : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$. Expliciter la fonction $S\phi_2$.

TROISIÈME PARTIE

On désigne par T l'endomorphisme de C^∞ qui à un élément f de cet espace associe l'élément Tf défini, pour $x > 0$, par $Tf(x) = - xf'(x)$. L'identité de C^∞ est notée I et les puissances successives de T sont définies par $T^1 = T, T^2 = T \circ T, \ldots, T^p = T \circ T^{p-1}$.

Soit G l'espace vectoriel des fonctions réelles de deux variables (x, t) définies sur $]0, +\infty[\times [0, +\infty[$ et indéfiniment dérivables par rapport à la première variable. On désigne de même par T_x l'endomorphisme de G qui à un élément g de G associe l'élément $T_x g$ défini, pour $(x, t) \in]0, +\infty[\times [0, +\infty[$, par

$$T_x g(x, t) = - x \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) .$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $L_n = T \circ \left(I - \frac{T^2}{4}\right) \circ \left(I - \frac{T^2}{4.2^2}\right) \circ \ldots \left(I - \frac{T^2}{4\, n^2}\right)$ et on définit $L_{n,x}$ en remplaçant dans cette formule T par T_x.

III.1. Commutation de L_n et de l'intégrale.

a. Soit k un entier strictement positif. Montrer qu'il existe k réels $\lambda_{k,i}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, tels que, pour tout élément f de C^∞ et pour tout $x > 0$, on ait :

$$T^k f(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{k,i}\, x^i f^{(i)}(x) .$$

En déduire que pour tout élément ϕ de E et pour tout $x > 0$, on a :

$$T^k S\phi (x) = \int_0^{+\infty} T_x^k \left(\frac{t}{x^2 + t^2}\right) \phi (t)\, dt.$$

b. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, pour tout élément ϕ de E et pour tout $x > 0$, on a :

$$L_n S\phi (x) = \int_0^{+\infty} L_{n,x} \left(\frac{t}{x^2 + t^2}\right) \phi (t)\, dt.$$

III.2. Détermination de $L_1 S\phi$.

a. Soit f un élément de C^∞. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a :

$$\left(I - \frac{T^2}{4}\right)(f)(x) = f(x) - \frac{xf'(x) + x^2 f''(x)}{4} .$$

b. Déduire de l'égalité précédente $L_{1,x}\left(\frac{1}{x^2 + t^2}\right)$ et prouver que, pour tout $x > 0$, on a :

$$L_1 S\phi (x) = 12 \int_0^{+\infty} \frac{x^4 t^3}{(x^2 + t^2)^4} \phi (t)\, dt.$$

III.3. **Détermination de** $L_n S\phi$.

Soit u la fonction définie sur $]0, +\infty[\times [0, +\infty[$ par $u(x, t) = \dfrac{x}{x^2 + t^2}$.

a. On suppose t fixé. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout $x > 0$, on a :

$$\left(I - \frac{T_x}{2n}\right)(u^{2n})(x, t) = \frac{2t^2 u^{2n}(x, t)}{x^2 + t^2}.$$

Montrer ensuite que $\left(I + \dfrac{T_x}{2n}\right)\left(\dfrac{u^{2n}}{x^2 + t^2}\right)$ s'exprime simplement à l'aide de n et de u^{2n+2}.

En déduire l'expression de $\left(I - \dfrac{T_x^2}{4n^2}\right)(u^{2n})$ à l'aide de t, de n et de u^{2n+2}.

b. Établir, pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout $x > 0$ et pour tout élément ϕ de E, les formules :

$$L_n S\phi(x) = \frac{2(2n+1)!}{(n!)^2}\int_0^{+\infty} t^{2n+1} u^{2n+2}(x, t)\,\phi(t)\,dt$$

$$= \frac{2(2n+1)!}{(n!)^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1}\frac{\phi(\lambda x)}{1+\lambda^2}\,d\lambda.$$

QUATRIÈME PARTIE

Dans toute cette partie x est un nombre réel strictement positif *fixé*.

Pour tout entier $n \geqslant 0$ on pose $K_n = \dfrac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

IV.1. **Étude d'une suite d'intégrales.**

a. Prouver, pour tout entier $n \geqslant 0$, l'existence de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(2\lambda)^{2n+1}}{(1+\lambda^2)^{2n+2}}\,d\lambda$.

b. Montrer que, pour tout n, on a :

$$I_n - I_{n+1} = \frac{1}{2n+2} I_{n+1}$$

(on pourra utiliser le changement de variable défini par $\lambda = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$, $\theta \in [0, \pi[$ et faire une intégration par parties).

c. Calculer I_0, I_n, et en déduire la valeur de $K_n I_n$.

Pour l'étude de la limite de $L_n S\phi(x)$, on écrit la formule obtenue à la fin de la troisième partie sous la forme :

$$L_n S\phi(x) = K_n\int_0^{+\infty}\left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1}\frac{\phi(\lambda x) - \phi(x)}{1+\lambda^2}\,d\lambda + K_n I_n \phi(x).$$

Tournez la page S.V.P.

IV.2. **Comportement à l'infini de** $K_n \int_0^a \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} f(\lambda)\, d\lambda$.

Soit a un nombre réel, $0 < a < 1$, et f une fonction continue sur $[0, a]$.

a. Montrer que, pour tout réel $\theta \in]0, 1[$, $\theta^{2n+1} K_n$ a une limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$ (on pourra considérer la série de terme général $v_n = \theta^{2n+1} K_n$ et étudier la limite du rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$).

b. En déduire la limite de $K_n \int_0^a \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} f(\lambda)\, d\lambda$ lorsque n tend vers $+\infty$.

IV.3. **Comportement à l'infini de** $K_n \int_b^{+\infty} \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} g(\lambda)\, d\lambda$.

Soit b un nombre réel, $b > 1$, et g une fonction continue sur $[0, +\infty[$ telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |g(\lambda)|\, d\lambda$ soit convergente. Déterminer la limite de $K_n \int_b^{+\infty} \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} g(\lambda)\, d\lambda$ lorsque n tend vers $+\infty$.

IV.4. **Détermination de lim** $L_n S\phi(x)$.

Montrer, en utilisant notamment les deux résultats précédents et la continuité de ϕ en x, que

$$K_n \int_0^{+\infty} \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} \frac{\phi(\lambda x) - \phi(x)}{1+\lambda^2}\, d\lambda$$

a une limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$.

En déduire le résultat annoncé dans les objectifs du problème.

CAPES 93, 1^e composition

I.1.a Non car $\int_0^{\infty} \frac{t}{x^2+t^2}\,dt$ diverge. En effet $\frac{t}{x^2+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$ et $\int_1^{\infty} \frac{1}{t}$ diverge.

I.1.b $\int_0^{\infty} \frac{t\,\Phi_1(t)}{x^2+t^2}\,dt = \int_0^{\infty} \frac{t^2}{(x^2+t^2)(1+t^2)}\,dt$ converge car l'intégrant est équivalent à $\frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$ et $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge.

Ainsi $\Phi_1 \in E$.

I.1.c * $\lim\limits_{+\infty} \Psi = \ell$ donc il existe $A>0$ tel que $x>A$ entraîne $|\Psi(x)| \leq 2\ell$.

Ψ est continue sur $[0,A]$, donc bornée sur cet intervalle compact.

Finalement Ψ, bornée sur $[0,A]$ et sur $]A,+\infty[$, sera bornée sur $\mathbb{R}_+$.

* Cas où $\ell \neq 0$

$$\frac{t\,\Psi(t)}{x^2+t^2} \sim \frac{t\ell}{t^2} = \frac{\ell}{t} \quad \text{et} \int_1^{\infty} \frac{1}{t} \text{ diverge, donc } \Psi \notin E.$$

* Cas où $\ell = 0$: on ne peut pas conclure. Si $\Psi = e^{-t}$ ou $\Psi = t^{\alpha}$ $(\alpha<0)$ alors $\Psi \in E$ puisque

$$\int_0^{\infty} \frac{t e^{-t}}{x^2+t^2} \text{ converge car } \frac{t e^{-t}}{x^2+t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{t.t^{\alpha}}{x^2+t^2} \text{ converge car } \frac{t^{\alpha+1}}{x^2+t^2} \sim t^{\alpha-1} \text{ et } \int_1^{\infty} t^{\alpha-1} \text{ converge}$$

Cependant, la fonction Ψ définie par

$$\begin{cases} \Psi(t) = 1 & \text{si } t \leq e \\ \Psi(t) = \frac{1}{\ln t} & \text{si } t > e \end{cases}$$

est continue, bornée sur $[0,+\infty[$, tend vers 0 quand $t \to +\infty$ mais n'appartient pas à E car

$$\frac{t\,\Psi(t)}{x^2+t^2} \sim \frac{1}{t\ln t} \quad \text{et} \quad \int_e^{\infty} \frac{dt}{t\ln t} \quad \text{diverge}$$

NB : C'est une intégrale de Bertrand, et :

$$\int_e^A \frac{1}{t\ln t}\,dt = \left[\ln \ln t\right]_e^A \xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty .$$

I.2.a

* Ici $x \neq 1$. En multipliant les 2 membres par $1+t^2$ et en faisant $t=i$, on trouve $a=1$. En multipliant par x^2+t^2 et en faisant $t=ix$, on obtient $b=-1$. Donc :

$$\boxed{\frac{t^2(1-x^2)}{(x^2+t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{x^2+t^2}}$$

* On déduit :

$$S\Phi_1(x) = \int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+t)^2(x^2+t^2)}\,dt = \frac{1}{1-x^2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2} - \frac{x^2}{1-x^2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{x^2+t^2}$$

$$= \frac{1}{1-x^2}\left[\operatorname{Arctan} t\right]_0^{\infty} - \frac{x^2}{1-x^2}\left[\frac{1}{x}\operatorname{Arctan}\frac{t}{x}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+x} \quad \text{où } x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} .$$

I.2.b Par intégration par parties

$$S\Phi_1(1) = \int_0^{\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \left[\frac{t}{2}\cdot\frac{(1+t^2)^{-1}}{-1}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+t^2)^{-1}}{-1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{Arctan} t\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}$$

I.2.c $\begin{cases} S\Phi_1(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+x} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \\ S\Phi_1(1) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

$S\Phi_1$ coïncide avec la fonction $x \mapsto \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+x}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc sera dans $C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$.

I.3.a $\Phi \in E$ donc $\int_0^\infty \frac{t\,\Phi(t)}{x^2+t^2}\,dt$ converge et $\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^{N+1} \frac{t\,\Phi(t)}{x^2+t^2}\,dt$ tendra vers $\int_0^\infty \frac{t\,\Phi(t)}{x^2+t^2}\,dt$ pour N tendant vers $+\infty$.

I.3.b

* Posons $f(x,t) = \frac{t\,\Phi(t)}{x^2+t^2}$. f est continue pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times [n, n+1]$ et admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2x \frac{t\,\Phi(t)}{(x^2+t^2)^2}$ continue sur $\mathbb{R}_+^* \times [n, n+1]$, donc $u_n(x) = \int_n^{n+1} f(x,t)\,dt$ sera de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

et $u_n'(x) = \int_n^{n+1} -2x \frac{t\,\Phi(t)}{(x^2+t^2)^2}\,dt$.

* En fait $u_n \in C^\infty$: un raisonnement par récurrence réitérant le paragraphe précédent permet de s'en persuader.

Hypothèse de récurrence au rang k :

$$H(k) \left\{ \quad u_n \in C^k \quad \text{et} \quad u^{(k)}(x) = \int_n^{n+1} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,dt \right.$$

$H(1)$ a été prouvée. Si $H(k)$ est vraie, comme $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^k f}{\partial x^k}\right)$ existe et est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times [n, n+1]$, le Th. de dérivation sous le signe $\int$ prouve que $u^{(k)}$ est de classe C^1 et $u_n^{(k+1)}(x) = \int_n^{n+1} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x,t)\,dt$.

Conclusion : $u_n \in C^\infty$ et $u_n^{(k)}(x) = \int_n^{n+1} \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) \cdot \Phi(t)\, dt$

pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

I.3.c

On trouve $\frac{t}{x^2+t^2} = -\frac{i}{2} \cdot \frac{1}{x-it} + \frac{i}{2} \cdot \frac{1}{x+it}$, d'où :

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) = -\frac{i}{2} \cdot \frac{(-1)^k k!}{(x-it)^{k+1}} + \frac{i}{2} \frac{(-1)^k k!}{(x+it)^{k+1}} \qquad (*)$$

$$= \frac{(-1)^k k!\, i}{2} \cdot \frac{(x-it)^{k+1} - (x+it)^{k+1}}{(x^2+t^2)^{k+1}}$$

On peut expliciter :

$$(x-it)^{k+1} - (x+it)^{k+1} = \sum_{p=0}^{k+1} C_{k+1}^p (-it)^p x^{k+1-p} - \sum_{p=0}^{k+1} C_{k+1}^p (it)^p x^{k+1-p}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{E(\frac{k}{2})} C_{k+1}^{2\ell+1} (-1) . i^{2\ell+1} t^{2\ell+1} x^{k-2\ell} - \sum_{\ell=0}^{E(\frac{k}{2})} C_{k+1}^{2\ell+1} i^{2\ell+1} t^{2\ell+1} x^{k-2\ell}$$

$$= -2i \sum_{\ell=0}^{E(\frac{k}{2})} C_{k+1}^{2\ell+1} (-1)^\ell t^{2\ell+1} x^{k-2\ell}$$

d'où
$$\boxed{\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) = \frac{(-1)^k k!}{(x^2+t^2)^{k+1}} \sum_{\ell=0}^{E(\frac{k}{2})} (-1)^\ell C_{k+1}^{2\ell+1} t^{2\ell+1} x^{k-2\ell}}$$

C'est cependant $(*)$ qui nous donne la majoration :

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)\right| \leq \frac{1}{2} \frac{k!}{|x-it|^{k+1}} + \frac{1}{2} \frac{k!}{|x+it|^{k+1}} = \frac{k!}{(x^2+t^2)^{\frac{k+1}{2}}}$$

I.3.d

* $|u_n^{(k)}(x)| = \left| \int_n^{n+1} \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) . \Phi(t)\, dt \right| \leqslant \int_n^{n+1} |\Phi(t)| . \frac{k!}{(x^2+t^2)^{\frac{k+1}{2}}}\, dt$

$$\leqslant A_k \int_n^{n+1} \frac{dt}{(a^2+t^2)^{\frac{k+1}{2}}} \qquad \text{avec } A_k = k! . \sup_{t\in[0,+\infty[} |\Phi(t)|$$

pour tout $x \geqslant a$.

* L'inégalité précédente alliée à la convergence de la série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_k \int_n^{n+1} \frac{dt}{(a^2+t^2)^{\frac{k+1}{2}}} = A_k \int_0^{\infty} \frac{dt}{(a^2+t^2)^{\frac{k+1}{2}}}$$

(puisque $\frac{1}{(a^2+t^2)^{\frac{k+1}{2}}} \sim \frac{1}{t^{k+1}}$, et $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{k+1}}$ converge pour $k \geqslant 1$)

montrent que $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$.

I.3.e Fixons $a>0$. D'après I.3.a : $S\Phi(x) = \sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$

$u_n \in C^{\infty}(\mathbb{R}_+^*)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{n\geqslant 0} u_n^{(k)}(x)$ converge simplement vers

$$\sum_{n\geqslant 0} \int_n^{n+1} \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) \Phi(t)\, dt = \int_0^{\infty} \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) \Phi(t)\, dt .$$

La convergence de $\sum_{n\geqslant 0} u_n^{(k)}(x)$ étant normale, donc uniforme sur $[a,+\infty[$ (I.3.d), un Théorème classique assure que $S\Phi(x) = \sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ est de classe C^{∞} sur $[a,+\infty[$ et que

$$S\Phi^{(k)}(x) = \left(\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)\right)^{(k)} = \int_0^{\infty} \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) \Phi(t)\, dt$$

Ce résultat, vrais sur tout intervalles $[a,+\infty[$ où $a>0$, le sera encore sur $]0,+\infty[$.

II.1 Par intégration par parties

$$\int_0^T \frac{t}{x^2+t^2}\sin t\,dt = \left[\frac{t}{x^2+t^2}(-\cos t)\right]_0^T - \int_0^T \frac{x^2+t^2-t(2t)}{(x^2+t^2)^2}(-\cos t)\,dt$$

$$= -\frac{T\cos T}{x^2+T^2} + \int_0^T \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}\cos t\,dt$$

$\lim\limits_{T\to+\infty} \dfrac{T\cos T}{x^2+T^2} = 0$ et $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}\cos t\,dt$ converge absolument puisque $\displaystyle\int_x^\infty \left|\frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}\cdot\cos t\right| dt \leq \int_x^\infty \frac{t^2}{(x^2+t^2)^2}\,dt$ et que cette dernière intégrale converge (en effet : $\dfrac{t^2}{(x^2+t^2)^2} \sim \dfrac{1}{t^2}$).

Ainsi $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t\,\Phi_2(t)}{(x^2+t^2)^2}\,dt$ converge et $\Phi_2 \in E$.

II.2.a

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2xt}{(x^2+t^2)^2}\right) = \frac{-2t}{(x^2+t^2)^2} + \frac{8x^2t}{(x^2+t^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}\right) = \frac{-2t}{(x^2+t^2)^2} - \frac{4t(x^2-t^2)}{(x^2+t^2)^3}$$

D'où, en additionnant :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) = 0$$

II.2.b I.3.e et II.2.a permettent d'écrire :

$$(S\Phi_2)^{(2)}(x) = \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) \sin t \, dt$$

$$= \int_0^\infty -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) \sin t \, dt$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)(-\sin t)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)(-\cos t)\, dt$$

Comme $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) = \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2} \longrightarrow 0 \quad (t \to +\infty)$, on aura :

$$(S\Phi_2)^{(2)}(x) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)\cos t \, dt = \left[\frac{t}{x^2+t^2}.\cos t\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{t}{x^2+t^2} \sin t \, dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{t}{x^2+t^2} \sin t \, dt = S\Phi_2(x)$$

NB : Tous les crochets $[\ \ ]_0^\infty$ et les intégrales $\int_0^\infty$ écrits ci-dessus convergent, ce qui rend l'emploi de la formule d'intégration par parties licite

II.2.c

Les solutions de $y''-y=0$ sont de la forme $y = a e^x + b e^{-x}$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et $x>0$. Ainsi :

$$\boxed{S\Phi_2(x) = a e^x + b e^{-x}}$$

et il reste à déterminer les constantes a et b.

II.3.a Vu II.1 :

$$\left|\int_0^T \frac{t\sin t}{x^2+t^2}\,dt\right| \leqslant \frac{T}{x^2+T^2} + \int_0^T \frac{|x^2-t^2|}{(x^2+t^2)^2}\,dt$$

Supposons x fixé et $T > x$.

$$\int_0^T \frac{|x^2-t^2|}{(x^2+t^2)^2}\,dt = \int_0^x \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}\,dt + \int_x^T \frac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2}\,dt$$

$$= \int_0^x \frac{dt}{x^2+t^2} + \int_0^x \frac{-2t^2}{(x^2+t^2)^2}\,dt + \int_x^T \frac{dt}{x^2+t^2} + \int_x^T \frac{-2x^2}{(x^2+t^2)^2}\,dt$$

$$\leqslant \int_0^T \frac{dt}{x^2+t^2} = \frac{1}{x}\operatorname{Arctan}\frac{T}{x}$$

de sorte que $\left|\int_0^T \frac{t\sin t}{x^2+t^2}\,dt\right| \leqslant \frac{T}{x^2+T^2} + \frac{1}{x}\operatorname{Arctan}\frac{T}{x}$

En passant à la limite pour T tendant vers $+\infty$,

$$\left|\int_0^\infty \frac{t\sin t}{x^2+t^2}\,dt\right| \leqslant \frac{\pi}{2x}$$

d'où l'on déduit $\boxed{\lim_{x\to+\infty} S\Phi_2(x) = 0}$

II.3.b

* Par intégration par parties : $\int_{\frac{\pi}{2}}^A \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{-\cos A}{A} - \int_{\frac{\pi}{2}}^A \frac{\cos t}{t^2}\,dt$.

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ est absolument convergente et $\lim_{A\to+\infty} \frac{\cos A}{A} = 0$, de sorte que $\lim_{A\to+\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^A \frac{\sin t}{t}\,dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$.

$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t}\,dt$ converge en 0 puisque $\lim_{t\to 0_+} \frac{\sin t}{t} = 1$.

Finalement $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ est convergente.

$$* \int_0^{\infty} \frac{t \sin t}{x^2+t^2}\, dt - \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_0^{\infty} \frac{-x^2 \sin t}{t(x^2+t^2)}\, dt = -\int_0^{\infty} \frac{\sin(x\lambda)}{\lambda(\lambda^2+1)}\, d\lambda$$

par le changement de variable $t = x\lambda$.

* Cette égalité entraîne :

$$\left| \int_0^{\infty} \frac{t \sin t}{x^2+t^2}\, dt - \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \right| \leqslant \int_0^{\infty} \frac{x\lambda}{\lambda(\lambda^2+1)}\, d\lambda = x \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2+1}$$

et prouve que $\lim\limits_{x \to 0_+} S\Phi_2(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$

III.3.c Posons $S\Phi_2(x) = y = a e^{x} + b e^{-x}$. On doit avoir :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0_+} y = a + b = \frac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} y = 0 \end{cases}$$, donc $a = 0$ puis $b = \frac{\pi}{2}$.

On a ainsi : $\boxed{S\Phi_2(x) = \frac{\pi}{2} e^{-x}}$

III.1.a

* Récurrence sur k : $T^1 f(x) = -x f'(x)$ donc $\lambda_{1,1} = -1$.

Si $T^k f(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_{k,i}\, x^i f^{(i)}(x)$, on aura :

$$\begin{aligned} T^{k+1} f(x) &= -x \left(T^k f(x) \right)' \\ &= -x \sum_{i=1}^{k} \lambda_{k,i} \left(i x^{i-1} f^{(i)}(x) + x^i f^{(i+1)}(x) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} - i \lambda_{k,i}\, x^i f^{(i)}(x) - \lambda_{k,i}\, x^{i+1} f^{(i+1)}(x) \end{aligned}$$

qui est bien de la forme $\sum\limits_{i=1}^{k+1} \lambda_{k+1,i}\, x^i f^{(i)}(x)$. La récurrence aboutit

* Si $\Phi \in E$, $T^k S\Phi(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_{k,i}\, x^i (S\Phi)^{(i)}(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_{k,i}\, x^i \int_0^{\infty} \frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\frac{t}{x^2+t^2} \right) \Phi(t)\, dt$

(d'après I.3.e)

d'où $T^k S\Phi(x) = \int_0^\infty \sum_{i=1}^{k} \lambda_{k,i}\, x^i \frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) \Phi(t)\, dt$

$= \int_0^\infty T_x^k\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) \Phi(t)\, dt$ comme prévu.

III.1.b

Récurrence sur n :

* Si $n=1$, $L_1 S\Phi(x) = T\circ\left(I - \frac{T^2}{4}\right) S\Phi(x) = \left(T - \frac{T^3}{4}\right) S\Phi(x)$

$= T(S\Phi(x)) - \frac{1}{4} T^3(S\Phi(x))$

$= \int_0^\infty T_x\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)\Phi(t)\,dt - \frac{1}{4}\int_0^\infty T_x^3\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)\Phi(t)\,dt$

d'après III.1.a.

Donc $L_1 S\Phi(x) = \int_0^\infty L_{1,x}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)\Phi(t)\,dt$ en réassociant les morceaux.

* Montrons la formule au rang $n+1$:

Les endomorphismes T, $I - \frac{T^2}{4}$, ..., $I - \frac{T^2}{4(n+1)^2}$ commutent entre eux 2 à 2 (car I et T commutent entre eux) donc :

$L_{n+1} S\Phi(x) = \left(I - \frac{T^2}{4(n+1)^2}\right)\circ L_n S\Phi(x)$

$= \left(I - \frac{T^2}{4(n+1)^2}\right)\left[\int_0^\infty L_{n,x}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)\Phi(t)\,dt\right]$

d'après l'hypothèse récurrente.

Il suffit d'appliquer III.1.a et de reconstituer $L_{n+1,x}$ sous le signe $\int$ pour constater l'aboutissement de cette récurrence.

III.2.a

$\left(I - \frac{T^2}{4}\right)(f)(x) = f(x) - \frac{1}{4} T^2(f)(x)$, et il suffit de remplacer :

$$T^2(f)(x) = T(-x f'(x)) = -x\,(-x f'(x))' = -x\,(-f'(x) - x f''(x))$$

pour obtenir la formule demandée.

III.2.b

$$L_{1,x}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) \doteq T_x \circ \left(I - \frac{T_x^2}{4}\right)\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)$$

$$= T_x\left[\frac{t}{x^2+t^2} - \frac{1}{4}\left(x \cdot \frac{-2xt}{(x^2+t^2)^2} + x^2\left(\frac{-2t}{(x^2+t^2)^2} + \frac{8x^2t}{(x^2+t^2)^3}\right)\right)\right]$$

$$= T_x\left[\frac{3x^2t^3+t^5}{(x^2+t^2)^3}\right]$$

$$= -x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3x^2t^3+t^5}{(x^2+t^2)^3}\right)$$

$$= \frac{12x^4t^3}{(x^2+t^2)^4}$$

Il suffit d'appliquer III.1.b :

$$L_1 S\,\Phi(x) = \int_0^\infty L_{1,x}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)\Phi(t)\,dt = 12\int_0^\infty \frac{x^4t^3}{(x^2+t^2)^4}\Phi(t)\,dt$$

III.3.a $*\left(I - \frac{T_x}{2n}\right)(u^{2n}) = u^{2n} - \frac{1}{2n}\left(-x\frac{\partial u^{2n}}{\partial x}\right) = u^{2n} + x\,u^{2n-1}\frac{\partial u}{\partial x}$

Comme $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2}$, on obtient :

$$\left(I - \frac{T_x}{2n}\right)(u^{2n}) = u^{2n} + x\,u^{2n-1}\frac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2} = u^{2n} + u^{2n}\frac{t^2-x^2}{x^2+t^2} = \frac{u^{2n}\cdot 2t^2}{x^2+t^2}$$

$$* \left(I+\frac{T_x}{2n}\right)\left(\frac{u^{2n}}{x^2+t^2}\right) = \left(I+\frac{T_x}{2n}\right)\left(\frac{u^{2n+1}}{x}\right) = \frac{u^{2n+1}}{x} + \frac{1}{2n}(-x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^{2n+1}}{x}\right)$$

$$= \frac{u^{2n+1}}{x} - \frac{x}{2n} \cdot \frac{(2n+1)u^{2n} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot x - u^{2n+1}}{x^2}$$

Comme $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2} = \frac{1}{x^2+t^2} - \frac{2x^2}{(x^2+t^2)^2} = \frac{u}{x} - \frac{2x^2}{\frac{x^2}{u^2}} = \frac{u}{x} - 2u^2$,

on obtient :

$$\left(I+\frac{T_x}{2n}\right)\left(\frac{u^{2n}}{x^2+t^2}\right) = \frac{u^{2n+1}}{x} - \frac{1}{2nx}\left((2n+1)u^{2n}\left(\frac{u}{x}-2u^2\right).x - u^{2n+1}\right)$$

$$= \boxed{\frac{2n+1}{n}\, u^{2n+2}}$$

* On déduit :

$$\left(I-\frac{T_x^2}{4n^2}\right)(u^{2n}) = \left(I+\frac{T_x}{2n}\right)\left(I-\frac{T_x}{2n}\right)(u^{2n})$$

$$= \left(I+\frac{T_x}{2n}\right)\left[\frac{2t^2u^{2n}}{x^2+t^2}\right]$$

$$= 2t^2 . \left(I+\frac{T_x}{2n}\right)\left(\frac{u^{2n}}{x^2+t^2}\right)$$

$$= \boxed{2t^2 . \frac{2n+1}{n} . u^{2n+2}}$$

III.3.b * Récurrence sur n. La formule, pour $n=1$, a été prouvée au III.2.b. Supposons la vraie jusqu'au rang n, alors :

$$L_{n+1} S\,\Phi(x) = \left(I - \frac{T^2}{4(n+1)^2}\right) L_n S\,\Phi(x)$$

$$= \frac{2(2n+1)!}{(n!)^2}\left(I - \frac{T^2}{4(n+1)^2}\right)\int_0^\infty t^{2n+1} u^{2n+2}\,\Phi(t)\,dt \qquad (*)$$

En commutant T^k et l'intégrale (III.1.a), en utilisant la linéarité de T et la formule III.3.a, on obtient :

$$\left(I - \frac{T^2}{4(n+1)^2}\right)\int_0^\infty t^{2n+1} u^{2n+2}\,\Phi(t)\,dt = \int_0^\infty t^{2n+1}\Phi(t)\left[2t^2 \cdot \frac{2(n+1)+1}{n+1}\,u^{2(n+1)+2}\right]dt$$

$$= \frac{2(2n+3)}{n+1}\int_0^\infty t^{2n+3} u^{2n+4}\,\Phi(t)\,dt$$

que l'on remplace dans $(*)$:

$$L_{n+1} S\,\Phi(x) = \frac{2(2n+3)!}{((n+1)!)^2}\int_0^\infty t^{2n+3} u^{2n+4}\,\Phi(t)\,dt$$

La récurrence est prouvée.

* Le changement de variable $t = \lambda x$ donne :

$$\int_0^\infty t^{2n+1} u^{2n+2}\,\Phi(t)\,dt = \int_0^\infty \lambda^{2n+1} x^{2n+1}\,\frac{x^{2n+2}}{(x^2+(\lambda x)^2)^{2n+2}}\,\Phi(\lambda x)\,.x\,d\lambda$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1}\frac{\Phi(\lambda x)}{1+\lambda^2}\,d\lambda$$

ce qui prouve la seconde formule de cette question.

IV.1.a Il suffit de constater que l'intégrant est équivalent à $\dfrac{2^{n+1}}{\lambda^{2n+3}}$ et que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^{2n+3}}$ converge si $n \geq 0$.

IV.1.b Soit $\lambda = \tan\frac{\theta}{2}$. Alors :

$$I_n = \int_0^\infty \frac{(2\lambda)^{2n+1}}{(1+\lambda^2)^{2n+2}}\, d\lambda = \int_0^\pi 2^{2n} \tan^{2n+1}\frac{\theta}{2} \cdot \cos^{4n+2}\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$I_n = 2^{2n}\int_0^\pi \sin^{2n+1}\frac{\theta}{2} \cdot \cos^{2n+1}\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$\boxed{I_n = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^{2n+1}\theta\, d\theta}$$

Par intégration par parties :

$$I_n = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^{2n}\theta \cdot \sin\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\left[\left[\sin^{2n}\theta\,(-\cos\theta)\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2n\sin^{2n-1}\theta \cdot \cos\theta\,(-\cos\theta)\,d\theta\right]$$

$$= n\int_0^\pi \sin^{2n-1}\theta \cdot \cos^2\theta\, d\theta \qquad (\text{si } n \geq 1)$$

$$= n\int_0^\pi \sin^{2n-1}\theta \cdot (1-\sin^2\theta)\, d\theta$$

$$I_n = 2n\, I_{2n-1} - 2n\, I_n$$

Donc $\boxed{I_{n-1} = \dfrac{2n+1}{2n} I_n \quad \text{si } n \geq 1}$

On en déduit :

$$I_n - I_{n+1} = \frac{2n+3}{2n+2} I_{n+1} - I_{n+1} = \frac{1}{2n+2} I_{n+1}$$

IV.1.c $I_0 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = 1$

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2(n-1)}{2n-1} \cdot \frac{2(n-2)}{2n-3} \cdots \frac{2}{3} \cdot I_0$$

$$= \frac{[2n \,.\, 2(n-1) \,.\, 2(n-2) \ldots 2]^2}{(2n+1)!}$$

$$\boxed{I_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}}$$ de sorte que $\boxed{K_n . I_n = 1}$

IV.2.a $v_n = \theta^{2n+1} K_n$ est positif pour tout $n \in \mathbb{N}$ et :

$$\lim \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim \frac{\theta^2 . (2n+3)(2n+2)}{4\,(n+1)^2} = \theta^2$$

La règle de d'Alembert pour les suites positives énonce que si $\lim \frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$, alors $\lim v_n = 0$, comme on peut le vérifier directement : l'hypothèse entraîne l'existence de N tel que, si $n \geq N$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} < A$ où A est un nbre fixé entre θ^2 et 1. Alors $0 \leq v_n < A^{n-N} v_N$ et $\lim_{n\to+\infty} A^{n-N} = 0$. CQFD

IV.2.b Posons $\varphi(\lambda) = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$. Alors $\varphi'(\lambda) = 2\,\frac{1-\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}$ permet d'obtenir le tableau de variation :

λ	0		1		$+\infty$
φ'		+		−	
φ	0	↗	1	↘	0

Ainsi, pour tout $\lambda \in [0,a]$, où $a \in]0,1[$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que $\varphi(\lambda) \leq \theta$, donc $\left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} \leq \theta^{2n+1}$. Alors :

$$\left| K_n \int_0^a \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} f(\lambda)\, d\lambda \right| \leq \underbrace{\theta^{2n+1} K_n}_{\substack{\to 0 \\ (n\to+\infty)}} \int_0^a |f(\lambda)|\, d\lambda$$

donc $\lim_{n\to+\infty} K_n \int_0^a \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} f(\lambda)\, d\lambda = 0$.

IV.3 $\varphi(\lambda)$ décroît strictement sur $[1,+\infty[$ et $\varphi(1)=1$, donc $\lambda \geq b > 1$ entraîne $\varphi(\lambda) \leq \varphi(b) < 1$ et :

$$\left| K_n \int_b^{+\infty} \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} g(\lambda)\, d\lambda \right| \leq \underbrace{K_n \left(\varphi(b)\right)^{2n+1}}_{\to 0} \int_b^{+\infty} |g(\lambda)|\, d\lambda$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n \int_b^{+\infty} \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} g(\lambda)\, d\lambda = 0$

IV.4 Ici $0<a<1<b$,

$$K_n \int_0^{\infty} \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} \frac{\Phi(\lambda x)-\Phi(x)}{1+\lambda^2}\, d\lambda = \underbrace{K_n \int_0^a}_{\substack{\to 0 \\ \text{d'après IV.2}}} + \underbrace{K_n \int_a^b} + \underbrace{K_n \int_b^{+\infty}}_{\to 0 \text{ d'après IV.3}}$$

car $\int_b^{\infty} \frac{\Phi(\lambda x)-\Phi(x)}{1+\lambda^2}\, d\lambda$ est absolument convergente, Φ étant bornée sur $[0,+\infty[$ et $\int_b^{\infty} \frac{2 \operatorname{Sup} |\Phi(x)|}{1+\lambda^2}\, d\lambda$ étant convergente.

Φ étant continue en x, on peut choisir a et b tels que $0<a<1<b$ et $\lambda \in [a,b] \Rightarrow |\Phi(\lambda x)-\Phi(x)| < \varepsilon$, et alors :

$$\left| K_n \int_a^b \right| \leq K_n \int_a^b \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} \frac{\varepsilon}{1+\lambda^2}\, d\lambda$$

$$\leq \varepsilon K_n \int_a^b \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} \cdot \frac{d\lambda}{1+\lambda^2}$$

$$\leq \varepsilon K_n I_n = \varepsilon$$

Cela montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n \int_0^{\infty} \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} \frac{\Phi(\lambda x)-\Phi(x)}{1+\lambda^2}\, d\lambda = 0$, et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n S\Phi(x) = \Phi(x)$ si l'on se réfère à la formule du IV.1.c

FIN.

CAPES EXTERNE 1993 – Première épreuve

Une proposition de corrigé

Par Antoine Delcroix (IUFM de Guadeloupe)

Notation.– On posera

$$\Lambda (x,t) = t/\left(x^2+t^2\right), \text{ pour tout } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash \{(0,0)\}. \tag{1}$$

La fonction Λ sera utilisée notamment dans la première partie (questions 1.3.c. et suivantes), la deuxième partie (questions 2.2.a. et 2.2.b.) et la troisième partie (questions 3.1.a. et 3.1.b.).

1 Première partie

1.1 Appartenance à E

1.1.a. La fonction f_1, constante égale à 1 sur $[0,+\infty[$, est continue et bornée sur $[0,+\infty[$. Ainsi, elle est candidate à appartenir à E. Cependant, pour $x>0$ fixé, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$ est divergente, puisque $\dfrac{t}{x^2+t^2} \sim \dfrac{1}{t}$ pour $t \to +\infty$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ est divergente. Ainsi, $f \notin E$.

1.1.b. La fonction ϕ_1 est continue sur $[0,+\infty[$, manifestement bornée par 1 sur $[0,+\infty[$. De plus, pour $x>0$ fixé, on a

$$\forall t \in [0,+\infty[\,,\quad 0 \leq \frac{t}{1+t^2}\frac{t}{x^2+t^2} \leq \frac{1}{x^2+t^2}.$$

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{-2}\,\mathrm{d}t$ est convergente, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left(x^2+t^2\right)^{-1}\mathrm{d}t$ converge, ainsi que

$$\int_1^{+\infty} \phi_1(t)\left(x^2+t^2\right)^{-1}\,\mathrm{d}t.$$

Donc $\phi_1 \in E$.

1.1.c. Comme ψ admet une limite finie l en $+\infty$, il existe, en particulier, $A>0$ tel que

$$\forall t \geq A, \quad |\psi(t) - l| \leq 1.$$

Comme ψ est continue sur $[0,A]$, elle y est uniformément continue, et donc bornée. Il existe $M>0$ tel que

$$\forall t \in [0,A]\,, \quad |\psi(t)| \leq M.$$

On a donc

$$\forall t \in [0,+\infty[\,, \quad |\psi(t)| \leq \max\left(|l|+1, M\right).$$

Ainsi, ψ est bornée sur $[0,+\infty[$.

Cas où $l \neq 0$.– Soit $x>0$. On a $\dfrac{t\psi(t)}{x^2+t^2} \sim \dfrac{l}{t}$ pour $t \to +\infty$. La fonction $t \mapsto \dfrac{t\psi(t)}{x^2+t^2}$ garde un signe constant au voisinage de $+\infty$ (celui de l). Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ est divergente, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{t\psi(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$ et donc de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\psi(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$. Ainsi $\psi \notin E$.

Cas où $l=0$.– On doit s'attendre à ce que la réponse soit non. On fait appel aux exemples classiques, en pensant aux intégrales de type intégrales de Bertrand. Prenons ψ définie par

$$\forall t \in [0,\mathrm{e}]\,,\quad \psi(t) = 1\ ; \quad \forall t \in [\mathrm{e},+\infty[\,,\quad \psi(t) = 1/\ln t.$$

La définition assure la continuité de ψ sur $[0,+\infty[$. On a, de plus, $\lim_{t\to+\infty}\psi(t)=0$. Ainsi, ψ est bornée sur $[0,+\infty[$, d'après ce qui précède. On a

$$\forall t \in [\mathrm{e},+\infty[\,,\quad \frac{t\psi(t)}{x^2+t^2} = \frac{t\psi(t)}{(x^2+t^2)\ln t} \sim \frac{1}{t\ln t} \text{ pour } t \to +\infty.$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$ est divergente. (Soit on le voit comme une conséquence de l'étude des intégrales de Bertrand, soit on remarque que $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{y} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathrm{e}}^{y} \frac{u'(t)}{u(t)}\,\mathrm{d}t$ avec $u(t) = \ln t$. On a alors $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{y} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t = \ln(\ln y) \to +\infty$ pour $t \to +\infty$.) Ainsi, $\psi \notin E$.

1.2 Etude de Sϕ_1

1.2.a. On peut soit procéder par identification, soit considérer l'expression du membre de gauche de l'identité proposée comme une fraction rationnelle en t. Par exemple, en identifiant, on obtient les conditions nécessaires suivantes sur a et b

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash (0,0), \quad t^2 = at^2 \ ; \quad -t^2x^2 = ax^2 + bx^2\left(1+t^2\right).$$

(On doit exclure $(x,t) = (0,0)$ qui annule x^2+t^2.) On en déduit $a = 1$ et $b = -1$. On vérifie alors que ces deux valeurs conviennent.
On a

$$\left(1-x^2\right) S\phi_1(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t\phi_1(t)\left(1-x^2\right)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\left(1-x^2\right)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

(Il n'y a pas de problème de convergence pour les intégrales du membre de droite.) Pour tout $x > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2x}, \tag{2}$$

(Soit on dispose d'un outil de calcul formel donnat ce résultat, soit on effectue le changement de variable $t = xu$, en le justifiant pour se ramener à $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1+u^2\right)^{-1} \mathrm{d}u$.) Il vient

$$\forall x \in \left]0,+\infty\right[\setminus \{1\}, \quad S\phi_1(x) = \frac{1}{1-x^2}\frac{\pi}{2}(1-x) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+x}. \tag{3}$$

1.2.b. On a $S\phi_1(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\,\mathrm{d}t$. Le changement de variable $t = \tan\theta$ est légitime puisque la fonction tan est un C^1-difféomorphisme de $[0,\pi/2[$ sur $[0,+\infty[$ On a alors $\mathrm{d}t = \left(1+\tan^2\theta\right)\mathrm{d}\theta = \left(1+t^2\right)\mathrm{d}\theta$. D'où

$$S\phi_1(1) = \int_0^{\pi/2} \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}.$$

1.2.c. D'après la question 1.2.b., on remarque que l'expression (3) est valable pour tout $x \in \left]0,+\infty\right[$. Ainsi, $S\phi_1$ est une fonction définie par une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$. Ainsi, $S\phi_1$ est de classe C$^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et appartient à C$^\infty$.

1.3 Appartenance de Sϕ à C$^\infty$

On remarque que pour $\phi \in E$, $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x)$ est bien définie comme intégrale sur un compact d'une fonction continue.

1.3.a. Soit $x \in \left]0,+\infty\right[$ et $N \in \mathbb{N}$. On a

$$S_N(x) := \sum\nolimits_{n=0}^{N} u_n(x) = \int_0^N \frac{t\phi(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t,$$

par la relation de Chasles. Comme, par hypothèse, l'intégrale $S\phi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\phi(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, on a en particulier $\lim_{N\to+\infty} S_N(x) = S\phi(x)$, par composition de limite. Ainsi, la série $\sum u_n(\cdot)$ converge sur $]0,+\infty[$ vers $S\phi(\cdot)$

1.3.b. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction

$$h : \left]0,+\infty\right[\times [n,n+1] \to \mathbb{R}, \quad (x,t) \mapsto \frac{t\phi(t)}{x^2+t^2}$$

est clairement continue sur $]0,+\infty[\times[n,n+1]$. De plus, la fonction

$$]0,+\infty[\times[n,n+1]\to\mathbb{R}\ ,\quad (x,t)\mapsto\frac{t}{x^2+t^2}$$

est définie à l'aide d'une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[\times[n,n+1]$. Elle est donc de classe C^∞ sur $]0,+\infty[\times[n,n+1]$. Il en résulte en particulier que la fonction h admet des dérivées partielles à tout ordre par rapport à x, et que, pour tout $m\in\mathbb{N}$, la fonction

$$\frac{\partial^m h}{\partial x^m}:]0,+\infty[\times[n,n+1]\to\mathbb{R}\ ,\quad (x,t)\mapsto\frac{\partial^m h}{\partial x^m}(x,t)$$

est continue. Alors, la fonction u_n est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$, par application du classique théorème de dérivation sous le signe intégral, pour les fonctions définies par une intégrale de Riemann. (Cette intégrale est donc prise sur un segment.)

1.3.c. Rappelons que l'on a posé

$$\Lambda(x,t)=t/\left(x^2+t^2\right),\ \text{ pour tout }\ (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\backslash\{(0,0)\}\,.$$

Pour déterminer α et β, on peut, comme dans le 1.2.a., soit procéder par identification, soit considérer l'expression du membre de gauche de l'identité proposée comme une fraction rationnelle en t. Par exemple, en identifiant, on obtient les conditions nécessaires suivantes sur a et b

$$\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\backslash\{(0,0)\}\,,\quad 0=x(\alpha+\beta)\ \ ;\ \ \imath t(\alpha-\beta)=t.$$

D'où, en premier lieu, $\beta=-\alpha$. Avec la deuxième équation, il vient $\alpha=-\imath/2$ et $\beta=\imath/2$. On vérifie que ces valeurs conviennent.
On a

$$\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\backslash\{(0,0)\}\,,\quad \frac{\partial^k}{\partial x^k}\Lambda(x,t)=\frac{\imath}{2}\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{1}{x+\imath t}\right)-\frac{\imath}{2}\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{1}{x-\imath t}\right)$$

Une récurrence immédiate montre alors que

$$\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\backslash\{(0,0)\}\,,\quad \frac{\partial^k}{\partial x^k}\Lambda(x,t)=\frac{(-1)^k\,k!\imath}{2}\left(\frac{1}{x+\imath t}\right)^{k+1}-\frac{(-1)^k\,k!\imath\imath}{2}\left(\frac{1}{x-\imath t}\right)^{k+1}.$$

Comme $|x\pm\imath t|=\sqrt{x^2+t^2}$ pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on en déduit que

$$\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\backslash\{(0,0)\}\,,\quad \left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}\Lambda(x,t)\right|\le\frac{k!}{(x^2+t^2)^{(k+1)/2}}.$$

1.3.d. Le théorème employé dans la question 1.3.b. indique que, de plus, on a

$$\forall x\in\,]0,+\infty[\,,\quad u_n^{(k)}(x)=\int_n^{n+1}\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t=\int_n^{n+1}\frac{\partial^k\Lambda}{\partial x^k}(x,t)\,\phi(t)\,\mathrm{d}t$$

où h (resp. Λ) est définie dans la question 1.3.b. (resp. 1.3.c.). Soit M_ϕ un majorant de $|\phi|$ sur $]0,+\infty[$. On a, en utilisant la question 1.3.c.,

$$\forall(x,t)\in\,]0,+\infty[^2\,,\quad \left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}\Lambda(x,t)\,\phi(t)\right|\le\frac{M_\phi k!}{(x^2+t^2)^{(k+1)/2}}.\tag{4}$$

D'où

$$\forall x\in\,]0,+\infty[\,,\quad \left|u_n^{(k)}(x)\right|\le M_\phi k!\int_n^{n+1}\frac{1}{(x^2+t^2)^{(k+1)/2}}\,\mathrm{d}t.$$

On pose $A_k=M_\phi k!$. Comme, pour chaque $t\in[n,n+1]$ la fonction $x\mapsto\left(x^2+t^2\right)^{-(k+1)/2}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, il vient

$$\forall x\in[a,+\infty[\,,\quad \left|u_n^{(k)}(x)\right|=A_k\int_n^{n+1}\frac{1}{(a^2+t^2)^{(k+1)/2}}\,\mathrm{d}t.=:v_n.$$

De plus, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(a^2+t^2\right)^{-(k+1)/2} \mathrm{d}t$ converge, puisque $k \geq 1$. Alors, la suite

$$N \mapsto \int_0^N \left(a^2+t^2\right)^{-(k+1)/2} \mathrm{d}t$$

converge, ce qui revient à la convergence de la série $\sum v_n$. Ainsi, la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}(\cdot)$ converge normalement sur $[a,+\infty[$. On a de plus

$$\forall x \in [a,+\infty[\,,\ \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(x) = \lim_{N\to+\infty} \int_0^N \frac{\partial^k \Lambda}{\partial x^k}(x,t)\,\phi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^k \Lambda}{\partial x^k}(x,t)\,\phi(t)\,\mathrm{d}t.$$

(La convergence absolue de cette dernière intégrale est justifiée par l'inégalité (4).)

1.3.e. Soit $a>0$. On sait que :
– la série $\sum u_n(\cdot)$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ avec pour somme $S\phi(\cdot)$, d'après la question 1.3.a. ;
– pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum u_n^{(k)}(\cdot)$ converge normalement sur $]a,+\infty[$, d'après la question 1.3.d., avec de plus

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad \forall x \in\,]a,+\infty[\,,\ \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^k \Lambda}{\partial x^k}(x,t)\,\phi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Alors, la somme $S\phi(\cdot)$ est une fonction de classe C^∞ sur $]a,+\infty[$.
D'après ce qui précède, la fonction $S\phi(\cdot)$, définie sur $]0,+\infty[$, est de classe C^∞ sur chaque intervalle ouvert $]a,+\infty[$ avec $a>0$. Elle est donc de classe C^∞ sur leur réunion $\cup_{a>0}\,]a,+\infty[\ =\ ]0,+\infty[$. Donc $S\phi(\cdot) \in \mathrm{C}^\infty$.

2 Deuxième partie

2.1 Définition d'une fonction ϕ_2, élement de E

Soit $x \in\,]0,+\infty[$ fixé. La fonction ϕ_2 et la fonction $\Delta(x,\cdot) = t \mapsto t/\left(x^2+t^2\right)$ sont de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$, donc en particulier de classe C^1. Ceci justifie l'intégration par partie proposée. On pose, pour cette seule question, $u'(t) = \phi_2(t) = \sin t$, $v(t) = \Delta(x,t)$. On choisit $u(t) = -\cos t$ et l'on a

$$v'(t) = \left(x^2-t^2\right)/\left(x^2+t^2\right)^2.$$

D'où, pour tout $T>0$,

$$\int_0^T \frac{t\sin t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t\cos t}{x^2+t^2}\right]_0^T + \int_0^T \frac{\left(x^2-t^2\right)\cos t}{\left(x^2+t^2\right)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{T\cos T}{x^2+T^2} + \underline{\int_0^T \frac{\left(x^2-t^2\right)\cos t}{\left(x^2+t^2\right)^2}\,\mathrm{d}t}.$$

On a

$$\forall t \in [0,+\infty[\,,\quad \left|\frac{\left(x^2-t^2\right)\cos t}{\left(x^2+t^2\right)^2}\right| \leq \frac{1}{x^2+t^2}. \tag{5}$$

Ainsi l'intégrale soulignée est absolument convergente. Comme $\lim_{T\to+\infty}(T\cos T)/\left(x^2+T^2\right) = 0$, on en déduit la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t\sin t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$. On a de plus

$$S\phi_2(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t\sin t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\left(x^2-t^2\right)\cos t}{\left(x^2+t^2\right)^2}\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

2.2 Détermination et intégration d'une équation différentielle dont ϕ_2 est solution

2.2.a. Un calcul direct montre que, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x}\Lambda(x,t) = \frac{-2tx}{\left(x^2+t^2\right)^2}\ ;\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Lambda(x,t) = \frac{-2t^3+6tx^2}{\left(x^2+t^2\right)^3}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\Lambda(x,t) = \frac{x^2-t^2}{\left(x^2+t^2\right)^2}\ ;\quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Lambda(x,t) = \frac{2t^3-6tx^2}{\left(x^2+t^2\right)^3}.$$

D'où l'égalité demandée.

2.2.b. Soit $x \in]0,+\infty[$ fixé. D'après la question 2.1, on a

$$\begin{aligned}\int_0^T \frac{t\sin t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^T \Lambda(x,t)\sin t\,\mathrm{d}t &= \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\Lambda(x,t)\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial t}\Lambda(x,t)\sin t\right]_0^T - \int_0^T \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Lambda(x,t)\sin t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\Lambda(x,T)\sin T - \underline{\int_0^T \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Lambda(x,t)\sin t\,\mathrm{d}t}.\end{aligned}$$

D'après les calculs faits à la question 2.2.a., on a $\lim_{T\to+\infty}\dfrac{\partial}{\partial t}\Lambda(x,T)\sin T = 0$ et l'intégrale soulignée converge absolument. D'après l'égalité montrée en 2.2.a., on en déduit

$$S\phi_2(x) = \int_0^{+\infty}\frac{t\sin t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Lambda(x,t)\sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Lambda(x,t)\sin t\,\mathrm{d}t = (S\phi_2)''(x),$$

d'après la question 1.3.e. Ainsi, $S\phi_2(\cdot)$ est bien solution de l'équation différentielle $y''-y=0$.

2.2.c. En écrivant éventuellement l'équation caractéristique de l'équation différentielle $y''-y=0$, on voit que $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est solution de cette équation si, et seulement si, il existe $(C,D)\in\mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall x \in]0,+\infty[,\quad f(x) = C\mathrm{e}^x + D\mathrm{e}^{-x}.$$

2.3 Détermination explicite de ϕ_2

2.3.a. Soit $x \in]0,+\infty[$ fixé. D'après l'égalité (6) obtenue à la question 2.1., on a

$$|S\phi_2(x)| \le \left|\int_0^{+\infty}\frac{(x^2-t^2)\cos t}{(x^2+t^2)^2}\,\mathrm{d}t\right| \underset{(*)}{\le} \underline{\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t} = \frac{\pi}{2x}.$$

l'inégalité $(*)$ étant vraie d'après la relation (5). (L'intégrale soulignée a été calculée à la question 1.2.a., relation (2).)

Comme $\lim_{x\to+\infty}\pi/(2x) = 0$, on a immédiatement $\lim_{x\to+\infty} S\phi_2(x) = 0$.

2.3.b. Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.– Comme $\lim_{t\to 0}((\sin t)/t) = 0$, la fonction

$$\sigma : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\quad t \mapsto (\sin t)/t$$

se prolonge par continuité en posant $\sigma(0)=1$. Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt$ est convergente.

De plus, on a :

– pour tout $y \in [\pi,+\infty[$, $\left|\displaystyle\int_\pi^y \sin t\,\mathrm{d}t\right| \le 2$;

– la fonction $t\mapsto 1/t$ est continue et décroissante sur $[\pi,+\infty[$ de limite nulle en $+\infty$.

La règle d'Abel entraîne alors la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$ converge.

Remarque.– On peut également montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$ par une intégration par parties. Le lecteur s'inspirera de la question 2.1.

Egalité.– Soit $x \in]0,+\infty[$. Comme d'après la question 2.1, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\sin t}{x^2+t^2}\,dt$ converge, on a, en utilisant la linéarité des intégrales généralisées convergentes,

$$\int_0^{+\infty}\frac{t\sin t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty}\frac{x^2\sin t}{t(x^2+t^2)}\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x\lambda)}{\lambda(1+\lambda^2)}\,\mathrm{d}\lambda. \tag{7}$$

La dernière égalité est justifiée, car le changement de variable $t = x\lambda$ est linéaire et donc, a fortiori, c'est un C^1-difféomorphisme.

Limite.– On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \lambda \in]0,+\infty[\,, \qquad \left|\frac{\sin(x\lambda)}{\lambda(1+\lambda^2)}\right| \leq \left|\frac{x}{1+\lambda^2}\right|.$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1+\lambda^2\right)^{-1} \mathrm{d}\lambda$ est convergente (et de valeur $\pi/2$) On en déduit que

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x\lambda)}{\lambda(1+\lambda^2)} \mathrm{d}\lambda\right| \leq \frac{\pi x}{2}.$$

Ainsi, le premier membre de l'inégalité ci-dessus tend vers 0, pour x tendant vers 0. En utilisant l'égalité (7), il vient

$$\lim_{x\to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{t\sin t}{x^2+t^2} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t.$$

2.3.c. D'après la question 2.2.c., il existe $(C,D) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall x \in]0,+\infty[\,, \quad S\phi_2(x) = C\mathrm{e}^x + D\mathrm{e}^{-x}.$$

Comme d'après la question 2.3.a., on a $\lim_{x\to+\infty} S\phi_2(x) = 0$, il vient nécessairement $C = 0$. (Sinon, comme $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, on aurait $|\lim_{x\to+\infty} S\phi_2(x)| = +\infty$. D'après la question 2.3.b. et le résultat admis, on a $\lim_{x\to0^+} S\phi_2(x) = \pi/2$. Mais $\lim_{x\to0^+} \mathrm{e}^{-x} = D$. Ainsi, $D = \pi/2$ et

$$\forall x \in]0,+\infty[\,, \quad S\phi_2(x) = (\pi/2)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

3 Troisième partie

3.1 Commutation de L_n et de l'intégrale

3.1.a. Expression de $T^k f$ $(f \in \mathrm{C}^\infty)$.– On démontre cette propriété par récurrence sur k.
Initialisation.– La propriété est vraie pour $k = 1$, avec $\lambda_{1,1} = -1$.
Hérédité.– Supposons la propriété vraie pour un certain $k \geq 1$. On a alors, pour tout $f \in \mathrm{C}^\infty$ et $x \in]0,+\infty[$,

$$\begin{aligned}
T^{k+1}f(x) = -x\left(T^k f\right)'(x) &= -x\sum_{i=1}^k \lambda_{k,i}\frac{d}{dx}\left(x^i f^{(i)}(x)\right) \\
&= -\sum_{i=1}^k \lambda_{k,i}\left(ix^i f^{(i)}(x) + x^{i+1}f^{(i+1)}(x)\right) \\
&= -\sum_{i=1}^k \lambda_{k,i}ix^i f^{(i)}(x) - \sum_{i=1}^k \lambda_{k,i}x^{i+1}f^{(i+1)}(x) \\
&= -\sum_{i=1}^k \lambda_{k,i}ix^i f^{(i)}(x) - \sum_{i=2}^{k+1} \lambda_{k,i-1}x^i f^{(i)}(x) \\
&= -\lambda_{k,1}xf'(x) - \sum_{i=2}^k \left(\lambda_{k,i}i + \lambda_{k,i-1}\right)x^i f^{(i)}(x) - \lambda_{k,k}x^{k+1}f^{(k+1)}(x).
\end{aligned}$$

On pose alors $\lambda_{k+1,1} = -\lambda_{k,1}$, $\lambda_{k+1,i} = -\left(\lambda_{k,i}i + \lambda_{k,i-1}\right)$, pour $i \in \{2,\ldots,k\}$ et $\lambda_{k+1,k+1} = -\lambda_{k,k}$, pour obtenir l'écriture désirée.
Expression de $T^k S\phi$ $(\phi \in E)$.– Soit $\phi \in E$ et $x \in]0,+\infty[$. On a

$$T^k S\phi(x) = \sum_{i=1}^k \lambda_{k,i}x^i S\phi^{(i)}(x).$$

Rappelons que, d'après la question 1.3.e., $S\phi^{(i)}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial^i \Lambda}{\partial x^i}(x,t)\,\phi(t)\ \mathrm{d}t$. (On rappelle que $\Lambda(x,t) = t/\left(x^2+t^2\right)$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$, voir (1).) Ainsi

$$T^k S\phi(x) = \sum_{i=1}^k \lambda_{k,i}x^i \int_0^{+\infty} \frac{\partial^i\Lambda}{\partial x^i}(x,t)\,\phi(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^k \lambda_{k,i}x^i \frac{\partial^i\Lambda}{\partial x^i}(x,t)\,\phi(t)\ \mathrm{d}t,$$

d'après la linéairté des intégrales généralisées convergentes. Une méthode analogue à celle employée au 3.1.a. montre que $T_x^k\Lambda(x,t) = \sum_{i=1}^k \lambda_{k,i}x^i\dfrac{\partial^i\Lambda}{\partial x^i}(x,t)$. D'où

$$T^k S\phi(x) = \int_0^{+\infty} T_x^k\Lambda(x,t)\,\phi(t)\ \mathrm{d}t.$$

3.1.b. Expression de L_n en fonction des T^k.– On utilise une méthode analogue au 3.1.a. On établit par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(\mu_{n,j})_j \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$L_n = \sum_{j=0}^{n} \mu_{n,j} T^{2j+1}.$$

Initialisation.– La propriété est vraie pour $n = 1$, puisque $L_1 = T \circ \left(I - (1/4)\, T^2\right)$, ce qui donne $\mu_{1,0} = 1$ et $\mu_{1,1} = -1/4$.
Hérédité.– Supposons la propriété vraie pour un certain $n \geq 1$. On a alors

$$\begin{aligned} L_{n+1} = L_n \circ \left(I - \frac{1}{4\,(n+1)^2} T^2\right) &= \sum_{j=0}^{n} \mu_{n,j} T^{2j+1} \circ \left(I - \frac{1}{4\,(n+1)^2} T^2\right) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \mu_{n,j} T^{2j+1} - \frac{1}{4\,(n+1)^2} \sum_{j=1}^{n} \mu_{n,j} T^{2j+3} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \mu_{n,j} T^{2j+1} - \frac{1}{4\,(n+1)^2} \sum_{j=1}^{n+1} \mu_{n,j-1} T^{2j+1} \\ &= \mu_{n,0} I + \sum_{j=1}^{n} \left(\mu_{n,j} - \frac{1}{4\,(n+1)^2} \mu_{n,j-1}\right) T^{2j+1} - \frac{1}{4\,(n+1)^2} \mu_{n,n} T^{2n+3}. \end{aligned}$$

On pose alors $\mu_{n+1,0} = \mu_{n,0}$, $\mu_{n+1,j} = \mu_{n,j} - \dfrac{1}{4\,(n+1)^2} \mu_{n,j-1}$ pour tout $j \in \{2, \ldots, n\}$ et $\mu_{n+1,n+1} = -\dfrac{1}{4\,(n+1)^2} \mu_{n,n}$, pour achever la récurrence.
Expression de $L_n S\phi$ ($\phi \in E$).– Soit $\phi \in E$ et $x \in]0, +\infty[$. On a

$$L_n S\phi\,(x) = \sum_{j=0}^{n} \mu_{n,j} T^{2j+1} \phi\,(x) = \sum_{j=0}^{n} \int_0^{+\infty} T_x^{2j+1} \Lambda\,(x,t)\, \phi\,(t)\; \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sum_{j=0}^{n} T_x^{2j+1} \Lambda\,(x,t)\, \phi\,(t)\; \mathrm{d}t.$$

par l'argument de linéarité déjà employé. Une méthode analogue à celle précédente montre que

$$L_{n,x} \Lambda\,(x,t) = \sum_{j=1}^{n} T_x^{2j+1} \Lambda\,(x,t)\,.$$

Ainsi $L_n S\phi\,(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} L_{n,x} \Lambda\,(x,t)\, \phi\,(t)\; \mathrm{d}t$.

3.2 Détermination de $L_1 S\phi$

3.2.a. Soit $f \in \mathrm{C}^\infty$ et $x \in]0, +\infty[$. On a $Tf(x) = -xf'\,(x)$. D'où

$$T^2 f\,(x) = -x \frac{d}{dy} \left(T\,\{y \mapsto -yf'\,(y)\}\right)(x) = xf'\,(x) + x^2 f''\,(x)\,.$$

Ainsi

$$\left(I - T^2/4\right) f\,(x) = f\,(x) - \frac{xf'\,(x) + x^2 f''\,(x)}{4} = f\,(x) - \frac{1}{4} x f'\,(x) - \frac{1}{4} x^2 f''\,(x)\,.$$

Remarque.– On en déduit que

$$\begin{aligned} T \circ \left(I - T^2/4\right) f\,(x) &= T\left\{y \mapsto \left(I - T^2/4\right) f\,(y)\right\}(x) \\ &= Tf(x) - \frac{1}{4} T\,\{y \mapsto yf'\,(y)\}\,(x) - \frac{1}{4} T\left\{y \mapsto y^2 f''\,(y)\right\}(x)\,, \end{aligned}$$

par linéarité de T. D'où

$$\begin{aligned} T \circ \left(I - T^2/4\right) f\,(x) &= -xf'\,(x) + \frac{1}{4} xf'\,(x) + \frac{1}{4} x^2 f''\,(x) + \frac{1}{2} x^2 f''\,(x) + \frac{1}{4} x^3 f^{(3)}\,(x) \\ &= -\frac{3}{4} xf'\,(x) + \frac{3}{4} x^2 f'\,(x) + \frac{1}{4} x^3 f^{(3)}\,(x)\,. \end{aligned}$$

3.2.b. D'après la question 3.1.b., on a

$$L_1 S\phi(x) = \int_0^{+\infty} L_{1,x}\Lambda(x,t)\,\phi(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} L_{1,x}\Lambda(x,t)\,\phi(t)\ \mathrm{d}t.$$

D'après la remarque finissant la question 3.2.a.,

$$L_{1,x}\Lambda(x,t) = -\frac{3}{4}x\frac{\partial}{\partial x}\Lambda(x,t) + \frac{3}{4}x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Lambda(x,t) + \frac{1}{4}x^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}\Lambda(x,t).$$

D'après la question 2.2.a., on a pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$,

$$\frac{\partial}{\partial x}\Lambda(x,t) = \frac{-2tx}{(x^2+t^2)^2}\ ; \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Lambda(x,t) = \frac{-2t^3+6tx^2}{(x^2+t^2)^3}$$

On en déduit $\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}\Lambda(x,t) = \dfrac{24t^3x-24tx^3}{(x^2+t^2)^4}$. D'où

$$L_{1,x}\Lambda(x,t) = \frac{3}{4}\frac{2tx^2}{(x^2+t^2)^2} + \frac{3}{4}\frac{-2t^3x^2+6tx^4}{(x^2+t^2)^3} + \frac{1}{4}\frac{24t^3x^4-24tx^6}{(x^2+t^2)^4} = \frac{12t^3x^4}{(x^2+t^2)^4}.$$

On a donc $L_1 S\phi(x) = 12\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^3x^4}{(x^2+t^2)^4}\phi(t)\ \mathrm{d}t$.

Remarque.– Le texte simplifie légérement le calcul, en remarquant que, dans l'expression de $\Lambda(x,t)$, le facteur t n'est pas touché par la dérivation par rapport à x. Nous avons préféré garder la référence à la fonction $\Lambda(x,t)$.

3.3 Détermination de $L_n S\phi$

3.3.a. Posons $v(x,t) = 1/\left(x^2+t^2\right)$, pour cette seule question et pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Soit t fixé. Soit $(n,x)\in\mathbb{N}^*\times\,]0,+\infty[$. On a

$$\begin{aligned}T_x\left(u^{2n}\right)(x,t) &= -x\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{2n}\right)(x,t) = -2nxu^{2n-1}(x,t)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = -2nxu^{2n-1}(x,t)\frac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2}\\ &= \frac{-2nu^{2n}(x,t)}{x^2+t^2}\left(t^2-x^2\right).\end{aligned}$$

D'où

$$\left(I-\frac{T_x}{2n}\right)\left(u^{2n}\right)(x,t) = u^{2n}(x,t)\left(1+\frac{t^2-x^2}{x^2+t^2}\right) = \frac{2t^2u^{2n}(x,t)}{x^2+t^2} = 2t^2u^{2n}(x,t)\,v(x,t).$$

Estimons maintenant $T_x\left(u^{2n}v\right)(x,t)$. On a

$$\begin{aligned}T_x\left(u^{2n}v\right)(x,t) &= -xv(x,t)\ \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{2n}\right)(x,t) - x\frac{\partial}{\partial x}v(x,t)\ u^{2n}(x,t)\\ &= \frac{-2nu^{2n}(x,t)}{(x^2+t^2)^2}\left(t^2-x^2\right) + \frac{2x^2}{(x^2+t^2)^2}u^{2n}(x,t)\\ &= \frac{-2nu^{2n}(x,t)}{(x^2+t^2)^2}\left(t^2-x^2\right) + 2u^{2n+2}(x,t).\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\left(I+\frac{T_x}{2n}\right)\left(u^{2n}v\right)(x,t) &= \frac{u^{2n}(x,t)}{x^2+t^2} - \frac{u^{2n}(x,t)}{(x^2+t^2)^2}\left(t^2-x^2\right) + \frac{1}{n}u^{2n+2}(x,t)\\ &= \frac{u^{2n}(x,t)}{(x^2+t^2)^2}\left(x^2+t^2-\left(t^2-x^2\right)\right) + \frac{1}{n}u^{2n+2}(x,t)\\ &= \frac{2n+1}{n}u^{2n+2}(x,t).\end{aligned}$$

Enfin, on a $\left(I - T_x^2/\left(4n^2\right)\right) = \left(I + T_x/\left(2n\right)\right)\left(I - T_x/\left(2n\right)\right)$. D'où

$$\left(I - \frac{T_x^2}{4n^2}\right)\left(u^{2n}\right)(x,t) = \left(I + \frac{T_x}{2n}\right)\left(I - \frac{T_x}{2n}\right)\left(u^{2n}\right)(x,t) = \left(I + \frac{T_x}{2n}\right)\left(2t^2 u^{2n} v\right)(x,t).$$

Comme l'opérateur $I + T_x/\left(2n\right)$ ne fait intervenir que des dérivées par rapport à x, il vient

$$\left(I - \frac{T_x^2}{4n^2}\right)\left(u^{2n}\right)(x,t) = 2t^2\left(I + \frac{T_x}{2n}\right)\left(u^{2n} v\right)(x,t) = \frac{2\left(2n+1\right)}{n} t^2 u^{2n+2}(x,t).$$

3.3.b. Soit $\phi \in E$ et $x \times \left]0,+\infty\right[$. On va montrer la première formule demandée par récurrence sur n.
Initialisation.– Rappelons que dans la question 3.2.b. on a montré que

$$L_1 S\phi(x) = 12\int_0^{+\infty} \frac{t^3 x^4}{\left(x^2+t^2\right)^4}\phi(t)\ \mathrm{d}t.$$

Ceci fournit le cas $n = 1$.
Hérédité.– Supposons la propriété vraie pour un certain $n \geq 1$. On a alors

$$L_{n+1} S\phi(x) = \left(I - \frac{T^2}{4\left(n+1\right)^2}\right) \circ L_n S\phi(x).$$

(En effet, on vérifie facilement que les opérateurs L_n et $I - T^2/\left(4\left(n+1\right)^2\right)$ commutent.) En appliquant l'hypothèse de récurrence, il vient.

$$L_n S\phi(x) = \frac{2\left(2n+1\right)!}{\left(n!\right)^2}\int_0^{+\infty} t^{2n+1} u^{2n+2}(x,t)\,\phi(t)\ \mathrm{d}t,$$

Comme l'intégrale et l'opérateur T commutent, l'intégrale et l'opérateur $I - T^2/\left(4\left(n+1\right)^2\right)$ commutent.
Il vient donc

$$L_{n+1} S\phi(x) = \int_0^{+\infty}\left(I - \frac{T_x^2}{4\left(n+1\right)^2}\right) u^{2n+2}(x,t)\, t^{2n+1}\phi(t)\ \mathrm{d}t.$$

Or, d'après la question 3.3.b., on a $\left(I - T_x^2/\left(4\left(n+1\right)^2\right)\right) u^{2n+2}(x,t) = \dfrac{2\left(2n+3\right)}{n+1} t^2 u^{2n+4}(x,t)$. D'où

$$L_{n+1} S\phi(x) = \frac{2\left(2n+1\right)!}{\left(n!\right)^2}\frac{2\left(2n+3\right)}{n+1}\int_0^{+\infty} t^{2n+3} u^{2n+4}\phi(t)\ \mathrm{d}t.$$

En écrivant $\dfrac{2\left(2n+1\right)!}{\left(n!\right)^2}\dfrac{2\left(2n+3\right)}{n+1} = \dfrac{2\left(2n+1\right)!}{\left(n!\right)^2}\dfrac{2\left(n+1\right)\left(2n+3\right)}{\left(n+1\right)^2}$, il vient finalement

$$L_{n+1} S\phi(x) = \frac{2\left(2n+3\right)!}{\left(\left(n+1\right)!\right)^2}\int_0^{+\infty} t^{2n+3} u^{2n+4}\phi(t)\ \mathrm{d}t,$$

achvant la récurrence.
Remarque.– Le lecteur pourra vérifier que la permutation entre l'opérateur T et le signe intégral est justifiée. En particulier (mais cela ne suffit pas), il constatera que toutes les intégrales écrites sont absolument convergentes.
En résumé, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad L_n S\phi(x) = \frac{2\left(2n+1\right)!}{\left(n!\right)^2}\int_0^{+\infty}\frac{t^{2n+1} x^{2n+2}}{\left(x^2+t^2\right)^{2n+2}}\phi(t)\ \mathrm{d}t.$$

Le changement de variable $t = \lambda x$ étant linéaire, il est licite dans l'intégrale généralisée précédente. Il vient donc

$$L_n S\phi(x) = \frac{2\left(2n+1\right)!}{\left(n!\right)^2}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^{2n+1}}{\left(1+\lambda^2\right)^{2n+1}}\frac{\phi(\lambda x)}{1+\lambda^2}\ \mathrm{d}t.$$

4 Quatrième partie

4.1 Etude d'une suite d'intégrales

4.1.a. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $\lambda \mapsto \dfrac{(2\lambda)^{2n+1}}{(1+\lambda^2)^{2n+2}}$ est continue sur $[0,+\infty[$, donc localement intégrable. De plus, on a $\dfrac{(2\lambda)^{2n+1}}{(1+\lambda^2)^{2n+2}} = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{\lambda^{2n+3}}\right)$ pour $\lambda \to +\infty$. Donc l'intégrale I_n existe.

4.1.b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le changement de variable $\lambda = \tan(\theta/2)$ est légitime dans l'intégrale I_n puisque la fonction $\theta \mapsto \tan(\theta/2)$ est un C^1-difféomorphisme de $[0,\pi[$ sur $[0,+\infty[$ On a $\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2(\theta/2)\right)\mathrm{d}\theta = \left(1+\lambda^2\right)\mathrm{d}\theta$. D'où

$$I_n = \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{(2\tan(\theta/2))^{2n+1}}{\left(1+\tan^2(\theta/2)\right)^{2n+2}}\left(1+\tan^2(\theta/2)\right)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{(2\tan(\theta/2))^{2n+1}}{\left(1+\tan^2(\theta/2)\right)^{2n+1}}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^{2n+1}\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

On reconnait une intégrale de type Wallis. En utilisant la méthode usuelle, on écrit

$$I_n - I_{n+1} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^{2n+1}\theta\left(1-\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^{2n+1}\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

En intégrant par parties, il vient

$$I_n - I_{n+1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n+2}\sin^{2n+2}\theta\cos\theta\right]_0^\pi + \frac{1}{2}\frac{1}{2n+2}\int_0^\pi \sin^{2n+3}\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2n+2}I_{n+1}.$$

4.1.c. Calcul de I_0.– On a $I_0 = \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = 1$.

Calcul de I_n.– Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 4.1.b., on a $I_n = 2n\left(I_{n-1} - I_n\right)$. D'où

$$I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1}.$$

Une récurrence simple, laissée au lecteur, montre alors que

$$I_n = \frac{2^n n!}{(2n+1)(2n-1)\dots 3.1}I_0.$$

En multipliant numérateur et dénominateur par $2^n n!$, il vient

$$I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

D'où $I_n K_n = 1$.

Remarque.– La formule donnée dans le texte est alors justifiée. En effet, soit $(x,n) \in]0,+\infty[\times \mathbb{N}^*$. On a

$$L_n S\phi(x) = \frac{2(2n+1)!}{(n!)^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1}\frac{\phi(\lambda x)}{1+\lambda^2}\mathrm{d}\lambda = K_n\int_0^{+\infty}\left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1}\frac{\phi(\lambda x)}{1+\lambda^2}\mathrm{d}\lambda.$$

D'où

$$\begin{aligned} L_n S\phi(x) - \phi(x) &= L_n S\phi(x) - I_n K_n \phi(x) \\ &= K_n\int_0^{+\infty}\left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1}\frac{\phi(\lambda x)}{1+\lambda^2}\mathrm{d}\lambda - K_n\int_0^{+\infty}\left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1}\frac{\phi(x)}{1+\lambda^2}\mathrm{d}\lambda \\ &= K_n\int_0^{+\infty}\left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1}\frac{\phi(\lambda x)-\phi(x)}{1+\lambda^2}\mathrm{d}\lambda. \end{aligned}$$

Notation.– On posera

$$\theta(\lambda) = 2\lambda/\left(1+\lambda^2\right), \text{ pour tout } \lambda \in [0,+\infty[. \tag{8}$$

La fonction est $\theta : \lambda \mapsto \theta(\lambda)$ est dérivable sur $[0, +\infty[$, avec, pour tout $\lambda \in [0, +\infty[$, $\theta'(\lambda) = \left(1 - \lambda^2\right) / \left(1 + \lambda^2\right)^2$. Ainsi, la fonction $\theta(\cdot)$ est positive sur $[0, +\infty[$, strictement croissante sur l'intervalle $[0, 1]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[b, +\infty[$. Elle est donc majorée par $\theta(1) = 1$. Ces résultats seront utilisés dans les questions 4.2.b., 4.3 et 4.4. On a également

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\theta(\lambda)}{1 + \lambda^2} \, \mathrm{d}\lambda. \tag{9}$$

4.2 Comportement de $K_n \int_0^a \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} f(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda$

4.2.a. Soit $\theta \in]0, 1[$. Posons, pour cette seule question et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\nu_n := \theta^{2n+1} K_n = \theta^{2n+1} \dfrac{(2n+1)!}{2^{2n} (n!)^2}$. On a $\nu_{n+1}/\nu_n = \theta^2 (2n+3)(2n+2) / \left(4(n+1)^2\right)$. Ainsi, on a $\lim_{n\to+\infty} (\nu_{n+1}/\nu_n) = \theta^2 < 1$. Par le critère de d'Alembert, la série $\sum \nu_n$ converge. En particulier, son terme général ν_n tend vers 0 pour $n \to +\infty$ Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \theta^{2n+1} K_n = 0$.

4.2.b. Rappelons que a est un réel strictement compris entre 0 et 1. Rappelons également que la fonction $\theta(\cdot)$, définie par la formule (8), est strictement croissante sur l'intervalle $[0, 1]$, donc sur l'intervalle $[0, a]$, avec $\theta(a) < 1$. Par ailleurs, la fonction f est continue sur $[0, a]$, donc bornée sur cet intervalle. Posons $M = \sup_{x\in[0,a]} |f(x)|$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| K_n \int_0^a \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} f(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda \right| \le aMK_n \, (\theta(a))^{2n+1}.$$

Comme $a \in]0, 1[$, on a $\theta(a) < 1$, et $\lim_{n\to+\infty} K_n (\theta(a))^{2n+1} = 0$, d'après la question 4.2.a.

4.3 Comportement de $K_n \int_b^{+\infty} \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} g(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda$

La fonction $\theta(\cdot)$, introduite par la formule (8), est strictement décroissante sur l'intervalle $[b, +\infty[$, avec $\theta(b) < 1$. On a de plus

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \lambda \in [b, +\infty[, \quad \left| (\theta(\lambda))^{2n+1} g(\lambda) \right| \le (\theta(b))^{2n+1} |g(\lambda)| < |g(\lambda)|.$$

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_b^{+\infty} \theta(\lambda) g(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda$ est bien absolument convergente et vérifie

$$\left| K_n \int_b^{+\infty} (\theta(\lambda))^{2n+1} g(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda \right| \le K_n (\theta(b))^{2n+1} \int_0^{+\infty} |g(\lambda)| \, \mathrm{d}\lambda.$$

En utilisant de nouveau la question 4.2.a., on a $\lim_{n\to+\infty} K_n (\theta(b))^{2n+1} = 0$.

4.4 Détermination de $\lim_{n\to+\infty} L_n S\phi(x)$

Selon la remarque faite à la fin de la question 4.1, on doit étudier

$$L_n S\phi(x) - \phi(x) = K_n \int_0^{+\infty} \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} \frac{\phi(\lambda x) - \phi(x)}{1+\lambda^2} \, \mathrm{d}\lambda = K_n \int_0^{+\infty} (\theta(\lambda))^{2n+1} \psi_x(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda.$$

Les questions précédentes indiquent la méthode : on va découper l'intervalle d'intégration $[0, +\infty[$ en trois parties, en introduisant des points a et b vérifiant $0 < a < 1 < b$ convenablement choisis.

Soit $\varepsilon > 0$.

▷ La continuité de ϕ au point x entraîne la continuité de la fonction $\lambda \mapsto \phi(\lambda x)$ au point $\lambda = 1$ comme composée de l'homothétie $\lambda \mapsto \lambda x$ et de ϕ. Ainsi, il existe $\eta > 0$ tel que

$$|\lambda - 1| < \eta \Rightarrow |\phi(\lambda x) - \phi(x)| < \varepsilon/3.$$

Soit alors $a \in]1-\eta, \eta[$ et $b \in]\eta, 1+\eta[$. On a

$$\left|K_n \int_a^b (\theta(\lambda))^{2n+1} \frac{\phi(\lambda x) - \phi(x)}{1+\lambda^2} \mathrm{d}\lambda\right| \leq K_n \int_a^b \frac{(\theta(\lambda))^{2n+1}}{1+\lambda^2} |\phi(\lambda x) - \phi(x)| \mathrm{d}\lambda \leq \frac{\varepsilon}{3} K_n \int_a^b \frac{(\theta(\lambda))^{2n+1}}{1+\lambda^2} \mathrm{d}\lambda$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{3} K_n \int_0^{+\infty} \frac{(\theta(\lambda))^{2n+1}}{1+\lambda^2} \mathrm{d}\lambda$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{3} K_n I_n = \frac{\varepsilon}{3}.$$

▷ La fonction $\psi_x(\cdot)$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc sur $[0, a]$, par un argument similaire à celui utilisée pour la continuité de la fonction $\lambda \mapsto \phi(\lambda x)$ au point $\lambda = 1$. Ainsi, en appliquant la question 4.2, avec $f := \psi_x$, on sait qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_0 \Rightarrow \left|K_n \int_0^a (\theta(\lambda))^{2n+1} \psi_x(\lambda) \mathrm{d}\lambda\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

▷ Par hypothèse, la fonction ϕ est bornée sur $[0, +\infty[$. Alors, la fonction $\lambda \rightarrow \phi(\lambda x) - \phi(x)$ l'est également. Ainsi

$$\psi_x(\lambda) = \mathrm{O}\left(\lambda^{-2}\right) \text{ pour } \lambda \to +\infty.$$

Donc, l'intégrale $\int_0^a |\psi_x(\lambda)| \mathrm{d}\lambda$ est convergente. On applique alors la question 4.3, avec $g := \psi_x$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_1 \Rightarrow \left|K_n \int_b^{+\infty} (\theta(\lambda))^{2n+1} \psi_x(\lambda) \mathrm{d}\lambda\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ainsi, en récapitulant les trois points précédents, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq \max(N_0, N_1) \Rightarrow |L_n S\phi(x) - \phi(x)| < \varepsilon.$$

D'où $\lim_{n\to+\infty} L_n S\phi(x) = \phi(x)$.

Commentaire.– Ce problème étudie principalement une suite d'opérateurs régularisant : à toute fonction continue, bornée élément de E, on fait correspondre la suite de fonctions de classe C^∞ $(L_n S\phi)_n$. On démontre, dans les parties 3 et 4 la convergence simple de cette suite vers ϕ sur $]0, +\infty[$.

antoine.delcroix@iufm.univ-ag.fr
IUFM de Guadeloupe – Morne Ferret, BP 517, 97178 ABYMES Cedex (Guadeloupe)

SESSION DE 1993

concours externe de recrutement de professeurs certifiés

section : mathématiques

deuxième composition de mathématiques

Durée : 5 heures

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche — éventuellement programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Notations et objectifs du problème

Dans tout le problème, $\mathscr{E}$ désigne l'espace affine euclidien orienté de dimension 3, E l'espace vectoriel associé, γ un élément de l'intervalle $[0, 1[$, n un entier supérieur ou égal à 3, $\mathscr{R} = (O\,;\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un repère orthonormé direct de $\mathscr{E}$. Les coordonnées des points de $\mathscr{E}$ sont définies par rapport à ce repère.

On dit qu'une paire $\{d_1, d_2\}$ de deux droites de $\mathscr{E}$ est de rapport γ s'il existe des vecteurs directeurs unitaires $\vec{u}_1$ de d_1 et $\vec{u}_2$ de d_2 dont le produit scalaire $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2$ est égal à γ.

On appelle gerbe d'ordre n et de rapport γ tout ensemble G de n droites de $\mathscr{E}$, concourantes en un point Ω, et telles que toute paire formée de deux droites de G soit de rapport γ. Le point Ω est appelé centre de la gerbe G.

Les objectifs du problème sont la détermination de tous les couples (n, γ) pour lesquels il existe au moins une gerbe d'ordre n et de rapport γ et, pour chaque couple de ce type, la classification à une isométrie près de toutes les gerbes d'ordre n et de rapport γ.

Tournez la page S.V.P.

A. ÉTUDE PRÉLIMINAIRE

A.1. Gerbes isométriques.

A.1.1. Soit $G = \{d_1, ..., d_n\}$ une gerbe d'ordre n et de rapport γ, et soit f une isométrie de $\mathcal{E}$. Montrer que l'ensemble G′ des n droites $d'_1 = f(d_1), ..., d'_n = f(d_n)$ est une gerbe dont on précisera le rapport.

La gerbe G′ est appelée la gerbe image de G par l'isométrie f.

Convention : Les gerbes images de G par les isométries de $\mathcal{E}$ s'appellent les gerbes isométriques à G.

A.1.2. Étant donné deux gerbes G et G′, montrer que, si G′ est isométrique à G, alors G est isométrique à G′. On dira, dans ce cas, que G et G′ sont isométriques.

A.2. Exemples de gerbes d'ordre 3.

A.2.1. Soient d_1 et d_2 deux droites de $\mathcal{E}$, de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. Montrer que la paire $\{d_1, d_2\}$ est de rapport γ si, et seulement si, on a : $|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2| = \gamma \|\vec{u}_1\| \, \|\vec{u}_2\|$.

A.2.2. Soit ABCD un tétraèdre régulier de $\mathcal{E}$. Montrer que les trois droites (AB), (AC), (AD) forment une gerbe dont on précisera le rapport.

A.2.3. Soit, dans $\mathcal{E}$, un triangle équilatéral ABC de centre O. Montrer que les trois droites (OA), (OB), (OC) forment une gerbe dont on précisera le rapport.

A.2.4. L'énoncé suivant : « Si G et G′ sont deux gerbes de même ordre et de même rapport, alors G′ est isométrique à G » est-il exact ?

A.2.5. On considère le point I de coordonnées (1, 0, 0), et ses images J et K par les rotations d'axe $(O\,;\vec{e}_3)$, orienté dans le sens de $\vec{e}_3$, d'angles $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ respectivement.

a. Déterminer les coordonnées de J et de K.

b. Soit un nombre réel h et Ω le point de coordonnées $(0, 0, h)$.

Montrer que les vecteurs $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{\Omega I}}{\|\overrightarrow{\Omega I}\|}$, $\vec{v} = \dfrac{\overrightarrow{\Omega J}}{\|\overrightarrow{\Omega J}\|}$, $\vec{w} = \dfrac{\overrightarrow{\Omega K}}{\|\overrightarrow{\Omega K}\|}$ vérifient :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{u} = \varphi(h),$$

où $\varphi(h)$ est un nombre réel qu'on exprimera en fonction de h.

c. Construire le tableau des variations de la fonction φ en précisant les limites aux bornes. En déduire l'image de φ.

d. Montrer que, pour chaque choix du réel h, les trois droites (ΩI), (ΩJ), (ΩK) forment une gerbe dont on précisera le rapport.

e. On considère trois vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{v}_1$ et $\vec{w}_1$ qui sont des vecteurs directeurs unitaires de (ΩI), (ΩJ) et (ΩK) respectivement. Montrer que, si $\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_1 = \vec{v}_1 \cdot \vec{w}_1 = \vec{w}_1 \cdot \vec{u}_1 = c$, alors $c = \varphi(h)$.

f. Soit (h, h') un couple de deux nombres réels et soient Ω et Ω' les points de coordonnées respectives $(0, 0, h)$ et $(0, 0, h')$. Montrer que la gerbe $G' = \{(\Omega' I), (\Omega' J), (\Omega' K)\}$ est isométrique à la gerbe $G = \{(\Omega I), (\Omega J), (\Omega K)\}$ si, et seulement si, $\varphi(h') = \varphi(h)$.

A.3. **Exemples de gerbes d'ordre 4, 5 et 6.**

A.3.1. On considère les points A, B, C, D de coordonnées respectives (1, 1, 1), (– 1, 1, 1), (1, – 1, 1), (1, 1, –1). Montrer que les quatre droites (OA), (OB), (OC), (OD) forment une gerbe dont on précisera le rapport.

A.3.2. On pose $z = e^{2i\pi/5}$ et on note A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 les points du plan $(O\,;\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, d'affixes respectives 1, z, z^2, z^3, z^4 par rapport au repère $(O\,;\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de ce plan.

a. Calculer la somme $z^{-2} + z^{-1} + 1 + z + z^2$ et en déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.
Montrer qu'on a $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

b. En prenant l'unité de longueur égale à 4 centimètres, construire à la règle et au compas la figure formée par les points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Justifier cette construction au moyen des résultats de la question *a.*

c. Soit Ω le point de coordonnées (0, 0, 1/2). Vérifier que les six droites (ΩO), (ΩA_1), (ΩA_2), (ΩA_3), (ΩA_4), (ΩA_5) forment une gerbe dont on précisera le rapport (on pourra remarquer que, pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 5$, on a la relation $\overline{\Omega A_i} \cdot \overline{\Omega A_j} = \overline{OA_i} \cdot \overline{OA_j} + \overline{O\Omega}^2$).
En déduire l'existence d'au moins une gerbe d'ordre 5, puis l'existence d'au moins une gerbe d'ordre 4 non isométrique à celle qui a été construite en A.3.1.

B. GERBES D'ORDRE 3

B.1. **Matrice de Gram d'une famille de trois vecteurs.**

On appelle matrice de Gram d'une famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ de trois vecteurs de E, la matrice $M = (a_{ij})$, $1 \leqslant i \leqslant 3$ et $1 \leqslant j \leqslant 3$, des produits scalaires $a_{ij} = \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j$.

B.1.1. Soit $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et soit $\vec{v}$ le vecteur $x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$.

Démontrer les égalités matricielles suivantes où $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$:

$$MX = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 \cdot \vec{v} \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{v} \\ \vec{u}_3 \cdot \vec{v} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tXMX = \|\vec{v}\|^2.$$

En déduire que $MX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ si, et seulement si, $\vec{v} = \vec{0}$, puis que M est inversible si, et seulement si, la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est libre.

B.1.2. Quelles propriétés de la matrice M permettent d'affirmer que toutes ses valeurs propres sont réelles ? Déduire de B.1.1. que ces valeurs propres sont positives ou nulles.

B.2. **Automorphismes orthogonaux transformant une famille libre donnée en une famille donnée.**

B.2.1. Soient $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ et $(\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \vec{u}'_3)$ deux familles de trois vecteurs de E, dont la première est libre. On suppose que, pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 3$, on a $\vec{u}'_i \cdot \vec{u}'_j = \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j$. Montrer qu'il existe un automorphisme orthogonal σ de E tel que, pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, on ait $\sigma(\vec{u}_i) = \vec{u}'_i$.
σ est-il unique ?

B.2.2. Soient $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ et $(\vec{u}'_1, \vec{u}'_2)$ deux familles de deux vecteurs de E, dont la première est libre. On suppose que, pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 2$, on a $\vec{u}'_i \cdot \vec{u}'_j = \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j$. Montrer qu'il existe un automorphisme orthogonal σ de E tel que, pour $1 \leqslant i \leqslant 2$, on ait $\sigma(\vec{u}_i) = \vec{u}'_i$.
σ est-il unique ?

Tournez la page S.V.P.

B.3. **Classification des gerbes d'ordre 3.**

B.3.1. Soit $G = \{d_1, d_2, d_3\}$ une gerbe d'ordre 3 et de rapport γ. Soit $\vec{u_1}$ un vecteur directeur unitaire de d_1.

a. Montrer qu'il existe des vecteurs directeurs unitaires $\vec{u_2}$ et $\vec{u_3}$ des droites d_2 et d_3 tels que $\vec{u_1} \cdot \vec{u_2} = \vec{u_2} \cdot \vec{u_3} = \vec{u_3} \cdot \vec{u_1}$.

Dans la suite de la question B.3.1., on suppose $\vec{u_2}$ et $\vec{u_3}$ choisis de cette manière, on pose :

$$c = \vec{u_1} \cdot \vec{u_2} = \vec{u_2} \cdot \vec{u_3} = \vec{u_3} \cdot \vec{u_1} \quad \text{et} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & c & c \\ c & 1 & c \\ c & c & 1 \end{bmatrix}.$$

b. Déterminer les valeurs propres de M, et en déduire qu'on a : $c \geqslant -\frac{1}{2}$.

c. Si $c > -\frac{1}{2}$, montrer que G est isométrique à l'une des gerbes construites à la question A.2.5.

d. On suppose $c = -\frac{1}{2}$. Montrer que $\vec{u_1} + \vec{u_2} + \vec{u_3} = \vec{0}$ (on pourra utiliser B.1.1. avec $x_1 = x_2 = x_3 = 1$). En déduire que G est encore isométrique à l'une des gerbes construites à la question A.2.5.

B.3.2. Quel est l'ensemble de tous les réels $\gamma \in [0, 1[$ pour lesquels il existe au moins une gerbe d'ordre 3 et de rapport γ ?

Pour chaque γ appartenant à cet ensemble, déterminer une famille de gerbes d'ordre 3 et de rapport γ, deux à deux non isométriques, et telles que toute gerbe d'ordre 3 et de rapport γ soit isométrique à l'une d'entre elles (on pourra distinguer les cas $\gamma \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ et $\gamma \notin \left]0, \frac{1}{2}\right]$).

C. GERBES D'ORDRE SUPÉRIEUR OU ÉGAL À 4

C.1. **Groupes finis de rotations de même axe.**

Dans toute cette partie C.1., m désigne un entier supérieur ou égal à 1.

C.1.1. On note T le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. On considère une droite d de l'espace.

a. Montrer que T contient un unique sous-groupe d'ordre m dont on précisera les éléments.

b. Définir, sans démonstration, un isomorphisme du groupe T sur le groupe R_d de toutes les rotations d'axe d. En déduire que R_d contient un unique sous-groupe d'ordre m dont on précisera les éléments.

On note ce sous-groupe $R_{d,m}$.

c. Soit f une isométrie de $\mathscr{E}$, montrer que :

$$\{f \circ \sigma \circ f^{-1} \mid \sigma \in R_{d,m}\} = R_{d',m}$$

où d' est une droite qu'on précisera.

C.1.2. Soient $F = \{d_0, d_1, \dots, d_m\}$, $F' = \{d'_0, d'_1, \dots, d'_m\}$ deux ensembles de $m + 1$ droites de $\mathscr{E}$. On suppose que $\{d_1, \dots, d_m\} = \{\sigma(d_1) \mid \sigma \in R_{d_0,m}\}$, et que $\{d'_1, \dots, d'_m\} = \{\tau(d'_1) \mid \tau \in R_{d'_0,m}\}$.
Soit f une isométrie de $\mathscr{E}$ qui transforme d_0 en d'_0 et d_1 en d'_1.

Déduire de C.1.1.*c.* que F′ est l'ensemble des images par f de toutes les droites de F.

C.1.3. Soit ρ la transformation de $\mathscr{E}$ définie analytiquement par les formules : $x' = z$, $y' = x$, $z' = y$. Montrer que $\{Id_{\mathscr{E}}, \rho, \rho^2\} = R_{d,3}$ où d est une droite qu'on précisera.

C.2. **Étude des gerbes d'ordre n, $n \geqslant 4$.**

Dans toute cette partie, on considère un entier n, $n \geqslant 4$, et une gerbe $G = \{d_0, d_1, \dots, d_m\}$ d'ordre n, de centre Ω, de rapport γ, avec $m = n - 1$.

Soit $\vec{u}_0$ un vecteur directeur unitaire de d_0.

C.2.1. Montrer que γ est différent de 0, et qu'il existe, pour chaque entier k, $1 \leqslant k \leqslant m$, un unique vecteur directeur unitaire $\vec{u}_k$ de d_k tel que $\vec{u}_0 \cdot \vec{u}_k = \gamma$.

Dans tout ce qui suit, on note $A_0, A_1, \dots, A_m$ les points de $\mathscr{E}$ définis, pour $0 \leqslant k \leqslant m$, par $\overrightarrow{\Omega A_k} = \vec{u}_k$.

On note I le point de d_0 défini par $\overrightarrow{\Omega I} = \gamma \vec{u}_0$ et Π le plan perpendiculaire en I à d_0.

C.2.2. Montrer que $A_1, \dots, A_m$ appartiennent au plan Π. Vérifier qu'on a, pour $1 \leqslant k \leqslant l \leqslant m$, $\overrightarrow{IA_k} \cdot \overrightarrow{IA_l} = \vec{u}_k \cdot \vec{u}_l - \gamma^2$. En déduire que $A_1, \dots, A_m$ appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ du plan Π, dont on précisera le centre et le rayon.

Pour chaque entier k, $1 \leqslant k \leqslant m$, on note S_k l'ensemble constitué de A_k et de tous les points M du cercle $\mathscr{C}$ tels que $\overrightarrow{IA_k} \cdot \overrightarrow{IM}$ soit égal à $\gamma - \gamma^2$ ou à $-\gamma - \gamma^2$.

C.2.3. En observant que l'ensemble $S = \{A_1, \dots, A_m\}$ est contenu dans chaque S_k, montrer qu'on a $n \leqslant 6$.

C.2.4. Vérifier que, quitte à modifier l'indexation des droites d_k, $1 \leqslant k \leqslant m$, on peut supposer $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3$.

On suppose, dans toute la suite de la question C.2., que cette condition est satisfaite. On oriente le plan Π et on note α une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{IA_1}, \overrightarrow{IA_2}})$.

C.2.5. Déterminer, en fonction de α, une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{IA_1}, \overrightarrow{IA_3}})$, puis une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{IA_2}, \overrightarrow{IA_3}})$. En déduire que les nombres $\cos\alpha$ et $\cos(2\alpha)$ appartiennent à l'ensemble $\left\{\dfrac{\gamma}{1+\gamma}, -\dfrac{\gamma}{1-\gamma}\right\}$.

C.2.6. On suppose $\cos(2\alpha) = \cos\alpha$.

a. Montrer que le triangle $A_1A_2A_3$ est équilatéral et que $\gamma = \dfrac{1}{3}$.

b. On suppose que S contient un point M différent de A_1, A_2 et A_3. Montrer que $\overrightarrow{IA_1} \cdot \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IA_2} \cdot \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IA_3} \cdot \overrightarrow{IM} = \dfrac{2}{9}$. En déduire une contradiction en considérant la somme $\overrightarrow{IA_1} \cdot \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IA_2} \cdot \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IA_3} \cdot \overrightarrow{IM}$.

c. Montrer que G est isométrique à la gerbe construite en A.3.1. (on pourra utiliser C.1.2. et C.1.3.)

C.2.7. On suppose $\cos(2\alpha) \neq \cos\alpha$.

a. On pose $a = \dfrac{\gamma}{1+\gamma}$ et $b = -\dfrac{\gamma}{1-\gamma}$. Comparer $a + b$ et ab. En déduire que $\cos(3\alpha) = \cos(2\alpha)$.

b. Montrer que S_1 est l'ensemble des sommets d'un pentagone régulier. Calculer γ (on pourra utiliser A.3.2.*a.*).

C.3. **Classification des gerbes d'ordre n, $n \geqslant 4$.**

C.3.1. Déterminer tous les couples (n, γ), avec $n \geqslant 4$, pour lesquels il existe au moins une gerbe d'ordre n et de rapport γ.

C.3.2. Soit G une gerbe d'ordre 6.

a. Soient (d_0, d_1) et (d'_0, d'_1) deux couples constitués chacun de deux droites distinctes de G. Montrer qu'il existe une isométrie f de $\mathscr{E}$ qui transforme d_0 en d'_0 et d_1 en d'_1.

Quelle est la gerbe image de G par f?

b. Étant donné un entier k, $4 \leqslant k \leqslant 5$, montrer que toutes les gerbes d'ordre k contenues dans G sont isométriques à l'une d'entre elles.

En est-il de même lorsque $k = 3$?

C.3.3. Pour chaque couple (n, γ) trouvé en C.3.1., montrer que toutes les gerbes d'ordre n et de rapport γ sont isométriques à l'une d'entre elles.

CAPES 93, 2e composition

Corrigé de Dany-Jack MERCIER

A.1.1 G' est une gerbe car $\Omega \in d_1 \cap \ldots \cap d_n$ entraine $f(\Omega) \in d'_1 \cap \ldots \cap d'_n$, et car pour toute paire $\{i,j\}$ incluse dans $\{1,\ldots,n\}$, il existe des vecteurs directeurs unitaires $\vec{u}_i$ et $\vec{u}_j$ de d_i et d_j, resp., tels que $\vec{u}_i . \vec{u}_j = \gamma$. $\vec{f}$ conservant le produit scalaire, on aura bien

$$\vec{f}(\vec{u}_i).\vec{f}(\vec{u}_j) = \gamma \quad \text{(on a noté } \vec{f} \text{ la partie linéaire de } f\text{)}$$

où $\vec{f}(\vec{u}_i)$ (resp. $\vec{f}(\vec{u}_j)$) est un vecteur directeur unitaire de d'_i (resp. d'_j).
G' sera une gerbe de centre $f(\Omega)$ et de rapport γ.

A.1.2 Évident car l'ensemble des isométries de $\mathcal{E}$ forme un groupe pour la loi $\circ$. $d'_i = f(d_i)$ équivaut alors à $f^{-1}(d'_i) = d_i$.

A.2.1 Si $\{d_1, d_2\}$ est de rapport γ, il existe $\varepsilon, \varepsilon' \in \{\pm 1\}$ tels que

$$\left(\varepsilon . \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}\right).\left(\varepsilon' . \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|}\right) = \gamma \quad \text{d'où} \quad |\vec{u}_1 . \vec{u}_2| = \gamma \, \|\vec{u}_1\| . \|\vec{u}_2\|.$$

Réc., si $|\vec{u}_1 . \vec{u}_2| = \gamma \|\vec{u}_1\|.\|\vec{u}_2\|$, $\vec{u}'_i \doteq \frac{\vec{u}_i}{\|\vec{u}_i\|}$ sera un vecteur directeur unitaire de d_i et $|\vec{u}'_1 . \vec{u}'_2| = \gamma$.
Si $\vec{u}'_1.\vec{u}'_2 = \gamma$, c'est fini. Sinon on aura $(-\vec{u}'_1).\vec{u}'_2 = \gamma$ avec $-\vec{u}'_1$ et $\vec{u}'_2$ vecteurs directeurs unitaires de d_1 et d_2. Dans les 2 cas, on a montré que $\{d_1, d_2\}$ est de rapport γ.

A.2.2

Les faces de ce tétraèdre sont des triangles équilatéraux. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont 2 vecteurs directeurs unitaires de 2 des droites (AB), (AC) ou (AD), on aura donc : $|\vec{u}.\vec{v}| = \left|\cos\frac{\pi}{3}\right| = \frac{1}{2}$

$\{(AB),(AC),(AD)\}$ est bien une gerbe de rapport $\frac{1}{2}$.

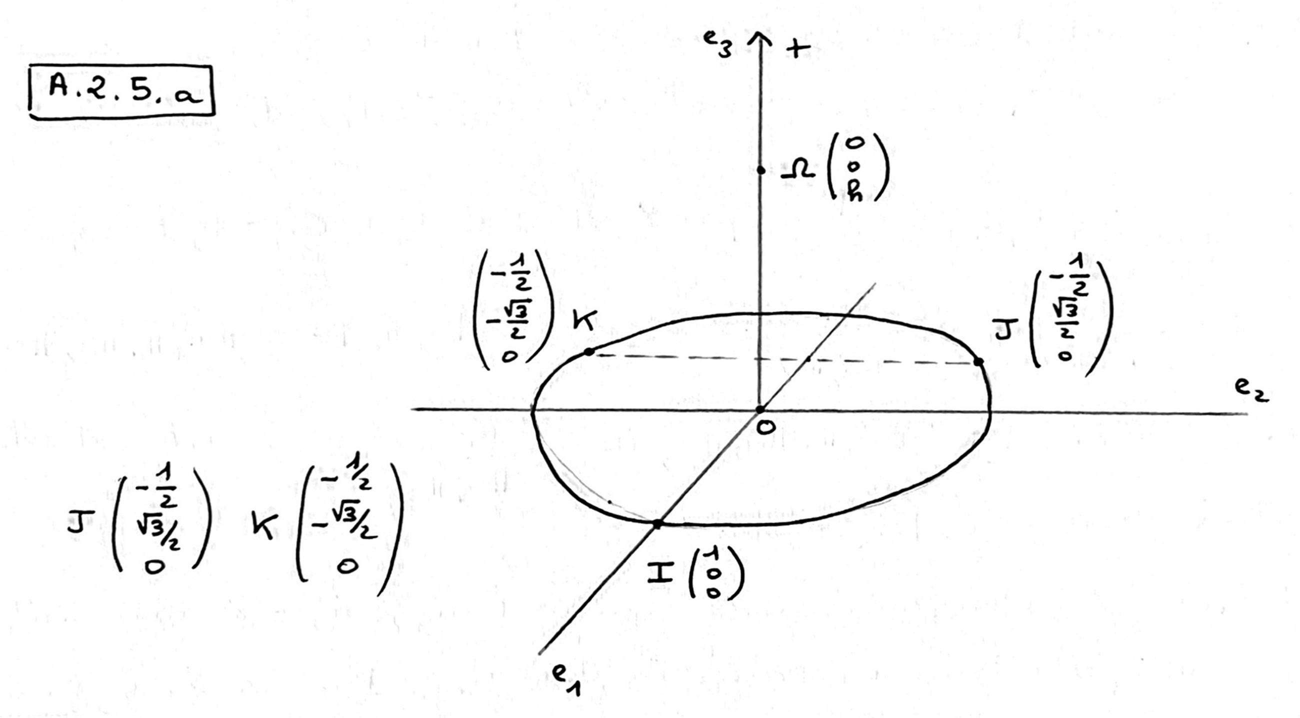
A.2.3 Pour une orientation du plan ABC,

$\widehat{\vec{OA},\vec{OB}} = \pm \frac{2\pi}{3} \; [2\pi]$ d'où $\frac{\vec{OA}}{\|\vec{OA}\|} \cdot \frac{\vec{OB}}{\|\vec{OB}\|} = \cos(\widehat{\vec{OA},\vec{OB}}) = -\frac{1}{2}$

On ferait de même avec $\vec{OA},\vec{OC}$ ou $\vec{OB},\vec{OC}$, de sorte que $\{(OA),(OB),(OC)\}$ soit une gerbe de rapport $\frac{1}{2}$

A.2.4 Il est faux puisque A.2.2 et A.2.3 exhibent 2 gerbes d'ordre 3 et de rapport $\frac{1}{2}$ qui ne peuvent pas être isométrique, une isométrie transformant un plan en un plan (les 3 arêtes d'un tétraèdre choisies en A.2.2 n'étaient pas coplanaires, alors que la gerbe du A.2.3 l'est)

A.2.5.a



NB : La rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ dont on parle a pour expression analytique

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

d'où les coordonnées de J

A.2.5.b

$\vec{\Omega I}\begin{pmatrix}1\\0\\-h\end{pmatrix}$ $\vec{\Omega J}\begin{pmatrix}-1/2\\\sqrt{3}/2\\-h\end{pmatrix}$ $\vec{\Omega K}\begin{pmatrix}-1/2\\-\sqrt{3}/2\\-h\end{pmatrix}$ donc $\Omega I = \Omega J = \Omega K = \sqrt{1+h^2}$.

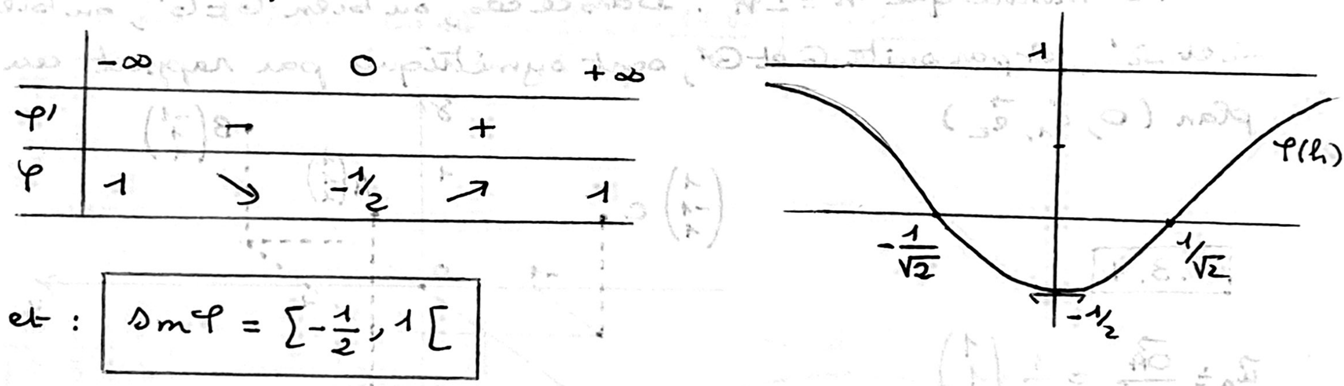
$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{\vec{\Omega I}}{\Omega I}.\frac{\vec{\Omega J}}{\Omega J} = \frac{1}{1+h^2}\left(-\frac{1}{2}+h^2\right) = \frac{2h^2-1}{2h^2+2}$$

Le calcul de $\vec{v}.\vec{w}$ et $\vec{w}.\vec{u}$ donne le même résultat. Ainsi :

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{w} = \vec{w}.\vec{u} = \varphi(h) \quad \text{où} \quad \varphi(h) = \frac{2h^2-1}{2h^2+2}$$

A.2.5.c

$$\varphi'(h) = \frac{12h}{(2h^2+2)^2}$$ d'où les variations :



	$-\infty$		0		$+\infty$
φ'		$-$		$+$	
φ	1	↘	$-1/2$	↗	1

et : $\operatorname{Im}\varphi = [-\frac{1}{2}, 1[$

A.2.5.d Pour h fixé, les valeurs absolues des produits $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{v}.\vec{w}$ et $\vec{w}.\vec{u}$ du A.2.5.b sont égales à $|\varphi(h)|$. Cela montre (A.2.1) que $\{(\Omega I), (\Omega J), (\Omega K)\}$ <u>est une gerbe de rapport $|\varphi(h)|$</u>

A.2.5.e On a $\vec{u}_1 = \varepsilon\vec{u}$, $\vec{v}_1 = \eta\vec{v}$ et $\vec{w}_1 = \tau\vec{w}$ où $\varepsilon, \eta, \tau \in \{\pm 1\}$

Alors : $\varepsilon\eta.\vec{u}.\vec{v} = \eta\tau\,\vec{v}.\vec{w} = \tau.\varepsilon\,\vec{w}.\vec{u} = c$ $\quad (*)$

On sait que $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{w} = \vec{w}.\vec{u} = \varphi(h)$. Si $\varphi(h) = 0$, alors $c = 0 = \varphi(h)$. Si $\varphi(h) \neq 0$, on aura $\varepsilon\eta = \eta\tau = \tau\varepsilon = 1$ donc $\varepsilon = \tau = \eta$, et en remplaçant dans $(*)$:

$$c = \varepsilon^2\vec{u}.\vec{v} = \varphi(h)$$

A.2.5.f

S'il existe une isométrie f telle que $f(G) = G'$, avec les notations du A.2.5.b et en primant les grandeurs attachées à G', on obtient :

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{w} = \vec{w}.\vec{u} = \varphi(h)$$
$$\vec{u}'.\vec{v}' = \vec{v}'.\vec{w}' = \vec{w}'.\vec{u}' = \varphi(h')$$

f conservant les produits scalaires, on aura

$$f(\vec{u}).f(\vec{v}) = f(\vec{v}).f(\vec{w}) = f(\vec{w}).f(\vec{u}) = \varphi(h)$$

et A.2.5.e montre qu'alors $\varphi(h) = \varphi(h')$.

Réc., si $\varphi(h) = \varphi(h')$, φ étant paire, le tableau de variation du A.2.5.c montre que $h' = \pm h$. Dans ce cas, ou bien $G = G'$, ou bien Ω et Ω', et par suite G et G', sont symétriques par rapport au plan $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

A.3.1

$$\vec{u}_A \doteq \frac{\vec{OA}}{\|\vec{OA}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_B \doteq \frac{\vec{OB}}{\|\vec{OB}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

etc

On vérifie que

$$|\vec{u}_A.\vec{u}_B| = \frac{1}{3} = |\vec{u}_B.\vec{u}_C| = |\vec{u}_C.\vec{u}_D| = |\vec{u}_D.\vec{u}_A| = |\vec{u}_A.\vec{u}_C| = |\vec{u}_B.\vec{u}_D|$$

d'où le résultat. Le rapport de cette gerbe est $\frac{1}{3}$.

A.3.2.a

* $\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 = \frac{1 + z + z^2 + z^3 + z^4}{z^2} = 0$ puisque $z^5 = 1$ entraîne $(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1) = 0$ et que $z \neq 1$.

* $\begin{cases} \frac{1}{z} + z = \bar{z} + z = 2\cos\theta \\ \frac{1}{z^2} + z^2 = \bar{z}^2 + z^2 = 2\cos 2\theta \end{cases}$ en posant $z = e^{i\theta}$ et $\theta \doteq \frac{2\pi}{5}$.

En reportant dans l'expression précédente :

$$1 + 2\cos\theta + 2\cos 2\theta = 0 \implies \boxed{\cos\theta + \cos 2\theta = -\frac{1}{2}} \quad (*)$$

* $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$, donc $(*)$ devient $4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1 = 0$, et l'on obtient $\cos\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Comme $\cos\theta > 0$, on aura $\cos\theta = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $(*)$ permet d'écrire $\cos 2\theta = -\frac{1}{2} - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

A.3.2.b

Justification :

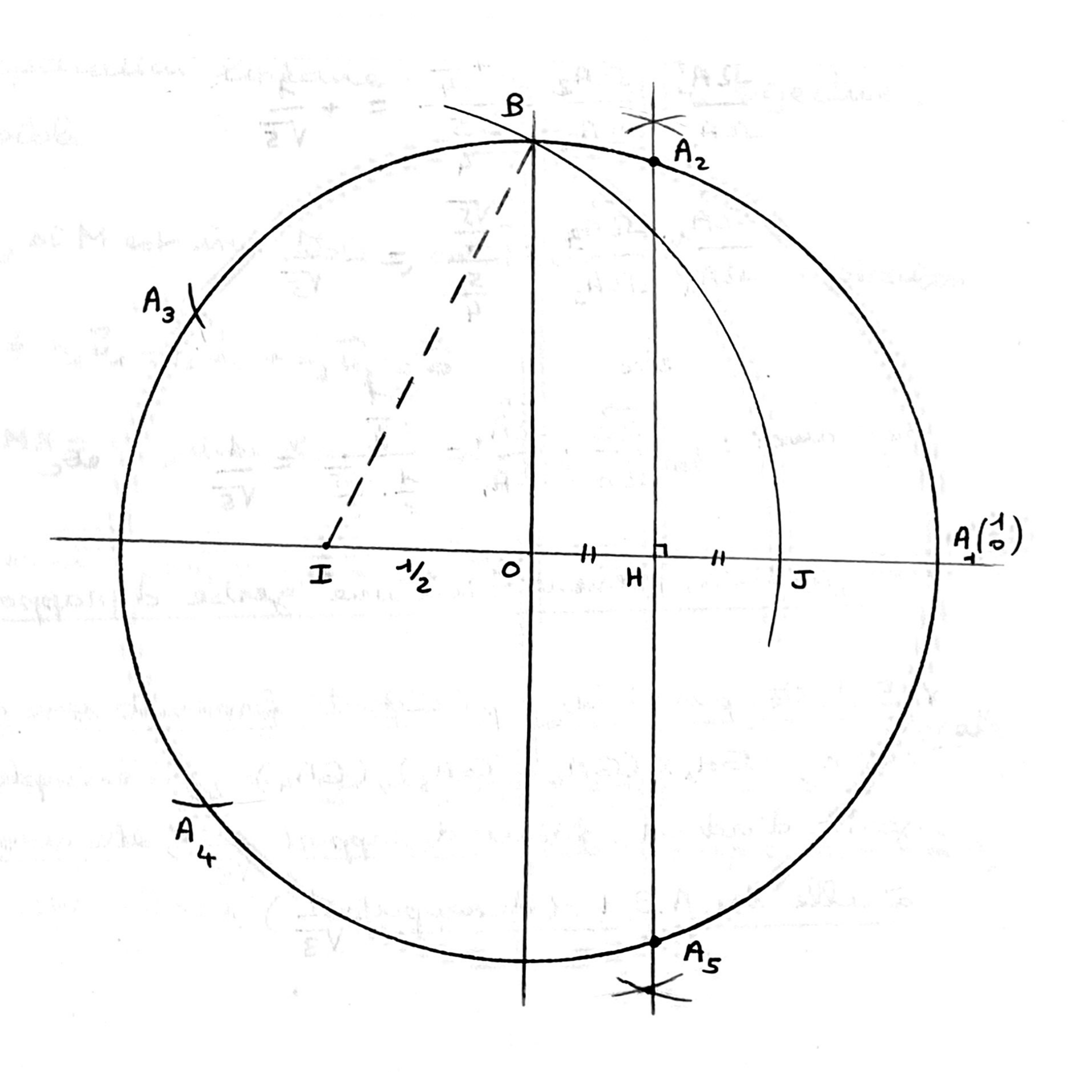
$OH = \frac{OJ}{2} = \frac{IJ - IO}{2}$

$= \frac{IB}{2} - \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{4}$

$= \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$

$OH = \cos\frac{2\pi}{5}$



A.3.2.c

$$\vec{\Omega A_i}\cdot\vec{\Omega A_j} = (\vec{\Omega O}+\vec{OA_i})(\vec{\Omega O}+\vec{OA_j}) = \Omega O^2 + \vec{OA_i}\cdot\vec{OA_j}$$

puisque $\vec{\Omega O}$ est orthogonal au plan $A_1A_2A_3A_4A_5$. Ainsi :

$$\vec{\Omega A_1}\cdot\vec{\Omega A_2} = \frac{1}{4} + \vec{OA_1}\cdot\vec{OA_2} = \frac{1}{4} + \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt5}{4}$$

De même, on trouve :

$$\vec{\Omega A_1}\cdot\vec{\Omega A_3} = \frac{-\sqrt5}{4}$$

$$\vec{\Omega A_1}\cdot\vec{\Omega A_4} = -\frac{\sqrt5}{4}$$

$$\vec{\Omega A_1}\cdot\vec{\Omega A_5} = \frac{\sqrt5}{4}$$

etc

mais aussi $\vec{\Omega O}\cdot\vec{\Omega A_1} = \vec{\Omega O}^2 + \vec{\Omega O}\cdot\vec{OA_1} = \Omega O^2 = \frac{1}{4}$

On calcule $\|\vec{\Omega A_1}\|^2 = \Omega O^2 + OA_1^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$ donc $\Omega A_1 = \frac{\sqrt5}{2}$, et on trouve de même $\Omega A_1 = \Omega A_2 = \dots = \Omega A_5 = \frac{\sqrt5}{2}$.

Enfin :

$$\frac{\vec{\Omega A_1}}{\Omega A_1}\cdot\frac{\vec{\Omega A_2}}{\Omega A_2} = \frac{+\frac{\sqrt5}{4}}{\frac{5}{4}} = +\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\frac{\vec{\Omega A_1}}{\Omega A_1}\cdot\frac{\vec{\Omega A_3}}{\Omega A_3} = \frac{-\frac{\sqrt5}{4}}{\frac{5}{4}} = -\frac{1}{\sqrt5}$$

etc

mais aussi : $\frac{\vec{\Omega O}}{\Omega O}\cdot\frac{\vec{\Omega A_1}}{\Omega A_1} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt5}{2}} = \frac{1}{\sqrt5}$ etc

* Les 6 droites forment bien une gerbe de rapport $\frac{1}{\sqrt5}$

* 5 droites parmi les 6 précédentes formeront une gerbe d'ordre 5.
Enfin, $(\Omega A_1), (\Omega A_2), (\Omega A_3), (\Omega A_4)$, par exemple, forment une gerbe d'ordre 4. Étant de rapport $\frac{1}{\sqrt5}$, elle ne sera pas isométrique à celle du A.3.1 (de rapport $\frac{1}{3}$).

B.1.1 * $MX = (a_{ij})\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix}\ell_1\\\ell_2\\\ell_3\end{pmatrix}$ où $\ell_i = \sum_{j=1}^{3}(\vec{u}_i.\vec{u}_j)\,x_j = \vec{u}_i.\left(\sum_{j=1}^{3}\vec{u}_j\,x_j\right) = \vec{u}_i.\vec{v}$

d'où la formule $MX = \begin{pmatrix}\vec{u}_1.\vec{v}\\\vec{u}_2.\vec{v}\\\vec{u}_3.\vec{v}\end{pmatrix}$.

On déduit :

$$^tXMX = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix}\vec{u}_1.\vec{v}\\\vec{u}_2.\vec{v}\\\vec{u}_3.\vec{v}\end{pmatrix} = x_1\vec{u}_1.\vec{v} + x_2\vec{u}_2.\vec{v} + x_3\vec{u}_3.\vec{v} = \|\vec{v}\|^2$$

* Si $MX=0$, alors $\|\vec{v}\|^2 = {}^tXMX = 0$ donc $\vec{v}=\vec{0}$. Réciproquement, $\vec{v}=\vec{0}$ entraine $MX=0$ d'après la formule ci-dessus.

* Supposons $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ libre, et résolvons l'équation en $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$:

$$MX=0$$

Elle équivaut à $\vec{v} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3 = \vec{0}$ d'après ce qui précède, donc à $X=0$ puisque $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ est libre. M sera donc la matrice d'une application linéaire injective, donc bijective. M sera bien inversible.

Réciproquement, si M est inversible, considérons une combinaison linéaire nulle :

$$\vec{v} \doteq x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3 = \vec{0}$$

$\vec{v}=\vec{0}$ entraine $MX=0$, donc $X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ puisque M est inversible. Finalement $x_1=x_2=x_3=0$ et le système $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ est libre.

B.1.2 M est symétrique donc <u>diagonalisable dans une base orthonormale formée de vecteurs propres</u>. <u>Toutes ses valeurs propres seront réelles</u>.
Si λ est une valeur propre de M et si X est un vecteur propre associé à λ, ${}^tXMX = \|\vec{v}\|^2$ devient $\lambda\|X\|^2 = \|\vec{v}\|^2$, donc $\lambda \geq 0$.

B.2.1

<u>Unicité</u> : Si σ existe, il est entièrement déterminé par les images des vecteurs de la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ de E, comme toute application linéaire.

<u>Existence</u> : Soit σ l'unique application linéaire telle que :

$$\sigma(\vec{u}_i) = \vec{u}'_i \qquad i \in \mathbb{N}_3$$

Il s'agit de montrer que σ est une application orthogonale, ie qu'elle conserve le produit scalaire. Soient $\vec{v} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$ et $\vec{w} = y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 + y_3\vec{u}_3$, on a :

$$\begin{aligned}\sigma(\vec{v}).\sigma(\vec{w}) &= \Big(\sum_i x_i \vec{u}'_i\Big).\Big(\sum_j y_j \vec{u}'_j\Big) \\ &= \sum_{i,j} x_i y_j \, \vec{u}'_i . \vec{u}'_j \\ &= \sum_{i,j} x_i y_j \, \vec{u}_i . \vec{u}_j \\ &= \Big(\sum_i x_i \vec{u}_i\Big)\Big(\sum_j y_j \vec{u}_j\Big) = \vec{v}.\vec{w}\end{aligned}$$

CQFD

B.2.2 Il suffit de compléter $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ en une base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ de E telle que $\vec{u}_3$ soit orthogonal au plan $\mathbb{R}\vec{u}_1 + \mathbb{R}\vec{u}_2$. Soit $\vec{u}'_3$ orthogonal à $\mathrm{Vect}(\vec{u}'_1, \vec{u}'_2)$ et de norme $\|\vec{u}_3\|$. On aura $\vec{u}_i . \vec{u}_j = \vec{u}'_i . \vec{u}'_j$ pour tous $i, j \in \mathbb{N}_3$ et l'on pourra appliquer B.2.1 pour obtenir une application orthogonale σ telle que $\sigma(\vec{u}_i) = \vec{u}'_i \ \forall i$

Cette fois-ci, σ n'est plus unique

parce qu'on peut recommencer la construction de σ avec $-\vec{u}'_3$ au lieu de $\vec{u}'_3$ (qui est aussi dans $\mathrm{Vect}(\vec{u}'_1, \vec{u}'_2)^\perp$)

NB : Montrons directement que $(\vec{u}'_1, \vec{u}'_2)$ est nécessairement libre. Si $\alpha\vec{u}'_1 + \beta\vec{u}'_2 = \vec{0}$, on aura $\alpha\vec{u}'_1.\vec{u}'_1 + \beta\vec{u}'_1.\vec{u}'_2 = \vec{0}$ donc $\alpha\vec{u}_1.\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_1.\vec{u}_2 = \vec{0}$, donc $\vec{u}_1.(\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2) = \vec{0}$. De même : $\vec{u}_2.(\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2) = \vec{0}$. Ainsi $\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2$ est un vecteur du plan $\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ orthogonal à la fois à $\vec{u}_1$ et à $\vec{u}_2$, c'est donc $\vec{0}$, et $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ étant libre, on obtient $\alpha = \beta = 0$. CQFD

B.3.1.a G étant une gerbe, on trouvera facilement 2 vecteurs directeurs unitaires $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ de d_2 et d_3 tels que

$$\vec{u}_1.\vec{u}_2 = \gamma \qquad \text{et} \qquad \vec{u}_1.\vec{u}_3 = \gamma$$

De 2 choses l'une :

– Si $\vec{u}_2.\vec{u}_3 = \gamma$, on aura bien $\vec{u}_1.\vec{u}_2 = \vec{u}_1.\vec{u}_3 = \vec{u}_2.\vec{u}_3 = \gamma$

– Si $\vec{u}_2.\vec{u}_3 = -\gamma$, il suffit de prendre $\vec{u}'_2 = -\vec{u}_2$ et $\vec{u}'_3 = -\vec{u}_3$ pour avoir : $\vec{u}_1.\vec{u}'_2 = \vec{u}_1.\vec{u}'_3 = \vec{u}'_2.\vec{u}'_3 = -\gamma$

B.3.1.b

* $\chi_M(X) = \begin{vmatrix} 1-X & c & c \\ c & 1-X & c \\ c & c & 1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-X-c & c & c \\ c-1+X & 1-X & c \\ 0 & c & 1-X \end{vmatrix} = (1-X-c)(X^2-(2+c)X-2c^2+c+1)$
$= -(X-(1+2c))(X-(1-c))^2$

Les valeurs propres de M sont donc $1+2c$ et $1-c$

* M est la matrice de Gram de $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ donc toutes ses valeurs propres sont positives (B.1.2). Ici $1+2c \geq 0 \Rightarrow c \geq -\frac{1}{2}$

B.3.1.c Soit $c > -\frac{1}{2}$. G étant une gerbe, $c \neq 1$ et $\det M = (1-c)^2(1+2c)$ sera non nul. Cela prouve que <u>$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est libre</u> (B.1.1).

Comme $c \in]-\frac{1}{2}, 1[$, il existera $h \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(h) = c$.

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ les vecteurs directeurs unitaires des droites (ΩI), (ΩJ), (ΩK) de la gerbe $G_h \doteq \{(\Omega I), (\Omega J), (\Omega K)\}$ définie par A.2.5.b pour ce choix de h.

<u>B.2.1 montre l'existence d'une isométrie σ de E transformant $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ en $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, donc G en G_h.</u>

B.3.1.d Si $c=-\frac{1}{2}$, alors $M\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $\vec{u_1}+\vec{u_2}+\vec{u_3}=\vec{0}$ (B.1.1)

* $(\vec{u_1},\vec{u_2})$ est libre (car $d_1\neq d_2$). Prenons $h=0$ en A.2.5, et notons G_0 la gerbe $\{(OI),(OJ),(OK)\}$ correspondante. On a, avec les notations de A.2.5 :

$$\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{w}=\vec{w}.\vec{u}=\varphi(0)=-\frac{1}{2}$$

et comme $\vec{u_1}.\vec{u_2}=\vec{u_2}.\vec{u_3}=\vec{u_3}.\vec{u_1}=-\frac{1}{2}$, on peut appliquer B.2.2 pour obtenir une application orthogonale σ telle que $\sigma(\vec{u_1})=\vec{u}$ et $\sigma(\vec{u_2})=\vec{v}$, ce qui entraine bien évidemment :

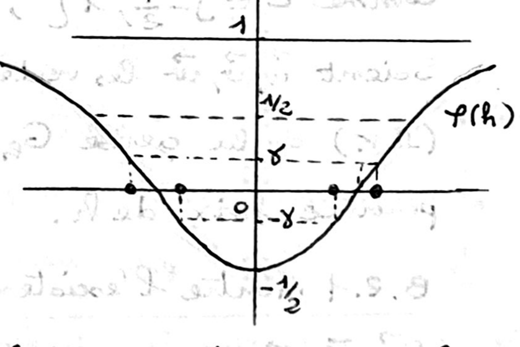
$$\sigma(\vec{u_3})=\sigma(-\vec{u_1}-\vec{u_2})=-\vec{u}-\vec{v}=\vec{w}$$

ie $\sigma(G)=G_0$. <u>G et G_0 sont isométriques</u>.

B.3.2

* Tout élément $\gamma\in[0,1[$ est tel qu'il existe au moins une gerbe d'ordre 3 et de rapport γ, puisque la gerbe G_h du A.2.5.b est de rapport $|\varphi(h)|$ et que $\mathrm{Im}\,\varphi=[-\frac{1}{2},1[$.
* D'après B.3.1, toute gerbe G d'ordre 3 et de rapport γ est isométrique à une gerbe G_h de A.2.5 telle que $|\varphi(h)|=\gamma$, ie

$$\varphi(h)=\pm\gamma \quad (*)$$



Les variations de φ (ci-contre) montrent que :

1) Si $\gamma\in]0,\frac{1}{2}]$, 4 valeurs de h vérifient (*) si $\gamma\neq\frac{1}{2}$, et 3 valeurs si $\gamma=\frac{1}{2}$. Comme G_h est isométrique à $G_{h'}$ ssi $\varphi(h)=\varphi(h')$ (A.2.5.f), on obtient 2 classes d'équivalences de gerbes d'ordre 3 et de rapport γ pour la relation "est isométrique à" dans l'ensemble des gerbes de E.

2) Si $\gamma \notin]0, \frac{1}{2}]$, $\varphi(h) = \gamma$ n'est satisfait que pour 2 valeurs opposées de h, et donc 2 gerbes G_h et G_{-h} sont susceptibles d'être isométriques à G. Elles le sont entre elles car $\varphi(h) = \varphi(-h)$ (A.2.5.f)
Dans ce cas, on dénombre une seule classe d'équivalence possible !

C.1.1.a Si H est un sgroupe d'ordre m de T, alors :

$$\forall z \in H \qquad z^m = 1$$

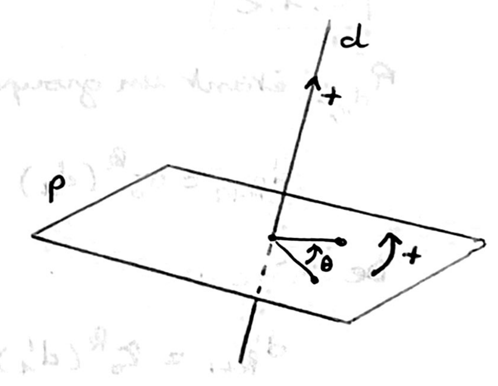
et z sera une racine m-ième de l'unité. Comme il y a exactement m racines m-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$, à savoir les $e^{ik\frac{2\pi}{m}}$, on aura :

$$H = \{ e^{ik\frac{2\pi}{m}} \ / \ 0 \leq k \leq m-1 \}$$

Réc., l'ensemble des racines m-ièmes de l'unité forme un sgroupe d'ordre m de T.

C.1.1.b Fixons une orientation de d et un plan affine P orthogonal à d. L'isomorphisme cherché est :

$$\Psi : T \longrightarrow R_d$$
$$e^{i\theta} \longmapsto [d, \theta]$$



où $[d, \theta]$ représente la rotation d'axe d et d'angle mesuré par θ dans le plan P orienté par d.

L'unique sgroupe d'ordre m de R_d sera donc

$$R_{d,m} \doteq \{ [d, k\frac{2\pi}{m}] \ / \ 0 \leq k \leq m-1 \}$$

C.1.1.c

$*$ Soit $g \doteq f \circ \sigma \circ f^{-1}$ où $\sigma \in R_{d,m}$. $\det \vec{g} = \det \vec{f} \cdot \det \vec{\sigma} \cdot (\det \vec{f})^{-1} = 1$ donc $\vec{g} \in SO(E)$, et g sera un vissage. De

$$g(M) = M \iff f \circ \sigma \circ f^{-1}(M) = M \iff \sigma(f^{-1}(M)) = f^{-1}(M)$$
$$\iff f^{-1}(M) \in d$$
$$\iff M \in f(d) \doteq d'$$

on déduit que g possède des points invariants, et que $\mathrm{Inv}\, g = d'$. Ainsi g sera une rotation d'axe $d' = f(d)$.

Enfin $g^m = (f \sigma f^{-1})^m = f \sigma^m f^{-1} = f f^{-1} = Id$ montre que g est d'angle $k\frac{2\pi}{m}$, soit $g = [d', k\frac{2\pi}{m}] \in R_{d',m}$. On a montré que :

$$\{f \circ \sigma \circ f^{-1} \,/\, \sigma \in R_{d,m}\} \subset R_{d',m}$$

$*$ Réc., notons $\varphi_f : R_{d,m} \longrightarrow O(E_3)$, $\sigma \longmapsto f \circ \sigma \circ f^{-1}$. On vient de montrer que $\varphi_f(R_{d,m}) \subset R_{d',m}$.

Donc aussi $\varphi_{f^{-1}}(R_{d',m}) \subset R_{d,m}$. En appliquant φ_f des 2 côtés, et en remarquant que $\varphi_f \circ \varphi_{f^{-1}} = Id$, on trouve $R_{d',m} \subset \varphi_f(R_{d,m})$.

<u>Conclusion : $\varphi_f(R_{d,m}) = R_{d',m}$</u>

C.1.2 Prenons un élément d'_k quelconque de $\{d'_1, \ldots, d'_m\}$, soit :

$$d'_k = \tau(d'_1) \qquad \text{où } \tau \in R_{d'_0,m}$$

D'après C.1.1.c, il existe $\sigma \in R_{d_0,m}$ tel que $\tau = f \circ \sigma \circ f^{-1}$. D'où :

$$d'_k = f \circ \sigma \circ f^{-1}(d'_1) = f \circ \sigma(d_1) = f(d_\ell)$$

en posant $d_\ell = \sigma(d_1) \in \{d_1, \ldots, d_m\}$.

On a montré que :

$$\{d'_1, \ldots, d'_m\} \subset f(\{d_1, \ldots, d_m\}) \qquad (*)$$

Comme $f(\{d_1, \ldots, d_m\})$ est un ensemble de m droites distinctes (puisque f est une isométrie, donc bijective et transformant une dte en une dte), la dernière inclusion est, en fait, une égalité :

$$\{d'_1, \ldots, d'_m\} = f(\{d_1, \ldots, d_m\})$$

CQFD

NB : 2° solution. Pour montrer l'inclusion réciproque de $(*)$, on applique $(*)$ avec f^{-1} au lieu de f : $\{d_1, \ldots, d_m\} \subset f^{-1}(\{d'_1, \ldots, d'_m\})$ d'où $f(\{d_1, \ldots, d_m\}) \subset \{d'_1, \ldots, d'_m\}$

C.1.3

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ est la matrice de la partie linéaire de ρ.

ρ est une isométrie affine (car les vecteurs-colonnes de M forment une b.o. de E) dont le s.e.a. des points invariants est la droite d'équations $x = y = z$. $\det M = 1$ montre que ρ est positive. Ce sera donc une rotation d'axe d.

Il suffit de vérifier que $M^2 \neq I$ et $M^3 = I$ pour s'assurer que ρ est d'ordre 3. $\{Id_E, \rho, \rho^2\}$ est donc un groupe d'ordre 3 qui, d'après l'unicité d'un tel groupe (C.1.1), ne peut être que $R_{d,3}$:

$$R_{d,3} = \{ Id_E, \rho, \rho^2 \}$$

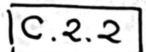
C.2.1

* Si $\gamma = 0$, les n droites $d_0, d_1, \dots, d_m$ seraient orthogonales 2 à 2 dans un espace de dimension 3, ce qui est impossible car $n \geq 4$.

* Soient $\vec{u}'_k$ des vecteurs unitaires des d_k. Par hypothèse :

$$|\vec{u}_0 . \vec{u}'_k| = \gamma \quad \forall k$$

donc $\vec{u}_0 . \vec{u}'_k = \varepsilon_k \gamma$ avec $\varepsilon_k = \pm 1$. Il suffit de choisir $\vec{u}_k \doteq \varepsilon_k \vec{u}'_k$ pour que $\vec{u}_0 . \vec{u}_k = \gamma$, $\forall k \in \mathbb{N}_m$.



C.2.2

$* \ \overrightarrow{IA_k}.\overrightarrow{\Omega I} = (\overrightarrow{\Omega A_k} - \overrightarrow{\Omega I}).\overrightarrow{\Omega I}$
$= (\vec{u}_k - \gamma \vec{u}_0).\gamma \vec{u}_0$
$= \gamma \vec{u}_k.\vec{u}_0 - \gamma^2$
$= 0$

donc $\boxed{A_k \in \Pi}$

$\Pi = V(I, d_0^\perp)$; $\overrightarrow{\Omega I} = \gamma \vec{u}_0$

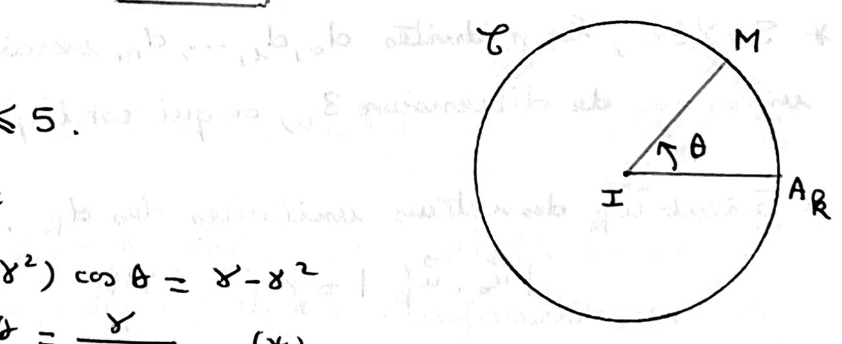
$* \ \overrightarrow{IA_k}.\overrightarrow{IA_\ell} = (\overrightarrow{\Omega A_k} - \overrightarrow{\Omega I})(\overrightarrow{\Omega A_\ell} - \overrightarrow{\Omega I})$
$= (\vec{u}_k - \gamma \vec{u}_0)(\vec{u}_\ell - \gamma \vec{u}_0)$
$= \vec{u}_k.\vec{u}_\ell + \gamma^2 - \gamma \vec{u}_k.\vec{u}_0 - \gamma \vec{u}_0.\vec{u}_\ell = \boxed{\vec{u}_k.\vec{u}_\ell - \gamma^2}$

$*$ Si $k=\ell$, on obtient $IA_k^2 = 1-\gamma^2 > 0$. $A_1, \dots, A_m$ appartiennent ainsi au cercle $\mathcal{C}$ de Π de centre I et de rayon $\sqrt{1-\gamma^2}$.

C.2.3

$S_k \doteq \{A_k\} \cup \{M \in \mathcal{C} \ / \ \overrightarrow{IA_k}.\overrightarrow{IM} = \gamma - \gamma^2 \text{ ou } -\gamma-\gamma^2\}$

Comme $|\vec{u}_k.\vec{u}_\ell| = \gamma$, la formule $\overrightarrow{IA_k}.\overrightarrow{IA_\ell} = \vec{u}_k.\vec{u}_\ell - \gamma^2$ montre que pour tout k, $\{A_1, \dots, A_m\} \subset S_k$. Donc $m = n-1 \leq \# S_k$.
Comme $\# S_k \leq 5$, on déduit $\boxed{n \leq 6}$



NB : Vérifions que $\# S_k \leq 5$.
Posons $\widehat{A_k I M} = \theta$. On a :

$\overrightarrow{IA_k}.\overrightarrow{IM} = \gamma - \gamma^2 \iff (1-\gamma^2)\cos\theta = \gamma - \gamma^2$
$\iff \cos\theta = \dfrac{\gamma}{1+\gamma} \quad (*)$

Comme $\dfrac{\gamma}{1+\gamma} \in]0,1[$, il y a exactement 2 valeurs opposées de θ vérifiant $(*)$. L'autre cas :

$\overrightarrow{IA_k}.\overrightarrow{IM} = -\gamma-\gamma^2 \iff \cos\theta = \dfrac{\gamma}{\gamma-1} \in]-\infty, 0[$ d'où au plus 2 points M du cercle. Ccl : $\# S_k = 5$ ou 3.

C.2.4

Si l'on ne pouvait pas changer l'indexation des $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m$ pour obtenir $\vec{u}_1.\vec{u}_2 = \vec{u}_1.\vec{u}_3$, on aurait :

$$\forall i,j,k \in \mathbb{N}_m \qquad \vec{u}_i.\vec{u}_j = -\vec{u}_i.\vec{u}_k$$

d'où $\vec{u}_1.\vec{u}_2 = -\vec{u}_3.\vec{u}_2 = \vec{u}_3.\vec{u}_1 = -\vec{u}_2.\vec{u}_1$, puis $\vec{u}_1.\vec{u}_2 = \gamma = 0$, ce qui est absurde (C.2.1).

C.2.5

* D'après C.2.2 :

$$\begin{cases} \vec{IA_1}.\vec{IA_2} = \vec{u}_1.\vec{u}_2 - \gamma^2 \\ \vec{IA_1}.\vec{IA_3} = \vec{u}_1.\vec{u}_3 - \gamma^2 \end{cases}$$

Comme $\vec{u}_1.\vec{u}_2 = \vec{u}_1.\vec{u}_3$, on obtient $\vec{IA_1}.\vec{IA_2} = \vec{IA_1}.\vec{IA_3}$, d'où :

$$\cos\alpha = \cos(\widehat{\vec{IA_1},\vec{IA_3}})$$

$$\widehat{\vec{IA_1},\vec{IA_3}} = \pm\alpha \quad [2\pi]$$

$\widehat{\vec{IA_1},\vec{IA_3}} = \alpha$ est impossible (sinon $A_2 = A_3$ et $d_2 = d_3$) donc

$$\boxed{\widehat{\vec{IA_1},\vec{IA_3}} = -\alpha \quad [2\pi]}$$

* $\widehat{\vec{IA_2},\vec{IA_3}} = \widehat{\vec{IA_1},\vec{IA_3}} - \widehat{\vec{IA_1},\vec{IA_2}} = -2\alpha$

* De $\vec{IA_1}.\vec{IA_3} = \vec{u}_1.\vec{u}_3 - \gamma^2 = (1-\gamma^2)\cos\alpha$ et de $\vec{u}_1.\vec{u}_3 = \pm\gamma$ on déduit $\cos\alpha \in \left\{\frac{\gamma}{1+\gamma}, \frac{-\gamma}{1-\gamma}\right\}$

De $\vec{IA_2}.\vec{IA_3} = \vec{u}_2.\vec{u}_3 - \gamma^2 = (1-\gamma^2)\cos(-2\alpha)$ et $\vec{u}_2.\vec{u}_3 = \pm\gamma$ on déduit aussi $\cos 2\alpha \in \left\{\frac{\gamma}{1+\gamma}, \frac{-\gamma}{1-\gamma}\right\}$.

C.2.6.a

* $\cos 2\alpha = \cos\alpha \iff 2\cos^2\alpha - \cos\alpha - 1 = 0 \iff \cos\alpha = 1$ ou $-\frac{1}{2}$.

$\cos\alpha = 1$ entraine $\alpha = 0$ d'où $A_1 = A_2$ et $d_1 = d_2$. C'est exclus ! Donc $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\alpha = \pm\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

On aura donc :
$$\begin{cases} IA_1 = IA_2 = \sqrt{1-\gamma^2} \\ (\overrightarrow{IA_1}, \overrightarrow{IA_2}) = \pm\frac{2\pi}{3} & [2\pi] \\ (\overrightarrow{IA_1}, \overrightarrow{IA_3}) = \mp\frac{2\pi}{3} & [2\pi] \end{cases}$$

ce qui prouve que <u>$A_1A_2A_3$ est un triangle équilatéral</u>.

* $\cos\alpha = -\frac{1}{2} \in \left\{\frac{\gamma}{1+\gamma}, \frac{-\gamma}{1-\gamma}\right\} \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{1}{3}}$.

C.2.6.b

Si $M \in S \setminus \{A_1, A_2, A_3\}$, d'après C.2.2 :

$$\forall i = 1,2,3 \qquad \overrightarrow{IA_i}\cdot\overrightarrow{IM} = \pm\gamma - \gamma^2 = \pm\frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9} \text{ ou } -\frac{4}{9}$$

Choisissons $j \in \{1,2,3\}\setminus\{i\}$. On a :
$$\overrightarrow{IA_i}\cdot\overrightarrow{IA_j} = (1-\gamma^2)\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{9}\right) = \frac{-4}{9}$$

De sorte que :
$$\overrightarrow{IA_i}\cdot(\overrightarrow{IA_j} - \overrightarrow{IM}) = 0$$
$$\overrightarrow{IA_i}\cdot\overrightarrow{MA_j} = 0$$

ce qui entraine $M \in \{A_1, A_2, A_3\}$ puisque $A_1A_2A_3$ équilatéral et $M \in \mathcal{C}$. Absurde

ce qui entraine $M \in \{A_1, A_2, A_3\}$ puisque $A_1A_2A_3$ est équilatéral et $M \in \mathcal{C}$. C'est absurde.

Donc, dans tous les cas :
$$\overrightarrow{IA_i}\cdot\overrightarrow{IM} = \frac{2}{9}$$

* $\vec{IA_1}.\vec{IM} + \vec{IA_2}.\vec{IM} + \vec{IA_3}.\vec{IM} = (\vec{IA_1}+\vec{IA_2}+\vec{IA_3}).\vec{IM} = 0$ car I est le cdg du triangle équilatéral $A_1A_2A_3$. Cela contredit les 3 égalités que l'on vient de prouver !

C.2.6.c

Soit G la gerbe obtenue en C.2.6.b :

Notons G_A la gerbe du A.3.1 (voir figure du A.3.1). $G_A \doteq \{d'_0, d'_1, d'_2, d'_3\}$ avec

$d'_0 \doteq (OA)$ de vect. dir. unit. $\vec{u}'_0 = \frac{\vec{OA}}{OA} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$d'_1 \doteq (OB)$ " " $\vec{u}'_1 = \frac{\vec{OB}}{OB} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

$d'_2 \doteq (OC)$ " " $\vec{u}'_2$

$d'_3 \doteq (OD)$ " " $\vec{u}'_3$

G et G_A ont même rapport $\frac{1}{3}$, et en fait : $\vec{u}_0.\vec{u}_1 = \frac{1}{3} = \vec{u}'_0.\vec{u}'_1$.
$(\vec{u}_0, \vec{u}_1)$ étant libre, B.2.2 montre l'existence d'une isométrie f de $\mathcal{E}$ telle que $f(d_0) = d'_0$ et $f(d_1) = d'_1$.

On a : $G = \{d_0, d_1, d_2, d_3\}$ et $\{d_1, d_2, d_3\} = \{\sigma(d_1) / \sigma \in R_{d_0,3}\}$ où $R_{d_0,3} = \{Id_{\mathcal{E}}, r, r^2\}$, r désignant la rotation d'axe d_0 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

$G_A = \{d'_0, d'_1, d'_2, d'_3\}$ vérifie $\{d'_1, d'_2, d'_3\} = \{\sigma(d'_1) / \sigma \in R_{d'_0,3}\}$ où $R_{d'_0,3} = \{Id_{\mathcal{E}}, \rho, \rho^2\}$, ρ étant la rotation d'axe d'_0 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ définie au C.1.3. En effet, si $M = \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, on a :
$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $\rho(B) = C$, et $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ donc $D = \rho(C)$, et bien sûr $\rho(D) = \rho^3(B) = B$.

On peut appliquer C.1.2 et conclure : G_A est l'image de G par l'isométrie f.

C.2.7.a $a+b=2ab$.

Comme $\{a,b\}=\{\cos\alpha, \cos 2\alpha\}$, on aura :

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha = 2\cos\alpha\cos 2\alpha \iff \cos\alpha+\cos 2\alpha = \cos 3\alpha + \cos\alpha$$

$$\iff \boxed{\cos 2\alpha = \cos 3\alpha}$$

C.2.7.b

$$\cos 2\alpha = \cos 3\alpha \iff \begin{cases} 2\alpha = 3\alpha + k2\pi \\ \text{ou} \\ 2\alpha = -3\alpha + k2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha \equiv 0 \ [2\pi] \text{ à rejeter (sinon } A_1 = A_2) \\ \text{ou} \\ \alpha = k\frac{2\pi}{5} \quad (1 \le k \le 4) \end{cases}$$

$\vec{IA_1}.\vec{IA_2} = \vec{u_1}.\vec{u_2} - \gamma^2$ devient alors :

$$(1-\gamma^2)\cos\alpha = \gamma - \gamma^2$$

$$\cos k\frac{2\pi}{5} = \frac{\gamma}{1+\gamma}$$

Connaissant les valeurs de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$ (A.3.2.a) et sachant que $\gamma > 0$, on déduit $k=\pm 1$ et

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \frac{\gamma}{1+\gamma} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{5}}}$$

---

* On a $\widehat{\vec{IA_1},\vec{IA_2}} = \alpha = \pm\frac{2\pi}{5}$ et $\widehat{\vec{IA_1},\vec{IA_3}} = -\alpha = \mp\frac{2\pi}{5}$.

$S_1 \doteq \{M \in \mathcal{C} / \vec{IA_1}.\vec{IM} = \pm\gamma - \gamma^2\} \cup \{A_1\}$

$= \{M \in \mathcal{C} / \cos(\vec{IA_1},\vec{IM}) \in \{\frac{\gamma}{1+\gamma}, \frac{-\gamma}{1-\gamma}\} = \{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\}\} \cup \{A_1\}$

montre que S_1 contient A_1, A_2 et A_3 ainsi que les sommets du pentagone régulier $A_1A_2A_4A_5A_3$ construit sur ces 3 sommets A_1, A_2, A_3 et inscrit dans $\mathcal{C}$.

<u>Finalement</u> : <u>S_1 est un pentagone</u>

<u>$S \subset S_1$</u>

C.3.1 Ce sont les couples (n, δ) suivants :

- $(4, \frac{1}{3})$ vu en C.2.6 et isométrique à la gerbe du A.3.1
- $(4, \frac{1}{\sqrt{5}})$, $(5, \frac{1}{\sqrt{5}})$, $(6, \frac{1}{\sqrt{5}})$: gerbes extraites d'une gerbe d'ordre 6 obtenue comme en C.2.7.

C.3.2.a

* Comme d_0, d_1, d'_0, d'_1 sont dans la gerbe G de rapport $\frac{1}{\sqrt{5}}$, il existera des vecteurs directeurs unitaires $\vec{u}_0, \vec{u}_1, \vec{u}'_0, \vec{u}'_1$ respectifs de ces 4 droites tels que :

$$\vec{u}_0 . \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} = \vec{u}'_0 . \vec{u}'_1$$

B.2.2 montre alors l'existence d'une isométrie f transformant d_0 en d'_0 et d_1 en d'_1.

* Remarque importante :

Si $G' = \{d'_0, ..., d'_5\}$ est une gerbe d'ordre 6, on peut recommencer toute la construction du C.2 en choisissant n'importe laquelle des 6 droites de G' pour jouer le rôle de d_0. C.2.7.b montre alors :

$$\forall i \in \{0, ..., 5\} \quad \forall j \neq i \quad G' = \{d'_i\} \cup \{r(d'_j) \,/\, r \in R_{d'_i, 5}\}$$

* Lorsque $f(d_0) = d'_0$ et $f(d_1) = d'_1$, notons $G' \doteq f(G) = \{d'_0, d'_1, ..., d'_5\}$. Par hypothèse $d'_0, d'_1 \in G$, donc en utilisant 2 fois la remarque précédente :

$$G = \{d'_0\} \cup \{r(d'_1) \,/\, r \in R_{d'_0, 5}\} = G'$$

et finalement $\boxed{f(G) = G}$

C.3.2.b

* Si $k=4$, soient H' et H'' deux gerbes d'ordre 4 incluses dans G. On a $G \setminus H' = \{d'_0, d'_1\}$ et $G \setminus H'' = \{d''_0, d''_1\}$, et C.3.2.a montre l'existence d'une isométrie f telle que $f(G \setminus H') = G \setminus H''$ et $f(G) = G$. On conclut : $f(H') = H''$

Toutes les sous-gerbes de G d'ordre 4 sont donc isométriques.

* Si $k=5$, prenons 2 gerbes H' et H'' d'ordre 5 dans G. Posons $G \setminus H' = \{d'_0\}$ et $G \setminus H'' = \{d''_0\}$. C.3.2.a montre l'existence d'une isométrie f telle que

$$\begin{cases} f(d'_0) = d''_0 \\ f(d'_1) = d'_1 \\ f(G) = G \end{cases}$$

ce qui entraine $f(G \setminus \{d'_0\}) = G \setminus \{d''_0\}$, ie $f(H') = H''$.

Les gerbes d'ordre 5 incluses dans G seront isométriques.

* Si $k=3$, montrons la :

Proposition : Avec les notations de la figure ci-dessous, les gerbes $G_1 = \{d_0, d_1, d_2\}$ et $G_2 = \{d_1, d_2, d_3\}$ ne sont pas isométriques. Il existe donc des représentants inclus dans G des 2 classes d'équivalence de gerbes d'ordre 3 selon la relation "est isométrique à" obtenues en B.3.2.

d_2 d_3 d_0 d_1 d_4 d_5

<u>Remarque :</u>

Si les $\vec{u}_i$ dirigent les droites d_i comme dans les questions C.2, on remarque que :

$$\vec{u}_k\cdot\vec{u}_l = \vec{IA_k}\cdot\vec{IA_l} + \gamma^2 = (1-\gamma^2)\cos(\vec{IA_k},\vec{IA_l}) + \gamma^2$$

$$= \frac{4}{5}\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\right) + \frac{1}{5} \qquad \text{selon } (\vec{IA_k},\vec{IA_l}) = \pm\frac{2\pi}{5} \text{ ou } \pm\frac{4\pi}{5}$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

et de façon plus précise :

$$\vec{u}_k\cdot\vec{u}_l = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}} & \text{si } A_k \text{ et } A_l \text{ sont 2 sommets consécutifs du pentagone, ou si l'un des indices } k \text{ ou } l \text{ est nul} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>preuve de la proposition :</u>

Si f est une isométrie transformant G_1 en G_2, alors

$$f(\vec{u}_0), f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2) \in \{\pm\vec{u}_1, \pm\vec{u}_2, \pm\vec{u}_3\}$$

et il suffit de constater que chaque cas possible mène à une absurdité. Examinons par exemple le cas où :

$$\begin{cases} f(\vec{u}_0) = \varepsilon\,\vec{u}_1 \\ f(\vec{u}_1) = \eta\,\vec{u}_2 \\ f(\vec{u}_2) = \tau\,\vec{u}_3 \end{cases} \qquad \varepsilon,\eta,\tau \in \{\pm1\}$$

On obtient :

$$\left.\begin{array}{lll} \underbrace{\vec{u}_0\cdot\vec{u}_1}_{1/\sqrt{5}} = f(\vec{u}_0)\cdot f(\vec{u}_1) = \varepsilon\eta\,\underbrace{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2}_{1/\sqrt{5}} & \Rightarrow & \varepsilon\eta = 1 \\ \underbrace{\vec{u}_0\cdot\vec{u}_2}_{1/\sqrt{5}} = \varepsilon\tau\,\underbrace{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_3}_{-1/\sqrt{5}} & \Rightarrow & \varepsilon\tau = -1 \\ \underbrace{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2}_{1/\sqrt{5}} = \eta\tau\,\underbrace{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_3}_{1/\sqrt{5}} & \Rightarrow & \eta\tau = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon^2\eta^2\tau^2 = -1 \text{ absurde}$$

Les autres cas sont identiques à celui-ci puisque seuls les signes des produits scalaires $\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2$, $\vec{u}_1\cdot\vec{u}_3$ et $\vec{u}_2\cdot\vec{u}_3$ $(+,+,-)$ ont joué un rôle déterminant. CQFD

C.3.3

* Si G est une gerbe du type $(n,\gamma) = (4, \frac{1}{3})$, alors elle est donnée par C.2.6 et sera isométrique à celle du A.3.1.

* Si G et G' sont 2 gerbes du type $(n,\gamma) = (6, \frac{1}{\sqrt{5}})$, elles sont obtenues par C.2.7, ie

$$G = \{d_0, \dots, d_5\} \qquad \{d_1, \dots, d_5\} = \{\sigma(d_1) \,/\, \sigma \in R_{d_0,5}\}$$
$$G' = \{d_0', \dots, d_5'\} \qquad \{d_1', \dots, d_5'\} = \{\sigma'(d_1) \,/\, \sigma' \in R_{d_0',5}\}$$

B.2.2 montre l'existence d'une isométrie f transformant d_0 et d_1 respectivement en d_0' et d_1' ; et C.1.2 prouve que $f(G) = G'$.

* Si H et H' sont 2 gerbes du type $(n,\gamma) = (5, \frac{1}{\sqrt{5}})$ ou $(4, \frac{1}{\sqrt{5}})$, alors ce seront des sous-gerbes de gerbes d'ordre 6, disons :

$$H \subset G \qquad H' \subset G'$$

G et G' sont isométriques. Soit f une isométrie réalisant $f(G) = G'$. On aura :

$$H \sim \underbrace{f(H) \sim H'}$$

puisque les sous-gerbes de G' d'ordre 5 ou 4 sont isométriques entre elles d'après C.3.2.b

FIN

COMPLEMENT

C.3.2.b | Autre preuve de C.3.2.b qui n'utilise pas C.3.2.a :

Remarque primordiale :

Soit G une gerbe d'ordre 6 : avec les notations

$$\vec{u}_k\cdot\vec{u}_\ell = \vec{IA_k}\cdot\vec{IA_\ell} + \gamma^2 = (1-\gamma^2)\cos t\frac{2\pi}{5} + \gamma^2 \qquad t = 1 \text{ ou } 2$$

$$= \frac{4}{5}\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\right) + \frac{1}{5}$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

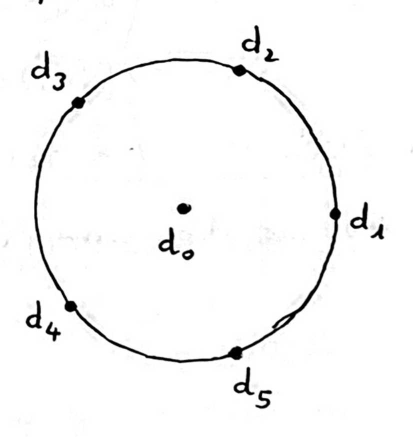
et de façon plus précise :

$$\vec{u}_k\cdot\vec{u}_\ell = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \text{si } A_k, A_\ell \text{ sont 2 sommets consécutifs du pentagone, ou si l'un des indices } k \text{ ou } \ell \text{ est nul} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition :

Si $k=3$, les gerbes $G_1 = \{d_0, d_1, d_2\}$ et $G_2 = \{d_1, d_2, d_3\}$ ne sont pas isométriques.

Par contre G_1 et $G_3 = \{d_1, d_2, d_4\}$ sont isométriques.



preuve : Si f est une isométrie transformant G_1 en G_2, alors

$$f(\vec{u}_0), f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2) \in \{\pm\vec{u}_1, \pm\vec{u}_2, \pm\vec{u}_3\}$$

et il suffit de constater que chacun de ces cas mène à une absurdité. Prenons par exemple le cas où :

$$(*) \quad \begin{cases} f(\vec{u}_0) = \epsilon\,\vec{u}_1 \\ f(\vec{u}_1) = \eta\,\vec{u}_2 \\ f(\vec{u}_2) = \tau\,\vec{u}_3 \end{cases} \qquad \epsilon, \eta, \tau \in \{\pm 1\}$$

On obtient :

$$\underbrace{\vec{u}_0.\vec{u}_1}_{1/\sqrt{5}} = f(\vec{u}_0).f(\vec{u}_1) = \varepsilon\eta\, \underbrace{\vec{u}_1.\vec{u}_2}_{1/\sqrt{5}} \Rightarrow \varepsilon\eta = 1$$

$$\underbrace{\vec{u}_0.\vec{u}_2}_{1/\sqrt{5}} = \varepsilon\tau\, \underbrace{\vec{u}_1.\vec{u}_3}_{-1/\sqrt{5}} \Rightarrow \varepsilon\tau = -1$$

$$\underbrace{\vec{u}_1.\vec{u}_2}_{1/\sqrt{5}} = \eta\tau\, \underbrace{\vec{u}_2.\vec{u}_3}_{1/\sqrt{5}} \Rightarrow \eta\tau = 1$$

absurde car entraîne $\varepsilon^2\eta^2\tau^2 = -1$

Les autres cas sont semblables à celui-ci (voir les signes des produits scalaires $\vec{u}_1.\vec{u}_2$, $\vec{u}_1.\vec{u}_3$ et $\vec{u}_2.\vec{u}_3$: $+,+,-$). Ainsi G_1 et G_2 ne sont pas isométriques

<u>Montrons que G_1 et G_3 sont isométriques</u> : on construit f ainsi

$$f : G_1 = \{d_0, d_1, d_2\} \longrightarrow G_3 = \{d_4, d_2, d_1\}$$

De :

$$\begin{cases} \vec{u}_0.\vec{u}_1 = \vec{u}_0.\vec{u}_2 = \vec{u}_1.\vec{u}_2 = \gamma \\ (-\vec{u}_4).\vec{u}_2 = (-\vec{u}_4).\vec{u}_1 = \vec{u}_2.\vec{u}_1 = \gamma \end{cases}$$

on déduit (B.2.1) l'existence d'une isométrie f telle que

$$\begin{cases} f(\vec{u}_0) = -\vec{u}_4 \\ f(\vec{u}_1) = \vec{u}_2 \\ f(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 \end{cases}$$

f vérifie bien $f(G_1) = G_3$.

CQFD

Lemme : L'isométrie f définie dans la proposition précédente par :

$$\begin{cases} f(\vec{u}_0) = -\vec{u}_4 \\ f(\vec{u}_1) = \vec{u}_2 \\ f(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 \end{cases}$$

vérifie aussi $f(G) = G$. Plus précisément :

$$\begin{array}{ccccccc} & d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \\ f & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & d_4 & d_2 & d_1 & d_3 & d_0 & d_5 \end{array}$$

preuve : On utilise 3 fois le résultat suivant :

$$\begin{cases} -\vec{u}_4 \cdot \vec{v} = \gamma \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{v} = \gamma \\ \vec{u}_1 \cdot \vec{v} = \gamma \end{cases} \text{ et } \begin{cases} -\vec{u}_4 \cdot \vec{w} = \gamma \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{w} = \gamma \\ \vec{u}_1 \cdot \vec{w} = \gamma \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \vec{w}$$

(qui se vérifie ainsi : si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont choisis de la sorte, $\vec{v} - \vec{w}$ sera orthogonal à $-\vec{u}_4, \vec{u}_2, \vec{u}_1$, donc $\vec{v} - \vec{w} \in (\text{Vect}(-\vec{u}_4, \vec{u}_2, \vec{u}_1))^{\perp} = \{\vec{0}\}$)

avec :

$$\begin{cases} -\vec{u}_4 \cdot f(\vec{u}_3) = f(\vec{u}_0) f(\vec{u}_3) = \gamma \\ \vec{u}_2 \cdot f(\vec{u}_3) = -\gamma \\ \vec{u}_1 \cdot f(\vec{u}_3) = \gamma \end{cases} \qquad \begin{cases} -\vec{u}_4 \cdot (-\vec{u}_3) = \gamma \\ \vec{u}_2 \cdot (-\vec{u}_3) = -\gamma \\ \vec{u}_1 \cdot (-\vec{u}_3) = \gamma \end{cases} \Rightarrow f(\vec{u}_3) = -\vec{u}_3$$

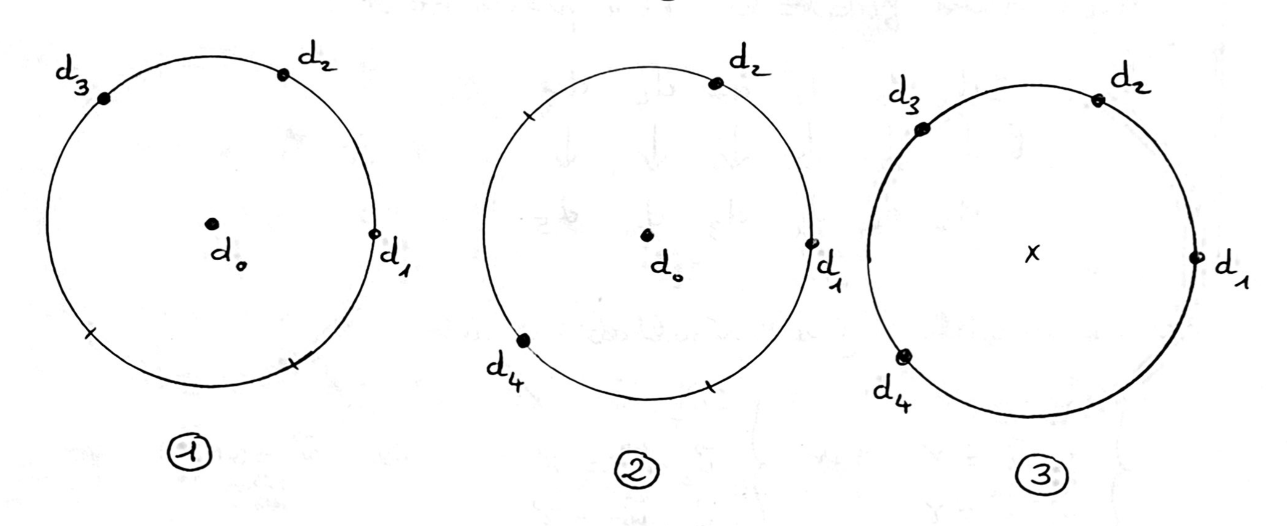
$$\begin{cases} -\vec{u}_4 \cdot f(\vec{u}_4) = \gamma \\ \vec{u}_2 \cdot f(\vec{u}_4) = -\gamma \\ \vec{u}_1 \cdot f(\vec{u}_4) = -\gamma \end{cases} \qquad \begin{cases} -\vec{u}_4 \cdot (-\vec{u}_0) = \gamma \\ \vec{u}_2 \cdot (-\vec{u}_0) = -\gamma \\ \vec{u}_1 \cdot (-\vec{u}_0) = -\gamma \end{cases} \Rightarrow f(\vec{u}_4) = -\vec{u}_0$$

$$\begin{cases} -\vec{u}_4 \cdot f(\vec{u}_5) = \gamma \\ \vec{u}_2 \cdot f(\vec{u}_5) = \gamma \\ \vec{u}_1 \cdot f(\vec{u}_5) = -\gamma \end{cases} \qquad \begin{cases} -\vec{u}_4 \cdot (-\vec{u}_5) = \gamma \\ \vec{u}_2 \cdot (-\vec{u}_5) = \gamma \\ \vec{u}_1 \cdot (-\vec{u}_5) = -\gamma \end{cases} \Rightarrow f(\vec{u}_5) = -\vec{u}_5$$

CQFD

Gerbes d'ordre $k=4$

Toutes les sous-gerbes d'ordre 4 de G sont données ci-dessous, à une rotation près d'axe d_0 et d'angle $k\frac{2\pi}{5}$:



L'isométrie f définie au lemme précédent vérifie :

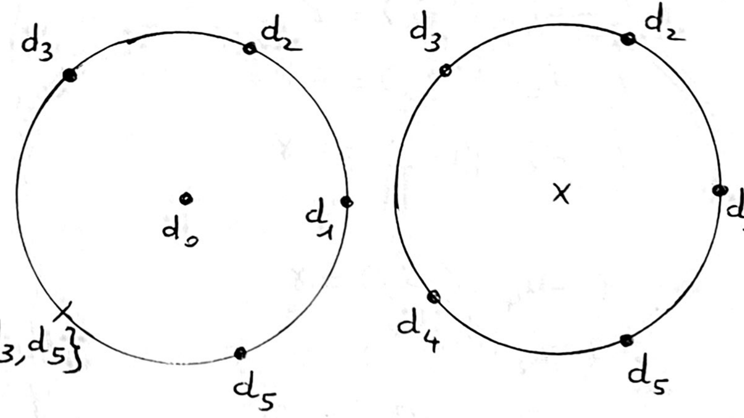
$f(\{d_0, d_1, d_2, d_3\}) = \{d_4, d_2, d_1, d_3\}$ donc ① ∼ ③

$f(\{d_0, d_2, d_3, d_4\}) = \{d_4, d_1, d_3, d_0\}$ donc ① ∼ ②

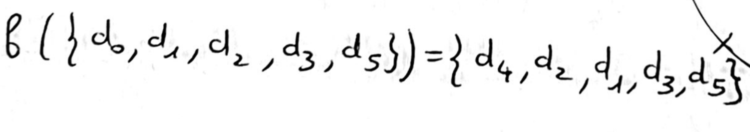
<u>Toutes les gerbes d'ordre 4 incluses dans G seront donc isométriques.</u>

Gerbes d'ordre $k=5$

A rotation d'axe d_0 près, on trouve :



Encore ici le lemme permet d'écrire :



$f(\{d_0, d_1, d_2, d_3, d_5\}) = \{d_4, d_2, d_1, d_3, d_5\}$

et f réalise une isométrie entre les 2 gerbes.

<u>Toutes les sous-gerbes d'ordre 5 de G sont isométriques</u>

FIN

SESSION DE 1994

concours externe de recrutement de professeurs certifiés

section : mathématiques

première composition de mathématiques

Durée : 5 heures

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche — éventuellement programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Tournez la page S.V.P.

Objet et notations du problème

Ce problème a pour objet l'étude du rayon minimum des disques d'un plan affine euclidien contenant k points à coordonnées entières.

Soit $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers relatif, $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels, $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes. On note $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

Dans tout le problème, P désigne un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On établit une bijection entre P et $\mathbb{C}$ en associant à chaque point de P son affixe dans $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et on appelle point entier tout point de P dont l'affixe appartient à $\mathbb{Z}[i]$.

Pour $r \in \mathbb{R}$, $r \geqslant 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $M_0 \in P$, on appelle disque de centre z_0 (respectivement M_0) et de rayon r l'ensemble $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leqslant r\}$ (respectivement $D(M_0, r) = \{M \in P \mid M_0M \leqslant r\}$).

Si E est un ensemble fini, on note card(E) son cardinal et, pour tout entier k, $k \geqslant 2$, on désigne par r_k le réel, s'il existe, défini par : $r_k = \min\{r > 0 \mid \exists z_0 \in \mathbb{C},\ \mathrm{card}(\mathbb{Z}[i] \cap D(z_0, r)) \geqslant k\}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $[x]$ la partie entière de x, c'est-à-dire l'unique entier relatif vérifiant $[x] \leqslant x < [x] + 1$.

I. **Détermination de r_2, r_3 et r_4.**

I.1. Soit M et M′ deux points entiers distincts. Montrer que $MM' \geqslant 1$.
En déduire que, si M et M′ appartiennent tous deux à $D(M_0, r)$, alors $2r \geqslant 1$.

I.2. Montrer que r_2 existe et vaut $\frac{1}{2}$.

I.3.

I.3.1. En considérant le triangle OAB où A et B ont pour affixes respectives 1 et i, montrer que, si r_3 existe, alors $r_3 \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

I.3.2. Soit C et D deux points entiers distincts et différents de O. Montrer que l'une au moins des distances OC, OD ou CD est supérieure ou égale à $\sqrt{2}$.

I.3.3. Déterminer r_3.

I.4. Montrer que, si r_4 existe, on a $r_4 \geqslant r_3$. En considérant les points O, A, B introduits en I.3.1. et le point d'affixe $1 + i$, déterminer r_4.

II. **Quelques résultats préliminaires.**

II.1. Dans toute cette question, A, B et C désignent trois points non alignés de P. On note R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, $\widehat{A}$ la mesure comprise entre 0 et π de l'angle en A de ce triangle, a, b, c les longueurs BC, CA et AB.

II.1.1. Montrer que $R = \dfrac{a}{2 \sin \widehat{A}}$.

II.1.2. Exprimer $\cos \widehat{A}$, puis R^2 en fonction de a, b et c.

II.1.3. Montrer que, si A, B et C sont des points entiers, R^2 est un rationnel.

II.2. Soit $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, et $D(O, r)$ le disque de centre O et de rayon r. Le but de cette question est de montrer que la fonction définie par $r \mapsto \operatorname{card}(\mathbb{Z}[i] \cap D(O, r))/r^2$ admet une limite lorsque $r \to +\infty$ et de déterminer cette limite.

II.2.1. Montrer que, si z est l'affixe d'un point entier contenu dans $D(O, r)$, alors $-r \leqslant \operatorname{Re}(z) \leqslant r$ et $-r \leqslant \operatorname{Im}(z) \leqslant r$.

II.2.2. Soit n un entier, $0 \leqslant n \leqslant [r]$. Montrer que le nombre des points entiers d'abscisse n contenus dans $D(O, r)$ est $1 + 2\left[\sqrt{r^2 - n^2}\right]$.

II.2.3. En déduire que : $\operatorname{card}(\mathbb{Z}[i] \cap D(O, r)) = 1 + 4 \sum_{n=0}^{[r]} \left[\sqrt{r^2 - n^2}\right]$ puis que :

$$-4[r] - 3 + 4 \sum_{n=0}^{[r]} \sqrt{r^2 - n^2} \leqslant \operatorname{card}(\mathbb{Z}[i] \cap D(O, r)) \leqslant 1 + 4 \sum_{n=0}^{[r]} \sqrt{r^2 - n^2}.$$

II.2.4. Montrer que la fonction définie par $r \mapsto \sum_{n=0}^{[r]} \sqrt{r^2 - n^2}/r^2$ a pour limite $I = \int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\, dt$ lorsque $r \to +\infty$. Calculer I et conclure.

III. Existence de r_k et rationalité de r_k^2.

Dans cette partie, k est un entier supérieur ou égal à 3.

III.1. Montrer que l'ensemble $A_k = \{ r > 0 \mid \exists z_0 \in \mathbb{C},\ \operatorname{card}(\mathbb{Z}[i] \cap D(z_0, r)) \geqslant k \}$ admet une borne inférieure strictement positive m_k.

III.2. Montrer que : pour tout entier k, $k \geqslant 3$, $m_{k+1} \geqslant m_k$.

III.3. Soit $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A_k de limite m_k.

III.3.1. Montrer qu'il existe une suite $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes vérifiant $0 \leqslant \operatorname{Re}(\zeta_n) < 1$, $0 \leqslant \operatorname{Im}(\zeta_n) < 1$ et $\operatorname{card}(\mathbb{Z}[i] \cap D(\zeta_n, \rho_n)) \geqslant k$.

III.3.2. Montrer qu'il existe une suite extraite $(\zeta_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de la suite $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un nombre complexe ζ.

III.3.3. Montrer que $\operatorname{card}(\mathbb{Z}[i] \cap D(\zeta, m_k)) \geqslant k$. En déduire l'existence de r_k.

III.4. Soit D_k un disque de rayon r_k contenant au moins k points entiers, ω_k son centre et Γ_k le cercle de centre ω_k et de rayon r_k.

III.4.1. Montrer que Γ_k contient au moins un point entier.

III.4.2. Montrer que, si Γ_k ne contenait qu'un point entier M_k, il existerait un point ω'_k intérieur au segment $[\omega_k, M_k]$ tel que $D(\omega'_k, \omega'_k M_k)$ contiendrait au moins k points entiers. En déduire que Γ_k contient au moins deux points entiers.

III.4.3. Montrer que, si Γ_k ne contient que deux points entiers, ils sont diamétralement opposés sur Γ_k.

III.4.4. Montrer que r_k^2 est rationnel (on utilisera II.1.3.).

III.5. **Application.**

III.5.1. Soit D_k un disque de rayon r_k contenant au moins k points entiers. Montrer qu'il existe un disque D'_k, de centre ω'_k, de rayon r_k, contenant au moins k points entiers, tel que le point O appartienne au cercle Γ'_k, de centre ω'_k, de rayon r_k, et que tous les points entiers contenus dans Γ'_k aient une ordonnée supérieure ou égale à 0.

III.5.2. Soit D'_k un disque vérifiant les propriétés précédentes. On suppose que Γ'_k ne contient que deux points entiers et que k est strictement supérieur à 4. Montrer que r_k est supérieur ou égal à 1.

III.5.3. Soit encore D'_k un disque vérifiant les propriétés précédentes. On suppose que Γ'_k contient au moins trois points entiers et que k est strictement supérieur à 4. Montrer que r_k est supérieur ou égal à 1.

III.5.4. Déterminer les valeurs de r_5 et de r_6.

Tournez la page S.V.P.

IV. **Une majoration de** r_k.

Soit n un entier naturel non nul.
On pose $n\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid (a, b) \in (n\mathbb{Z})^2\}$.

IV.1. Montrer que la relation définie sur $\mathbb{Z}[i]$ par :

$$(a + ib)\mathscr{R}(a' + ib') \Leftrightarrow (a + ib) - (a' + ib') \in (n\mathbb{Z})^2$$

est une relation d'équivalence.

IV.2. Quel est le cardinal de $\mathbb{Z}[i]/\mathscr{R}$?

IV.3. Montrer que, pour tout entier k, $k \geqslant 2$, πr_k^2 n'est pas un entier.

IV.4. On suppose que r est un réel positif tel que πr^2 n'est pas un entier. Montrer que, pour n assez grand, D(O, nr) contient au moins $[\pi r^2]\, n^2 + 1$ points entiers et que, parmi ces points, il en existe $[\pi r^2] + 1$ qui appartiennent à la même classe d'équivalence pour $\mathscr{R}$.

IV.5. Soit $z_0, \ldots, z_{[\pi r^2]}$ les affixes de ces $[\pi r^2] + 1$ points entiers.

IV.5.1. Montrer que $\dfrac{z_0}{n}, \ldots, \dfrac{z_{[\pi r^2]}}{n}$ sont les affixes de points de D(O, r) vérifiant :

pour tout entier j, $0 \leqslant j \leqslant [\pi r^2]$, $\dfrac{(z_j - z_0)}{n} \in \mathbb{Z}[i]$.

IV.5.2. Soit ω le point d'affixe $\dfrac{-z_0}{n}$. Montrer que le disque D(ω, r) contient au moins $[\pi r^2] + 1$ points entiers.

IV.6. Soit k un entier, $k \geqslant 2$, α un réel, $0 < \alpha < 1$, et r_α le réel positif tel que : $\pi r_\alpha^2 = k - 1 + \alpha$.
Montrer que $r_k \leqslant r_\alpha$.

En déduire que : pour tout entier k, $k \geqslant 2$, $r_k \leqslant \sqrt{\dfrac{k-1}{\pi}}$.

V. **Une minoration de** r_k.

Dans toute cette partie, D_k désigne un disque de rayon r_k contenant au moins k points entiers, dont le centre ω_k a pour affixe z_k. On suppose de plus $0 \leqslant \mathrm{Re}\,(z_k) < 1$ et $0 \leqslant \mathrm{Im}\,(z_k) < 1$.

À tout élément $x + iy$ de $\mathbb{Z}[i]$ vérifiant $x > 0$ et $y > 0$ on associe le carré dont les sommets ont pour affixes respectives $x + iy$, $x - 1 + iy$, $x - 1 + i(y - 1)$ et $x + i(y - 1)$.

À tout élément $x + iy$ de $\mathbb{Z}[i]$ vérifiant $xy \neq 0$ on associe le carré obtenu comme image du carré construit comme ci-dessus à partir de $|x| + i\,|y|$ par la symétrie (par rapport à O ou par rapport à l'un des axes) qui transforme le point d'affixe $|x| + i\,|y|$ en le point d'affixe $x + iy$.

V.1. Montrer l'existence d'un tel disque D_k.

V.2. Soit M un point entier de D_k dont l'affixe $x + iy$ vérifie $xy \neq 0$ et $(x - 1)(y - 1) \neq 0$.
Montrer que le carré associé est contenu dans D_k.

V.3. En comparant l'aire de D_k à la somme des aires des carrés ainsi définis, montrer que $\pi r_k^2 \geqslant k - 8[r_k]$.

En déduire que : pour tout entier k, $k \geqslant 2$, $r_k \geqslant \dfrac{-4 + \sqrt{16 + k\pi}}{\pi}$.

VI. **Conclusion.**

Montrer que r_k est équivalent à $\sqrt{\dfrac{k}{\pi}}$ lorsque $k \to +\infty$.

CAPES externe 1994 *

1ère composition

* CORRECTION PROPOSEE PAR DANY-JACK MERCIER

ROCK 'N ROLL ! SITE MEGAMATHS

Posons $A_k = \{r > 0 \,/\, \exists z_0 \in \mathbb{C} \quad \#(\mathbb{Z}[i] \cap D(z_0, r)) \geq k\}$ et remarquons que $A_k \neq \emptyset$ pour tout $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

I.1

* Notons $M\binom{x}{y}$, $M'\binom{x'}{y'}$. On a $MM' = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$

M et M' entiers et distincts entraînent $|x-x'| \geq 1$ ou $|y-y'| \geq 1$.
Supposons, par exemple $|x-x'| \geq 1$. Alors :

$$MM' \geq |x-x'| \geq 1$$

* Si M et M' sont 2 points entiers distincts de $D(M_0, r)$, alors

$$1 \leq MM' \leq MM_0 + M_0M' \leq 2r$$

soit $\boxed{r \geq \frac{1}{2}}$

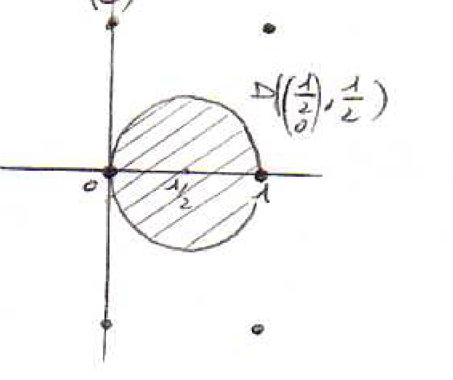
I.2

(1) Si $r \in A_2$, il existe au moins 2 points distincts M et M' de $\mathbb{Z}[i] \cap D(M_0, r)$ et I.1 assure $r \geq \frac{1}{2}$.

(2) En fait $\frac{1}{2} \in A_2$ puisque $\# \mathbb{Z}[i] \cap D\left(\binom{1/2}{0}, \frac{1}{2}\right) = 2$ (cf fig. 1)

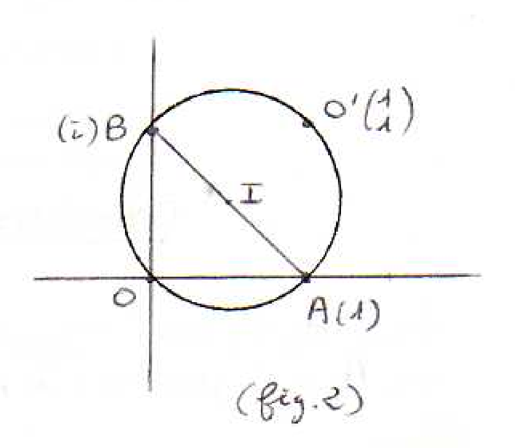
(1) et (2) prouve que $\operatorname{Min} A_2 = \frac{1}{2}$,

soit $\boxed{r_2 = \frac{1}{2}}$



(fig. 1)

I.3.1



(fig.2)

OAB est rectangle en O, donc O appartient au cercle de diamètre [AB]. Notons I son centre, on constate que $AB = \sqrt{2}$ et :

$$D\left(I, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cap \mathbb{Z}[i] = \{O, A, B, O'\}$$

donc $\frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbb{A}_3$.

Par suite, si r_3 existe, alors $r_3 \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

I.3.2

Supposons que $OC < \sqrt{2}$ et $OD < \sqrt{2}$, et notons $C\binom{x}{y}$. D'après I.1, $OC \geq 1$ d'où

$$1 \leq OC < \sqrt{2} \Rightarrow 1 \leq OC^2 = x^2 + y^2 < 2$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$
$$\Rightarrow OC = 1$$

(fig.3)

Cela prouve que $C \in \mathcal{B} \doteq \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ où $B_1(1)$, $B_2(i)$, $B_3(-1)$ et $B_4(-i)$.

De même $D \in \mathcal{B}$. Il suffit alors de constater que la distance B_iB_j $(i \neq j)$ vaut soit $\sqrt{2}$, soit 2, pour conclure à $CD \geq \sqrt{2}$.

NB : La figure 3 est très parlante.

I.3.3

* Le résultat I.3.2 est en fait valable pour 3 points entiers quelconques distincts 2 à 2 O', B', C' : on se ramène au cas O, B, C du I.3.2 par translation. Si t désigne la translation de vecteur $\vec{O'O}$, posons $B = t(B')$ et $C = t(C')$. O, C, B sont entiers et distincts 2 à 2, de sorte que I.3.2 s'applique : l'une des distances OC, OD, CD sera $\geq \sqrt{2}$.
Comme $O'C' = OC$, $O'D' = OD$ et $C'D' = CD$, l'une des distances $O'C', O'D', C'D'$ sera bien $\geq \sqrt{2}$.

* Soit $r \in A_3$. Il existe $M_0 \in P$ et 3 points entiers distincts A, B, C dans $D(M_0, r)$. L'un des côtés du triangle ABC sera supérieur à $\sqrt{2}$, par exemple $AB \geq \sqrt{2}$.
Comme AB est inférieur au diamètre $2r$ du disque $D(M_0, r)$, on obtient :

$D(M_0, r)$ · A · B · C · M_0

(fig. 4)

$$\sqrt{2} \leq 2r$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq r$$

* Conclusion : $\frac{\sqrt{2}}{2} \in A_3$ d'après I.3.1, et $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est un minorant de A_3 donc $\boxed{r_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}}$ existe.

I.4

* Clairement $A_{k+1} \subset A_k$, ce qui entraîne $\text{Inf}\, A_k \leq \text{Inf}\, A_{k+1}$.
Si r_k et r_{k+1} existent, on peut donc affirmer :

$$\boxed{r_k \leq r_{k+1}}$$

Ici r_3 existe (I.3), Si r_4 existe, on aura effectivement $r_4 \geq r_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

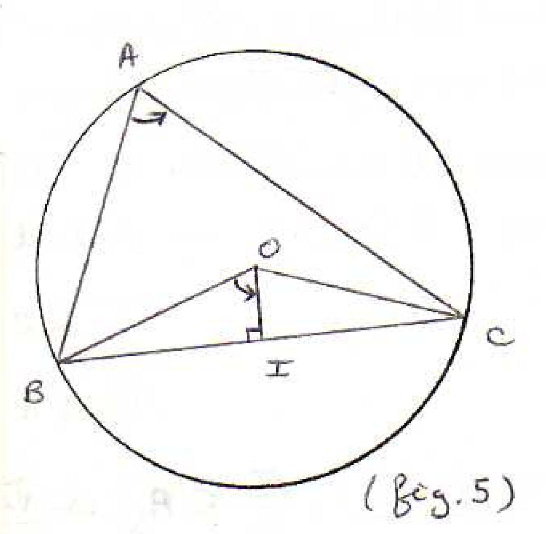
∗ Reprenons la figure 2. Avec les notations de cette figure :

$$\mathbb{Z}[i] \cap D\left(I, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \geq 4$$

et cela prouve que $\frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbb{A}_4$.

∗ Si $r \in \mathbb{A}_4 \subset \mathbb{A}_3$, alors $r \geq r_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est donc un minorant de $\mathbb{A}_4$. On vient de voir que $\frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbb{A}_4$: $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est donc le minimum de A_4.

<u>r_4 existe bien et $r_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$</u>.



(fig. 5)

II.1.1

On a, si I désigne le milieu de $[BC]$:

$$2(\vec{OB}, \vec{OI}) = (\vec{OB}, \vec{OC}) = 2(\vec{AB}, \vec{AC}) \quad [2\pi]$$

$$(\vec{OB}, \vec{OI}) = (\vec{AB}, \vec{AC}) \quad [\pi]$$

Dans le triangle rectangle OBI :

$$BI = OB \, . \, |\sin(\vec{OB}, \vec{OI})|$$

$$= OB \, . \, |\sin((\vec{AB}, \vec{AC}) + k\pi)| \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$= OB \, . \, |\sin(\vec{AB}, \vec{AC})|$$

$$= OB \sin \hat{A}$$

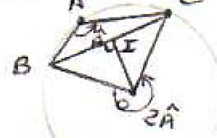
d'où

$$\frac{a}{2} = R \, . \sin \hat{A}$$

$$\boxed{R = \frac{a}{2 \sin \hat{A}}}$$

<u>2° solution</u> : Soit B' diamétralement opposé à B
$BB'C$ est rectangle donc $BC = BB' \sin \hat{B'}$ où $\hat{B'}$ désigne l'angle géométrique $(\vec{B'B}, \vec{B'C})$.
Par cocyclicité $(\vec{B'B}, \vec{B'C}) = (\vec{AB}, \vec{AC})$ $[\pi]$ et donc, avec des angles géométriques ("écarts angul
$\sin \hat{B'} = \sin \hat{A}$. Par suite $a = 2R \sin \hat{A}$. CQFD
(NB : Si on veut rester avec des angles géom., envisager 2 cas de figu

<u>NB</u> : Notons $\hat{A}$ (resp. $\hat{O}$) l'angle géom-étrique saillant $(\vec{AB}, \vec{AC})$ (resp. $(\vec{OB}, \vec{O}$
Écrire $\hat{A} = \hat{O}$ est vrai dans le cas de la fig. 5, mais faux sur la fig. 5 ci-dessous :



où $\hat{O} = \frac{2\pi - 2\hat{A}}{2} = \pi - \hat{A}$. D'où le ch
rester avec des angles géométriques e

II.1.2 La formule d'Al Kashi permet d'écrire :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

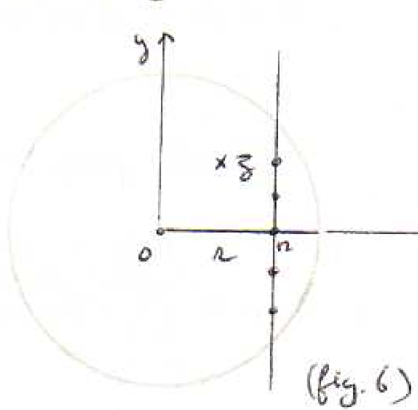
D'où $R^2 = \dfrac{a^2}{4\sin^2\hat{A}} = \dfrac{a^2}{4} \cdot \dfrac{1}{1-\cos^2\hat{A}} = \dfrac{a^2b^2c^2}{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}$

II.1.3 Si A, B, C sont des points entiers, les carrés des côtés a^2, b^2, c^2 du triangle ABC seront dans $\mathbb{N}$ et la formule exprimant R^2 dans la question précédente montre bien que $R^2 \in \mathbb{Q}$.

II.2.1

Posons $z = x + iy$.

Si $z \in D(0,r)$, alors $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq r$ et $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq r$.



(fig. 6)

II.2.2

z est l'affixe d'un point entier d'abscisse n dans $D(0,r)$ ssi

$$z = n + iy \quad \text{avec} \quad n^2+y^2 \leq r^2$$

On a :

$$n^2+y^2 \leq r^2 \iff y^2 \leq r^2-n^2 \iff |y| \leq \sqrt{r^2-n^2} \iff |y| \leq [\sqrt{r^2-n^2}]$$

la dernière équivalence provenant de l'hypothèse $y \in \mathbb{Z}$.

Il y aura donc $1 + 2[\sqrt{r^2-n^2}]$ points entiers de $D(0,r)$ d'abscisse

II.2.3 En utilisant la symétrie par rapport à Oy, on obtient :

$$\#(\mathbb{Z}[i] \cap D(0,r)) = 2\sum_{n=0}^{[r]} (1+2[\sqrt{r^2-n^2}]) - (1+2[r])$$

$$= 1 + 4\sum_{n=0}^{[r]} [\sqrt{r^2-n^2}]$$

Notons ξ ce cardinal. Compte tenu de l'encadrement

$$x-1 < [x] \leq x$$

valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$1 + 4\sum_{n=0}^{[r]} \left(\sqrt{r^2-n^2} - 1\right) < \xi \leq 1 + 4\sum_{n=0}^{[r]} \sqrt{r^2-n^2} \qquad (*)$$

Le membre de gauche de l'inégalité stricte ci-dessus vaut successivement :

$$1 - 4([r]+1) + 4\sum_{n=0}^{[r]} \sqrt{r^2-n^2} = -4[r] - 3 + 4\sum_{n=0}^{[r]} \sqrt{r^2-n^2}$$

de sorte que (*) entraîne les inégalités demandées.

II.2.4

- Posons $S_r = \sum_{n=0}^{[r]} \frac{\sqrt{r^2-n^2}}{r^2} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{[r]} \sqrt{1-\left(\frac{n}{r}\right)^2} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{[r]} f\left(\frac{n}{r}\right)$

avec $f(t) = \sqrt{1-t^2}$.

Si $m \in \mathbb{N}$, la somme de Riemann de l'application f définie et continue (donc intégrable) sur $[0,1]$ s'écrit :

$$S'_m = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{m} f\left(\frac{n}{m}\right) \quad \text{(pour une subdivision régulière de pas } \tfrac{1}{m}\text{)}$$

On sait que $\lim_{m\to+\infty} S'_m = I \doteq \int_0^1 f(t)\,dt$. On sait aussi que $\lim_{m\to+\infty} S''_m = I$ avec $S''_m = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{m} f\left(\frac{n}{m}\right)$ puisque $\lim_{m\to+\infty} \frac{f(1)}{m} = 0$.

Il s'agit de prouver que $\lim_{r\to+\infty} S_r = I$. Posons $m = [r]$, alors :

$$m \leq r < m+1 \Rightarrow \frac{1}{m+1} < \frac{1}{r} \leq \frac{1}{m} \Rightarrow \frac{n}{m+1} < \frac{n}{r} \leq \frac{n}{m}$$

et puisque f est décroissante :

$$f\left(\frac{n}{m}\right) \leq f\left(\frac{n}{r}\right) < f\left(\frac{n}{m+1}\right)$$

Donc :

$$\frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m} f\left(\frac{n}{m}\right) \leq S_r < \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m} f\left(\frac{n}{m+1}\right)$$

$$\underbrace{\frac{m}{m+1}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m} f\left(\frac{n}{m}\right)}_{\to I} \leq S_r < \underbrace{\frac{m+1}{m}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m} f\left(\frac{n}{m+1}\right)}_{\to I}$$

$(m\to+\infty)$ (car somme de Riemann de f) — (idem)

Si $r\to+\infty$, $m=[r]\to+\infty$ et le Th des gendarmes montre que $\lim_{r\to+\infty} S_r = I$.

- <u>Calcul de I</u> : par le changement de variable $t = \sin u$,

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2u}{2}\, du = \frac{\pi}{4}$$

- L'encadrement de II.2.3 permet d'écrire :

$$-4\frac{[r]}{r^2} - \frac{3}{r^2} + 4S_r \leq \frac{\#(\mathbb{Z}[i] \cap D(0,r))}{r^2} \leq \frac{1}{r^2} + 4S_r$$

Comme $\lim\limits_{r\to+\infty} \frac{[r]}{r^2} = 0$ et $\lim\limits_{r\to+\infty} S_r = I = \frac{\pi}{4}$, le Th des gendarmes montre que la limite de $\frac{\#(\mathbb{Z}[i] \cap D(0,r))}{r^2}$ existe si $r \to +\infty$, et

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\#(\mathbb{Z}[i] \cap D(0,r))}{r^2} = 4I = \pi$$

III.1 Si $k \geq 3$, A_k n'est pas vide (car $D(0,k)$ contient plus de k points entiers, à savoir $1, 2, \dots, k$), et $A_k \subset A_3$ entraine $r \geq r_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ pour tout $r \in A_k$. A_k est donc une partie minorée non vide de $\mathbb{R}$, et admettra une borne inférieure m_k. On aura $m_k \geq \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$.

III.2 Si $k \geq 2$, $A_{k+1} \subset A_k$ entraine $m_k \leq m_{k+1}$.

III.3.1 $\rho_n \in A_k$ donc il existe $\xi_n \in \mathbb{C}$ tel que $\#(\mathbb{Z}[i] \cap D(\xi_n, \rho_n)) \geq k$

$$z \in \mathbb{Z}[i] \cap D(\xi_n, \rho_n) \iff |z - \xi_n| \leq \rho_n \qquad (*)$$

Posons $\xi_n = x_n + iy_n$ avec $\begin{cases} x_n = [x_n] + x'_n , & x'_n \in [0,1[\\ y_n = [y_n] + y'_n , & y'_n \in [0,1[\end{cases}$

Posons $\zeta_n = x'_n + i y'_n$.

ζ_n vérifie $0 \leq Re\, \zeta_n < 1$ et $0 \leq Im\, \zeta_n < 1$ et :

$$(*) \Leftrightarrow |z - ([x_n] + i[y_n]) - (x'_n + iy'_n)| \leq \rho_n$$

$$\Leftrightarrow |z - ([x_n] + i[y_n]) - \zeta_n| \leq \rho_n \quad (**)$$

Il y a au moins k points z dans $\mathbb{Z}[i] \cap D(\xi_n, \rho_n)$, de sorte que (**) permette d'affirmer l'existence d'au moins k points entiers $z - ([x_n] + i[y_n])$ dans $D(\zeta_n, \rho_n)$.

Conclusion :

$\exists (\zeta_n)_n \quad 0 \leq Re\, \zeta_n < 1 \quad 0 \leq Im\, \zeta_n < 1 \quad \# \mathbb{Z}[i] \cap D(\zeta_n, \rho_n) \geq k$

III.3.2

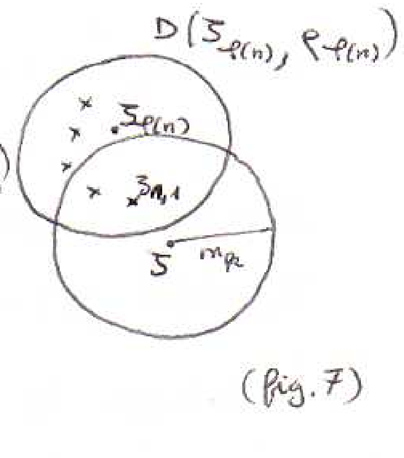
$(\zeta_n)_n$ est une suite de l'espace métrique compact

$$C \doteq \{z \in \mathbb{C} \,/\, 0 \leq Re\, z \leq 1 \text{ et } 0 \leq Im\, z \leq 1\}$$

donc admet au moins une valeur d'adhérence $\zeta \in C$ (*). Il existera bien une sous-suite $(\zeta_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers $\zeta \in C$.

(*) C'est le Th. de Bolzano – Weierstrass

III.3.3



$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists\, z_{n,1}, \dots, z_{n,k}$ distincts, dans $\mathbb{Z}[i] \cap D(\zeta_{\varphi(n)}, \rho_{\varphi(n)})$

donc :

$$|z_{n,i} - \zeta| \leq \underbrace{|z_{n,i} - \zeta_{\varphi(n)}|}_{\leq \rho_{\varphi(n)}} + \underbrace{|\zeta_{\varphi(n)} - \zeta|}_{\to 0}$$

(fig. 7)

et l'on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad n \geq N \Rightarrow |z_{n,i} - \zeta| \leq \rho_{\varphi(n)} + \varepsilon \qquad (1)$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \rho_{\varphi(n)} = m_k$ donc $(\rho_{\varphi(n)})_n$ est bornée et (1) montre que tous les $z_{n,i}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > N$, sont dans un même disque $D(\zeta, \operatorname{Sup}(\rho_{\varphi(n)}) + \varepsilon$.
Pour i fixé, $(z_{n,i})_{n \in \mathbb{N}}$ apparaît comme une suite d'un compact de $\mathbb{C}$, donc admet une valeur d'adhérence $z_i \in \mathbb{C}$.
Quitte à choisir des sous-suites de $(z_{n,1})_n, \dots, (z_{n,k})_n$ successivement, on peut supposer que $(z_{n,i})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers z_i pour $n \to +\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} z_{n,i} = z_i$$

Passons maintenant à la limite dans (1) pour $n \to +\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad |z_i - \zeta| \leq m_k + \varepsilon$$

donc $$|z_i - \zeta| \leq m_k$$

et tous les $z_1, \dots, z_k$ appartiennent à $D(\zeta, m_k)$.

Les z_i $(1 \leq i \leq k)$ sont tous dans $\mathbb{Z}[i]$, car ce sont les limites des $z_{n,i} \in \mathbb{Z}[i]$ et que $\mathbb{Z}[i]$ est fermé dans $\mathbb{C}$.

Enfin, tous les z_i $(1 \leq i \leq k)$ sont distincts 2 à 2, sinon l'on aurait, par exemple, $z_1 = z_2$ et :

$$\lim_{n \to +\infty} z_{n,1} = z_1 = z_2 = \lim_{n \to +\infty} z_{n,2} \qquad (2)$$

$\mathbb{Z}[i]$ est un ensemble discret, de sorte que $\lim_{n \to +\infty} z_{n,1} = z_1$ implique que $(z_{n,1})_n$ soit stationnaire à partir d'un certain rang. De même pour $(z_{n,2})_n$, et (2) entraîne

$$z_{n,1} = z_{n,2}$$

pour n assez grand, ce qui est contraire au choix des $z_{n,1}, \ldots, z_{n,k}$.

Finalement :

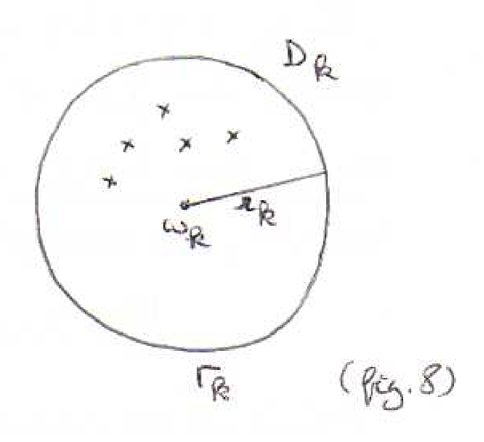
$$\mathbb{Z}[i] \cap D(\zeta, m_k) \supset \{z_1, \ldots, z_k\}$$

donc $\boxed{\# \mathbb{Z}[i] \cap D(\zeta, m_k) \geq k}$

* Cette dernière inégalité prouve que $m_k \in A_k$, et comme $m_k = \operatorname{Inf} A_k$, on déduit :

- que $r_k = \operatorname{Min} A_k$ existe
- que $r_k = m_k$.

III.4.1



(fig. 8)

Si Γ_k ne contenait aucun point entier, on aurait :

$$\mathbb{Z}[i] \cap D_k \subset \mathbb{Z}[i] \cap \mathring{D}_k$$

(où $\mathring{D}_k$ désigne l'intérieur de D_k)

$\mathbb{Z}[i]$ est discret, donc intercepte le compact D_k en un nombre fini de points $z_1, \dots, z_\ell$ (avec $\ell \geq k$ ici).
Il existe un indice $j \in \mathbb{N}_\ell \doteqdot \{1, 2, \dots, \ell\}$ tel que :

$$\forall s \in \mathbb{N}_\ell \qquad |z_s - \omega_k| \leq |z_j - \omega_k| < r_k$$

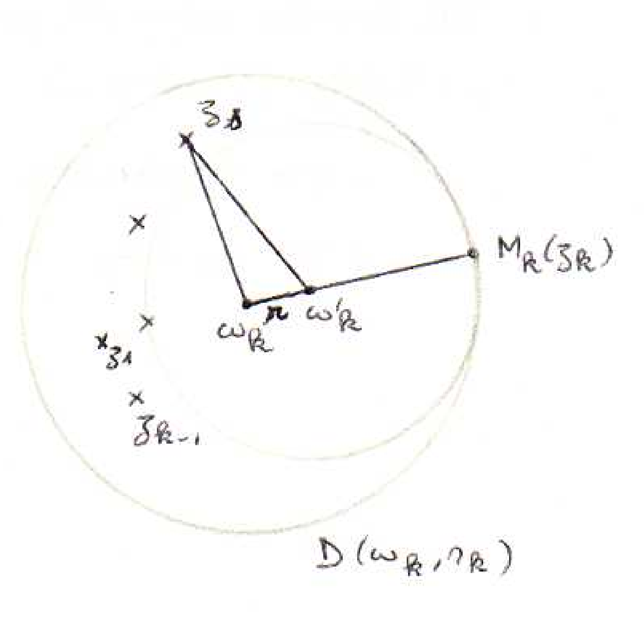
Il suffit de considérer le disque

$$D(\omega_k, |z_j - \omega_k|)$$

pour obtenir un disque contenant les $\ell \geq k$ points entiers $z_1, \dots, z_\ell$ et de rayon strictement inférieur à r_k, ce qui contredit le choix de r_k. CQFD

III.4.2

Supposons par l'absurde que M_k soit le seul point entier de Γ_k.
Notons z_k l'affixe de M_k, et $z_1, \dots, z_{k-1}$ les affixes de $k-1$ autres points entiers de $D(\omega_k, r_k)$.



(fig. 9)

Si $a, b \in \mathbb{C}$, notons ab la distance $|a-b|$ des points d'affixes a et b.

Posons $|z_s - \omega_k| = \sup_{1 \leq i \leq k-1} |z_i - \omega_k|$.

On a, par l'inégalité triangulaire :

$\forall i \in \mathbb{N}_{k-1} \quad \omega'_k z_i \leq \omega'_k \omega_k + \omega_k z_i \leq r + \omega_k z_s \qquad (*)$

où $\omega'_k \in [\omega_k M_k]$ et $r \doteq \omega_k \omega'_k$

On désire trouver $r > 0$ tel que $\omega'_k z_i \leq \omega'_k M_k$ pour tout $i \in \mathbb{N}_{k-1}$

D'après $(*)$, il suffira de trouver $r > 0$ tel que

$$r + \omega_k z_s \leq \omega'_k M_k = r_k - r$$

soit $$r \leq \frac{r_k - \omega_k z_s}{2}$$

ce qui est possible.

Conclusion : $\omega'_k z_i \leq \omega'_k M_k$ pour tout $i \in \mathbb{N}_k$ montre que le disque $D(\omega'_k, \omega'_k M_k)$ de rayon $\omega'_k M_k$ strictement plus petit que r_k contient plus de k points entiers. C'est absurde.

NB : Le disque $D(\omega'_k, \omega'_k M_k)$ contiendra les points $z_1, \ldots, z_{k-1}, M_k$ dès que $\omega'_k \omega_k = r \leq \frac{r_k - \omega_k z_s}{2}$, ie dès que ω'_k est assez proche de ω_k. Cela sera utilisé dans la question suivante.

III.4.3

Supposons par l'absurde que

$$\mathbb{Z}[i] \cap \Gamma_k = \{M_k, N_k\}$$

avec M_k et N_k non diamétralement opposés.
Notons H le milieu de la corde $[M_k N_k]$ et Δ la droite $(\omega_k H)$.

(fig. 10)

Si $\omega'_k \in]\omega_k, H[$, on a :

$$\omega'_k N_k = \omega'_k M_k < \omega_k M_k = r_k \qquad (*)$$

Le raisonnement du III.4.2 appliqué avec $\{D\} = \Gamma_k \cap [\omega_k H)$ à la place de M_k, et avec les points entiers $z_1, z_2, \ldots, z_{k-2}$ de $D(\omega_k, r_k) \setminus \Gamma_k$ montre l'existence de $a_{j_0} \in]\omega_k, D[$ tel que :

$$\omega'_k \in]\omega_k, a_{j_0}[\implies \forall j \in \mathbb{N}_{k-2} \quad \omega'_k z_j < \omega'_k D \qquad (**)$$

Prenons $\omega'_k \in]\omega_k, a_{j_0}[\cap]\omega_k, H[$. (*) et (**) permettent

d'affirmer que les k points entiers $M_k, N_k, z_1, \ldots, z_{k-2}$ appartiennent au disque $D(\omega'_k, \sup(\omega'_k M_k, \omega'_k D))$ de rayon strictement inférieur à r_k. C'est absurde.

CQFD

III.4.4

Il n'y a que 2 possibilités :

* 1^{er} cas : Γ_k contient exactement 2 points entiers

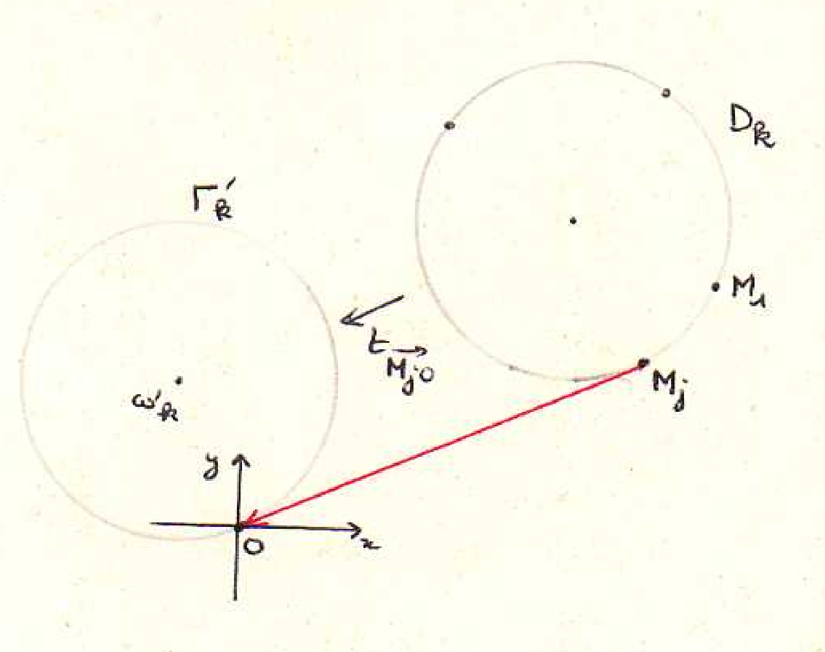
Ces points M_k et N_k sont diamétralement opposés d'après III.4.3 et $r_k^2 = \frac{M_kN_k^2}{4}$ sera rationnel comme quotient de 2 entiers.

* 2^{e} cas : Γ_k contient au moins 3 points A, B, C entiers distincts

A, B, C sont cocycliques et II.1.3 montre que $r_k^2 \in \mathbb{Q}$.

III.5.1

Notons $M_1(z_1), \dots, M_e(z_e)$ tous les points entiers du cercle Γ_k frontière de D_k. Il y en a un nombre fini car un ensemble discret fermé coupe un compact en un nombre fini de points.



Posons $z_i = x_i + i y_i$

et $y_j = \underset{i \in \mathbb{N}_e}{\mathrm{Min}} (y_i)$.

La translation $t_{\overrightarrow{M_jO}}$ de vecteur $\overrightarrow{M_jO}$ à coordonnées entières transformera D_k en D'_k de bord Γ'_k contenant O. Les points entiers de D_k et ceux de D'_k se correspondront par $t_{\overrightarrow{M_jO}}$, soit :

$$\mathbb{Z}[i] \cap D'_k = t_{\overrightarrow{M_jO}} (\mathbb{Z}[i] \cap D_k)$$

et :

$$M'_i \in \mathbb{Z}[i] \cap \Gamma'_k \Leftrightarrow M'_i = t_{\vec{M_j O}}(M_i) \quad \text{où } M_i \in \mathbb{Z}[i] \cap \Gamma_k$$

$$\Leftrightarrow M'_i \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i - x_j \\ y_i - y_j \end{pmatrix}$$

Si $M'_i \in \mathbb{Z}[i] \cap \Gamma'_k$, M'_i sera bien d'ordonnée $y'_i = y_i - y_j \geqslant 0$ comme désiré.

III.5.2

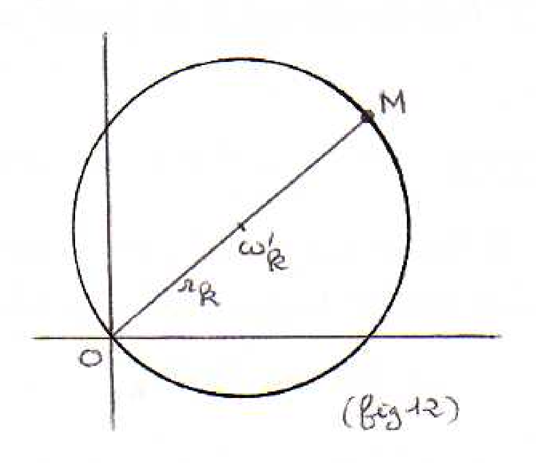
Notons M le second point entier de Γ'_k (fig 12). [OM] est un diamètre de Γ'_k d'après III.4.3.

Supposons par l'absurde que $r_k < 1$.
Alors $OM = 2r_k < 2$ et M, entier, d'ordonnée positive sera l'un des 9 points de la figure 13.

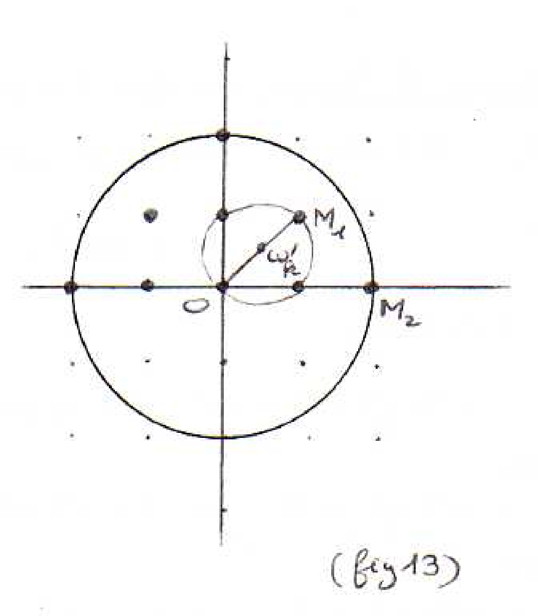
Pour chacun de ces points on vérifie que l'on arrive à une absurdité. Par exemple :

- Si $M = M_1$, $\omega'_k \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ et Γ'_k contient 4 points, absurde.
- Si $M = M_2$, Γ'_k contiendra des points entiers d'ordonnées < 0, absurde.

etc



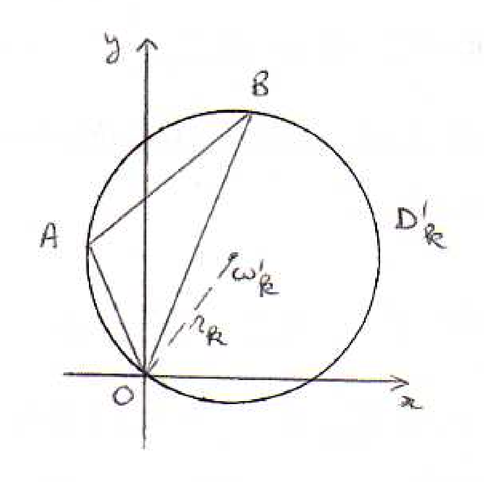
(fig 12)



(fig 13)

III.5.3

On est dans le cas de la figure 14 :



(fig.14)

où A et B désignent 2 points entiers distincts de O de Γ'_k.

Lemme : On a $OA \geq 2$ ou $OB \geq 2$ ou $AB \geq 2$.

Si le lemme est prouvé, et si $OA \geq 2$, par exemple, une corde d'un cercle étant toujours plus petite que son diamètre, on aura :

$$2 \leq OA \leq 2r_k \qquad \text{donc} \qquad 1 \leq r_k$$

comme désiré.

Prouvons le lemme : supposons par l'absurde que $OA < 2$ et $OB < 2$.
Alors $1 \leq OA < 2$ entraîne, comme en I.3.2 et en posant $A\binom{x}{y}$:

$$1 \leq OA^2 = x^2 + y^2 < 4$$

d'où 3 cas :

* $x^2+y^2=1$ d'où les 4 points B_1, B_2, B_3, B_4 entiers du cercle trigonométrique.

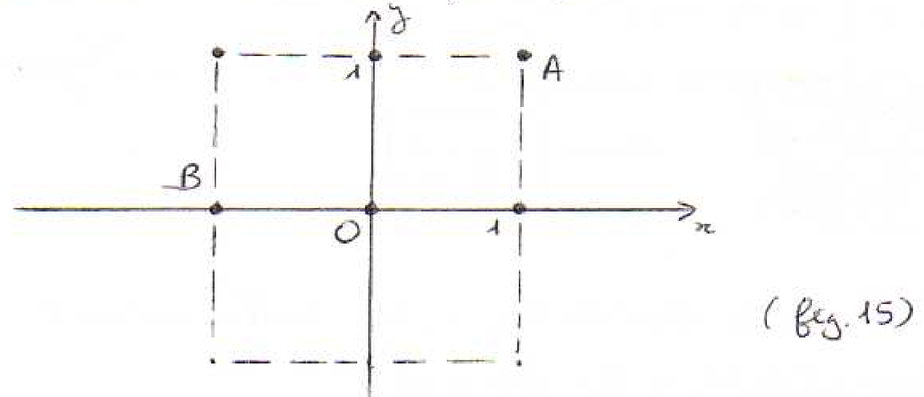
ou

* $x^2+y^2=2 \Rightarrow (x,y) = (\pm 1, \pm 1)$, soit 4 nouveaux points

ou

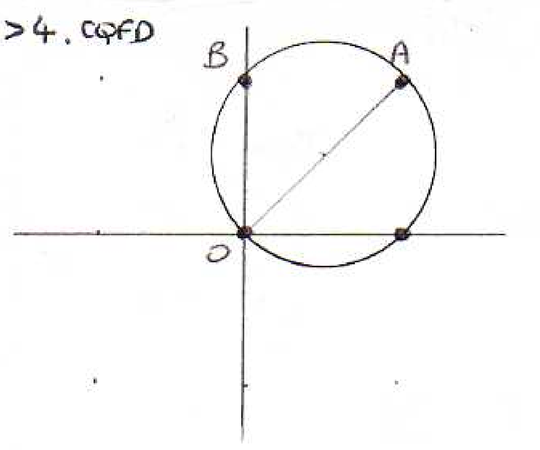
* $x^2+y^2=3$, qui n'a pas de solution

Ainsi A et B seront l'un des 5 points de la figure ci-dessous autres que O, et de plus situés dans le demi-plan $y \geq 0$.



(fig. 15)

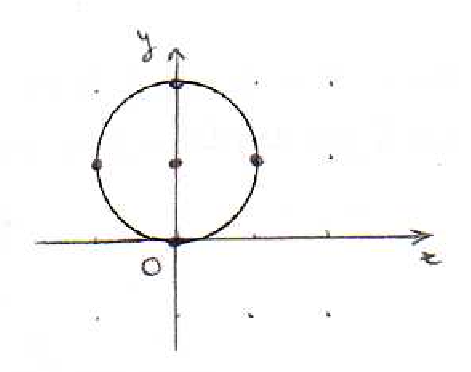
Mais alors $AB = 1$ ou $\sqrt{2}$ ou 2 ou $\sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$. Les cas $AB = 1$ ou $\sqrt{2}$ s'excluent d'eux-même car alors D'_k contient exactement 4 points entiers (fig. 16) ce qui contredit $k > 4$. CQFD



(fig.16)

III.5.4

* $r_5 \geq 1$ et le disque D'_k ci-contre contient exactement 5 points entiers. Donc $\boxed{r_5 = 1}$



* Étant donnés 6 points $M_1, \ldots, M_6$ entiers distincts, il existera toujours 2 de ces points M_i et M_j tels que

$$M_i M_j \geq \sqrt{5}$$

Il suffit, pour le voir, de se mettre dans le meilleur cas possible où les points sont très rapprochés, et de considérer la figure suivante :

M_6 •   • M_1

M_5 •   • M_2

M_4 •   • M_3

> <u>preuve rigoureuse (facultative)</u> :
> Supposons $M_1 = 0$ (possible par translation) et $OM_i < \sqrt{5}$ pour $i = 2, \ldots, 6$. Alors $M_i \in \mathring{B}(0, \sqrt{5})$. Mais le disque $\mathring{D}(0, \sqrt{5})$ contient peu de points entiers et dans tous les cas, on s'aperçoit qu'il existe i, j / $M_iM_j \geq \sqrt{5}$.

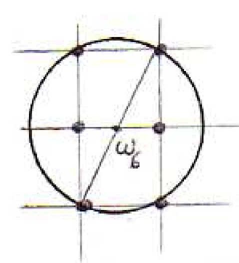
où $M_1M_4 = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}$

D'_6 contient 6 points distincts, son diamètre $2r_6$ sera supérieur à tout segment $[M_iM_j]$ inclus dans D'_6, donc :

$$\sqrt{5} \leq 2r_6$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} \leq r_6$$

En fait $\boxed{r_6 = \frac{\sqrt{5}}{2}}$ puisque le disque ci-dessous, de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$, contient 6 points entiers :



IV.1 $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence car :

* réflexive car pour tout $z \in \mathbb{Z}[i]$, $z - z = 0 \in n\mathbb{Z}[i]$ donc $z \mathcal{R} z$.
* symétrique car $z \mathcal{R} z' \Leftrightarrow z' \mathcal{R} z$
* transitive car :

$$\left.\begin{array}{l} z \mathcal{R} z' \\ z' \mathcal{R} z'' \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z - z' \in n\mathbb{Z}[i] \\ z' - z'' \in n\mathbb{Z}[i] \end{array}\right. \Rightarrow z - z'' \in n\mathbb{Z}[i] \Rightarrow z \mathcal{R} z''$$

CQFD

NB : $(\mathbb{Z}[i], +)$ est un groupe et $n\mathbb{Z}[i]$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}[i]$. $\mathcal{R}$ n'est autre que la relation d'équivalence suivant le sous-groupe $n\mathbb{Z}[i]$.

2e solution : On a les isomorphismes de groupes additifs suivants

$$\mathbb{Z}[i]/\mathcal{R} = \mathbb{Z}[i]/n\mathbb{Z}[i] \simeq \mathbb{Z}^2/(n\mathbb{Z})^2 \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

d'où $\# \mathbb{Z}[i]/\mathcal{R} = n^2$. (voilà du rapide !)

IV.2 Soit $z = a + ib \in \mathbb{Z}[i]$. Notons

$$a = nq_a + a' \qquad 0 \leq a' < n$$
$$b = nq_b + b' \qquad 0 \leq b' < n$$

les divisions euclidiennes de a et b par n.

$(a+ib) - (a'+ib') = n(q_a + iq_b) \in n\mathbb{Z}[i]$ montre que

$$z \mathcal{R} (a'+ib')$$

Ainsi, toute classe de $\mathbb{Z}[i]/\mathcal{R}$ admet au moins un représentant dans $\{a'+ib' \,/\, a', b' \in \{0, \ldots, n-1\}\} \doteq R$, de cardinal n^2.

Nous allons vérifier que les éléments de R appartiennent chacun à des classes d'équivalences distinctes, ce qui prouvera bien que :

$$\# \mathbb{Z}[i]/\mathcal{R} = \# R = n^2$$

Si $z' = a'+ib' \in R$ et $z'' = a''+ib'' \in R$, alors :

$$z' \mathcal{R} z'' \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a' - a'' \in n\mathbb{Z} \\ b' - b'' \in n\mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a' = a'' \\ b' = b'' \end{array}\right. \Leftrightarrow z' = z''.$$

la dernière équivalence provenant des inégalités $0 \leq |a'-a''| < n$ et $0 \leq |b'-b''| < n$.

IV.3

* Si $k \geq 2$, $r_k \geq r_2 = \frac{1}{2}$ donc r_k n'est pas nul.
r_k^2 est donc un rationnel (cf III) non nul.
Si πr_k^2 était entier, on aurait $\pi r_k^2 = m \in \mathbb{N}$ et donc
$\pi = \frac{m}{r_k^2} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde. Donc $\pi r_k^2 \notin \mathbb{N}$.

IV.4

* D'après II.2.4 : $$\lim_{n \to +\infty} \frac{\# \mathbb{Z}[i] \cap D(0,nr)}{(nr)^2} = \pi$$

donc pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe N tel que :

$$n > N \Rightarrow \# (\mathbb{Z}[i] \cap D(0,nr)) \geq (\pi - \varepsilon) r^2 n^2$$

Il suffit de prouver que pour ε convenable et n assez grand, on a :

$$(\pi - \varepsilon) r^2 n^2 \geq [\pi r^2] n^2 + 1$$

ie $$(\pi r^2 - [\pi r^2] - \varepsilon r^2) n^2 \geq 1 \qquad (*)$$

πr^2 n'est pas entier, donc $\pi r^2 - [\pi r^2] \doteq t > 0$. Le coefficient $t - \varepsilon r^2$ de n^2 dans $(*)$ sera positif dès que $\varepsilon < \frac{t}{r^2}$.
Choisissons $\varepsilon < \frac{t}{r^2}$. Alors $\lim_{n \to +\infty} (t - \varepsilon r^2) n^2 = +\infty$ et il existera N' tel que

$$n > N' \Rightarrow (t - \varepsilon r^2) n^2 > 1$$

<u>Conclusion</u> :

$$n > \mathrm{Sup}(N, N') \Rightarrow \# (\mathbb{Z}[i] \cap D(0,nr)) \geq [\pi r^2] n^2 + 1$$

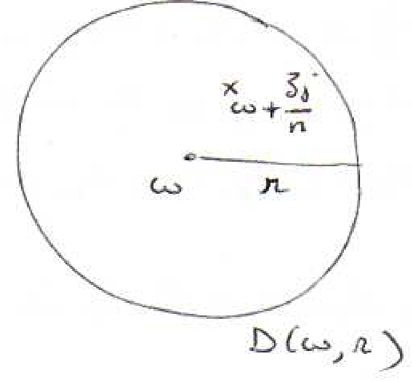
* Notons $\mathcal{P}$ la famille des $[\pi r^2]n^2+1$ points entiers obtenus ci-dessus. Si aucune des n^2 classes d'équivalence de $\mathbb{Z}[i]/\mathcal{R}$ ne possède plus de $[\pi r^2]$ représentants dans $\mathcal{P}$, le cardinal de $\mathcal{P}$ sera inférieur ou égal à $[\pi r^2]\times n^2$. C'est absurde. D'où la seconde partie de la question.

IV.5.1 $z_j \in D(0,nr) \Rightarrow \frac{z_j}{n} \in D(0,r)$ pour tout j, et :

$\forall j \quad z_j \mathcal{R} z_0 \Leftrightarrow z_j - z_0 \in n\mathbb{Z}[i] \Rightarrow \frac{z_j - z_0}{n} \in \mathbb{Z}[i]$

IV.5.2

On vient de voir que $\left|\frac{z_j}{n}\right| < r$ et $\frac{z_j}{n} + \omega \in \mathbb{Z}[i]$. Ainsi les $[\pi r^2]+1$ points entiers $\frac{z_j}{n} + \omega$, $0 \leq j \leq \pi r^2$, appartiennent au disque $D(\omega, r)$



IV.6

$D(\omega,r)$

$\pi r_\alpha^2 = k-1+\alpha$, où $0<\alpha<1$, entraîne :

$$\begin{cases} [\pi r_\alpha^2] = k-1 \\ \pi r_\alpha^2 \text{ non entier} \end{cases}$$

(IV.4) et (IV.5) s'appliquent : $D(\omega, r_\alpha)$ contient $[\pi r_\alpha^2]+1 = k$ points entiers. Compte tenu de la définition de r_k :

$$\boxed{r_k \leq r_\alpha}$$

* Ainsi $r_k \leq r_\alpha = \sqrt{\dfrac{k-1+\alpha}{\pi}}$ pour tout $\alpha \in]0,1[$.

Par passage à la limite pour $\alpha \to 0$ dans cette inégalité, nous obtenons :

$$\boxed{r_k \leq \sqrt{\frac{k-1}{\pi}}}$$

Même démonstration qu'en III.3.1 :

V.1 Il existe $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $D(\omega, r_k)$ contienne au moins k points entiers. Notons :

$$\omega = a + ib$$

$$a = [a] + \alpha \qquad \text{où } \alpha \in [0,1[$$

$$b = [b] + \beta \qquad \text{où } \beta \in [0,1[$$

On a $\omega = ([a] + i[b]) + (\alpha + i\beta)$

Posons $z_k \doteq \alpha + i\beta$ et $\omega_0 = [a] + i[b]$.

On a $\operatorname{Re} z_k, \operatorname{Im} z_k \in [0,1[$, et la translation t de vecteur d'affixe $-\omega_0$ transforme ω en z_k, $D(\omega, r_k)$ en un disque D_k de rayon r_k et de centre $\omega_k(z_k)$ et tous les points entiers de $D(\omega, r_k)$ en des points entiers de D_k.

D_k répond à la question.

V.2 Il suffit de traiter le cas où $x \geq 0$ et $y \geq 0$, les autres cas se démontrant de façon similaire.

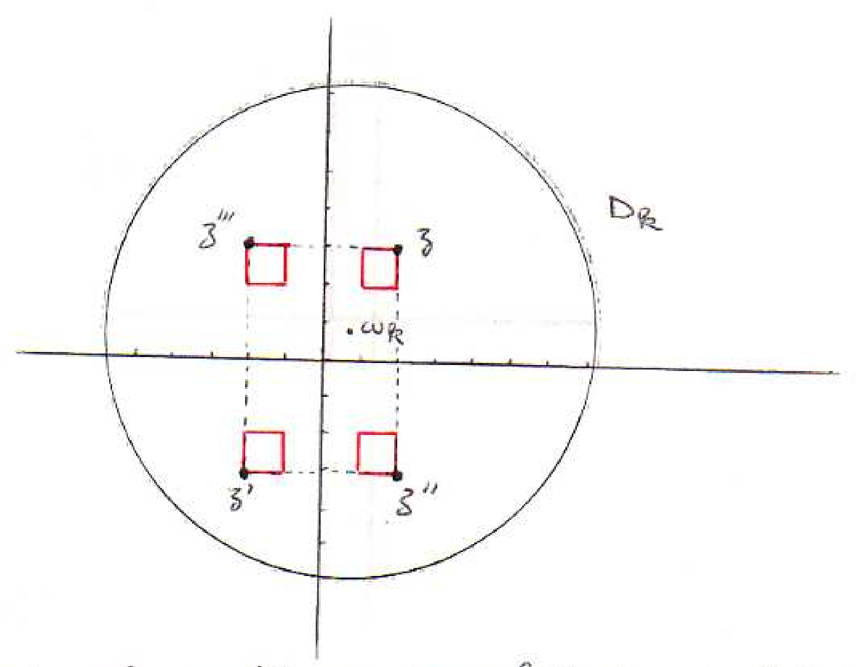


fig. 17 : carrés associés aux complexes z, z', z'' et z'''.

$\omega_k \doteq \alpha + i\beta$

$z \in D_k \iff (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 \leq r_k^2$

Supposons que $z = x+iy$ soit entier dans D_k et tel que $xy \neq 0$ et $(x-1)(y-1) \neq 0$. Soit $\xi = u+iv$ un point quelconque du carré $C(z)$ associé à z. On a :

$$\begin{cases} x-1 \leq u \leq x \\ y-1 \leq v \leq y \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} x-1-\alpha \leq u-\alpha \leq x-\alpha \\ y-1-\beta \leq v-\beta \leq y-\beta \end{cases} \qquad (*)$$

$z \in \mathbb{Z}[i]$ et $x;y > 0$ entraînent $x-1 \geq 0$ et $y-1 \geq 0$.

De plus, $(x-1)(y-1) \neq 0$ entraînent $x-1>0$ et $y-1>0$, soit

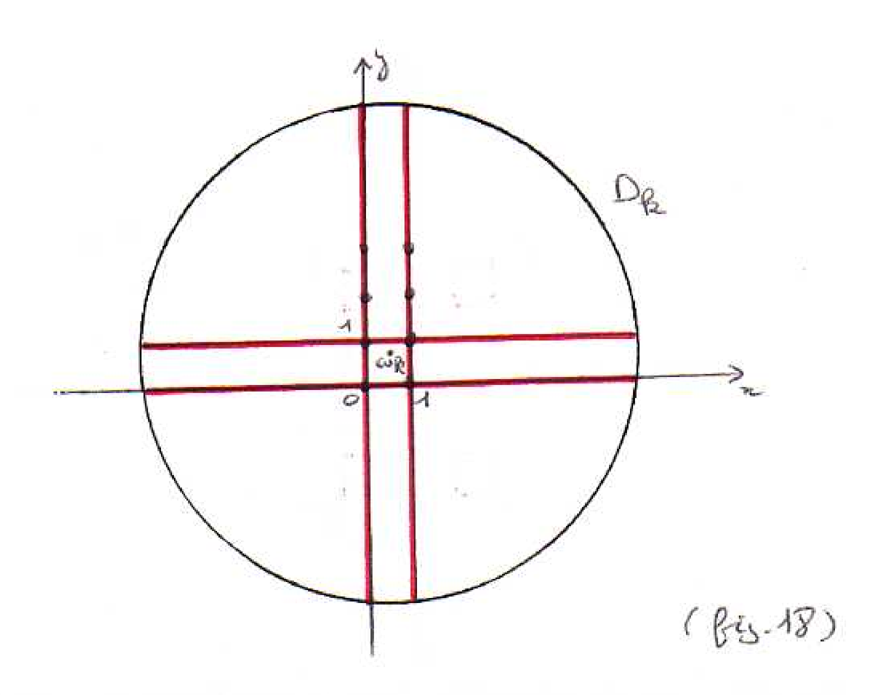
$$x-1 \geq 1 \qquad \text{et} \qquad y-1 \geq 1$$

Comme $\alpha, \beta \in [0,1[$, on constate que $x-1-\alpha>0$ et $y-1-\beta>0$, et $(*)$ fournit :

$$\begin{cases} |u-\alpha| \leq |x-\alpha| \\ |v-\beta| \leq |y-\beta| \end{cases} \Rightarrow (u-\alpha)^2+(v-\beta)^2 \leq (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 \leq r_k^2$$

et $\xi \in D_k$. CQFD

V.3



(fig. 18)

* Tous les points entiers de D_k donnent lieu à des carrés de surface 1 inclus dans D_k sauf, éventuellement, ceux qui vérifient

$$xy = 0 \qquad \text{ou} \quad (x-1)(y-1) = 0$$

Le diamètre de D_k étant $2r_k$, il y a au plus $2[r_k]+1$ points entiers sur un diamètre de D_k.

Un majorant du nombre de points entiers de D_k appartenant aux 4 cordes en rouge sur la fig. 18 (correspondant à $x=0$, $y=0$, $x=1$ et $y=1$) sera donc :

$$4\underbrace{(2[r_k]+1)}_{\substack{\text{nbre de points}\\ \text{entiers max.}\\ \text{sur une corde}}} - \underbrace{4}_{\substack{\text{intersections des cordes}\\ \text{(comptées 2 fois chacune)}}} = 8[r_k]$$

Comme D_k contient au moins k points entiers, D_k contiendra au moins $k - 8[r_k]$ points entiers non situés sur l'une des 4 cordes, et l'on aura :

$$\text{Aire}(D_k) = \pi r_k^2 \geq k - 8[r_k] = \text{somme des aires des carrés construits sur ces points entiers.}$$

* On déduit $\pi r_k^2 \geq k - 8 r_k$

$$\pi r_k^2 + 8 r_k - k \geq 0$$

$\Delta' = 16 + \pi k$ et les racines de ce trinôme sont $\dfrac{-4 \pm \sqrt{16 + \pi k}}{\pi}$

r_k rendant ce trinôme positif, devra être à l'extérieur des racines.

De plus $r_k > 0$, donc :

$$\boxed{r_k \geq \frac{-4 + \sqrt{16 + \pi k}}{\pi}}$$

VI

IV et V entraînent :

$$\frac{-4 + \sqrt{16 + k\pi}}{\pi} \leq r_k \leq \sqrt{\frac{k-1}{\pi}}$$

d'où

$$\underbrace{\frac{-4 + \sqrt{16 + k\pi}}{\sqrt{k\pi}}}_{\substack{\to 1 \\ (k \to +\infty)}} \leq \frac{r_k}{\sqrt{\frac{k}{\pi}}} \leq \underbrace{\sqrt{\frac{k-1}{k}}}_{\to 1}$$

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{r_k}{\sqrt{\frac{k}{\pi}}} = 1$$

Ce qui signifie bien que $r_k \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{k}{\pi}}$

FIN

SESSION DE 1994

concours externe de recrutement de professeurs certifiés

section : mathématiques

deuxième composition de mathématiques

Durée : 5 heures

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche — éventuellement programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Tournez la page S.V.P.

Notations et objectifs du problème

Dans tout le problème, P désigne un plan affine euclidien orienté, $\mathscr{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct de P. Les coordonnées et les affixes des points de P (resp. des vecteurs du plan vectoriel associé) sont définies par rapport au repère $\mathscr{R}$ (resp. à la base $(\vec{i}, \vec{j})$).

Soit D_1 et D_2 deux droites de P de vecteurs directeurs respectifs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$, et θ un nombre réel. On rappelle que θ est une mesure de l'angle orienté du couple de droites (D_1, D_2) si, et seulement si, θ ou $\theta + \pi$ est une mesure de l'angle orienté du couple de vecteurs $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$.

Étant donné trois droites D, D_1, D_2 du plan P, on dit que D_1 et D_2 sont symétriquement inclinées sur D si, et seulement si, les angles orientés des couples de droites (D, D_1) et (D, D_2) ont des mesures opposées modulo π.

Le problème est consacré à quelques questions relatives à la notion de points cocycliques. La partie I la relie à la notion de deux droites symétriquement inclinées sur une même troisième. Les parties IV et V étudient plusieurs configurations associées à des points cocycliques d'une conique. Cette étude s'appuie sur la généralisation à une conique quelconque de la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle (parties II et III).

Préliminaires

1. Soit $Q(X) = a_0 X^4 + a_1 X^3 + a_2 X^2 + a_3 X + a_4$ un polynôme de degré 4 à coefficients complexes a_j, $0 \leqslant j \leqslant 4$. On note x_1, x_2, x_3, x_4 ses quatre racines complexes, distinctes ou non, et on pose :

$$\sigma_1 = \sum_{1 \leqslant j \leqslant 4} x_j, \qquad \sigma_2 = \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant 4} x_j x_k, \qquad \sigma_3 = \sum_{1 \leqslant j < k < l \leqslant 4} x_j x_k x_l, \qquad \sigma_4 = x_1 x_2 x_3 x_4.$$

Exprimer, sans démonstration, les nombres complexes σ_1, σ_2, σ_3 et σ_4 en fonction des coefficients a_0, a_1, a_2, a_3 et a_4.

2. Soit D_1 et D_2 deux droites de P de vecteurs directeurs respectifs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$. On note z_1, z_2, les affixes de $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$. Soit θ un nombre réel.

2.1. Donner, sans démonstration, une propriété du nombre complexe $\frac{z_2}{z_1} e^{-i\theta}$ qui soit équivalente à l'égalité $(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = \theta \ (2\pi)$.

2.2. En déduire une propriété du nombre complexe $\frac{z_2}{z_1} e^{-i\theta}$ qui soit équivalente à l'égalité :

$$(D_1, D_2) = \theta \ (\pi).$$

3. Soit $(\alpha, \beta, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

3.1. Préciser, sans démonstration, la nature et les éléments de la transformation ϕ du plan P définie analytiquement dans le repère $\mathscr{R}$ par la représentation : $x' = \lambda x + \alpha$, $y' = \lambda y + \beta$.

3.2. Soit Γ une courbe d'équation, dans le repère $\mathscr{R}$, $f(x, y) = 0$, où f désigne une application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble Γ' défini par l'équation $f(\lambda x + \alpha, \lambda y + \beta) = 0$ se déduit de Γ par une transformation qu'on exprimera au moyen de ϕ.

I. Droites symétriquement inclinées et points cocycliques.

I.1. Soit trois droites D, D_1, D_2 du plan P, $\vec{v}$ un vecteur directeur de D d'affixe z, $\vec{v_j}$ un vecteur directeur de D_j, d'affixe z_j, $1 \leqslant j \leqslant 2$.

Montrer, au moyen des préliminaires que D_1 et D_2 sont symétriquement inclinées sur D si, et seulement si, $\dfrac{z_1 z_2}{z^2}$ est réel.

En déduire que, lorsque D_1 et D_2 sont parallèles, elles sont symétriquement inclinées sur D si, et seulement si, elles sont soit parallèles à D, soit perpendiculaires à D.

I.2. Soit A_1, A_2, A_3, A_4, quatre points distincts d'un cercle C du plan P. Pour $1 \leqslant j \leqslant 4$, on note z_j l'affixe de A_j. On suppose que les droites $(A_1 A_2)$ et $(A_3 A_4)$ sont symétriquement inclinées sur une droite D de P.

I.2.1. Montrer que $\dfrac{(z_3 - z_4)(z_2 - z_1)}{(z_3 - z_1)(z_2 - z_4)}$ est un nombre réel.

I.2.2. Montrer que les droites $(A_1 A_3)$ et $(A_2 A_4)$ sont symétriquement inclinées sur D. En est-il de même pour les droites $(A_1 A_4)$ et $(A_2 A_3)$?

I.3. Soit A_1, A_2, A_3, trois points distincts d'un cercle C du plan P et T la tangente en A_1 à C. Pour $1 \leqslant j \leqslant 3$, on note z_j l'affixe de A_j. On note t l'affixe d'un vecteur directeur de T, et on suppose que les droites $(A_1 A_2)$ et $(A_1 A_3)$ sont symétriquement inclinées sur une droite D de P.

I.3.1. Montrer que $\dfrac{(z_3 - z_2)\, t}{(z_3 - z_1)(z_1 - z_2)}$ est un nombre réel.

I.3.2. Montrer que les droites T et $(A_2 A_3)$ sont symétriquement inclinées sur D.

II. Puissance d'un point par rapport à une conique.

Soit Γ une conique et S un point du plan P. On se propose de définir la notion de puissance du point S par rapport à la conique Γ en commençant par le cas où Γ est un cercle. Pour cela on considère une droite quelconque Δ passant par S, munie d'un vecteur directeur unitaire $\vec{u}$ par rapport auquel sont définies les mesures algébriques.

II.1. On suppose, dans cette question II.1. seulement, que Γ est un cercle de centre I et de rayon R, $R > 0$.

II.1.1. On suppose que Δ coupe Γ en deux points distincts A et B et on pose $p = \overline{SA} \cdot \overline{SB}$. Soit A′ le point de Γ diamétralement opposé à A. Montrer que $p = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SA'}$. Exprimer p en fonction de SI et de R.

Le nombre p, qui ne dépend que de S et de Γ, s'appelle la puissance du point S par rapport au cercle Γ et sera noté $\Gamma(S)$.

II.1.2. On suppose que Δ est tangente à Γ en un point M_0. Montrer que $\Gamma(S) = SM_0^2$.

II.2. On suppose maintenant que Γ n'est pas un cercle. Soit e son excentricité, D son axe focal, c'est-à-dire l'axe de symétrie qui contient son (ou ses) foyer(s). On note θ une mesure de l'angle orienté du couple de droites (D, Δ).

On se propose de montrer que, lorsque Δ coupe Γ en deux points A et B, le produit $(1 - e^2 \cos^2 \theta)\, \overline{SA} \cdot \overline{SB}$ ne dépend que de S et de Γ. Pour cela on suppose, dans cette question II.2., le repère $\mathscr{R}$ choisi de façon que $D = (O, \vec{i})$.

II.2.1. Montrer que Γ peut être définie, dans le repère $\mathscr{R}$, par l'équation $f(x, y) = 0$, avec $f(x,y) = (1 - e^2)\, x^2 + y^2 + u_1 x + u_2$, u_1 et u_2 désignant deux constantes réelles.

Tournez la page S.V.P.

II.2.2. On note (x_0, y_0) les coordonnées de S. Soit M un point de Δ. On pose $\lambda = \overline{SM}$.

Exprimer les coordonnées x et y de M au moyen de x_0, y_0, θ et λ. En déduire que M appartient à Γ si, et seulement si, λ est racine d'une équation de la forme $(1 - e^2 \cos^2 \theta) X^2 + \beta X + \gamma = 0$ où β et γ sont deux réels qu'on exprimera au moyen de θ, x_0, y_0, e, u_1 et u_2.

II.2.3. On suppose que Δ coupe Γ en deux points distincts A et B. Montrer que le réel p défini par $p = (1 - e^2 \cos^2 \theta)\, \overline{SA} \cdot \overline{SB}$ ne dépend que de S et de Γ et en donner une expression en fonction de x_0, y_0, e, u_1 et u_2.

p s'appelle la puissance du point S par rapport à la conique Γ et sera noté $\Gamma(S)$.

II.2.4. On suppose que Δ est tangente à Γ en un point M_0. Montrer qu'on a alors $1 - e^2 \cos^2 \theta \neq 0$, puis que $\Gamma(S) = (1 - e^2 \cos^2 \theta)\, SM_0^2$.

III. Lignes de niveau de l'application $S \longmapsto \Gamma(S)$.

Soit Γ une conique du plan P.

A tout réel r on associe l'ensemble $\Gamma_r = \{S \in P \mid \Gamma(S) = r\}$.

On pose $U = \{r \in \mathbb{R} \mid \Gamma_r = \emptyset\}$, $V = \{r \in \mathbb{R} \mid \Gamma_r$ est réduit à un point$\}$, $W = \mathbb{R} \setminus (U \cup V)$.

III.1. On suppose que Γ est un cercle de centre I et de rayon R. Préciser, au moyen du réel R, les trois ensembles U, V et W et décrire Γ_r pour $r \in W$.

III.2. On suppose que Γ n'est pas un cercle.

III.2.1. Montrer que $\Gamma = \Gamma_0$ et en déduire que $0 \in W$.

III.2.2. On suppose que Γ est une ellipse, d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dans le repère $\mathscr{R}$, avec $0 < b < a$.

Déterminer les trois ensembles U, V et W, puis montrer que, pour tout réel r appartenant à W, Γ_r est l'image de Γ par une transformation géométrique dont on précisera la nature et les éléments.

III.2.3. Répondre aux questions III.2.2. dans le cas où Γ est la parabole d'équation $y^2 = 2\,ax$ dans le repère $\mathscr{R}$, avec $a > 0$.

III.2.4. On suppose que Γ est une hyperbole, d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dans le repère $\mathscr{R}$, avec $a > 0$ et $b > 0$.

a. Décrire l'ensemble Γ_{b^2}.

b. Déterminer et construire l'ensemble $\Gamma' = \Gamma_{2b^2}$.

c. On suppose $r \neq b^2$. Montrer que, selon la valeur du réel r, Γ_r est l'image de Γ ou de Γ' par une transformation géométrique dont on précisera la nature et les éléments.

IV. Points cocycliques sur une conique.

Dans toute cette partie, Γ désigne une conique du plan P qui n'est pas un cercle. On note D son axe focal et on considère des points distincts A_1, A_2, A_3, A_4 sur Γ.

IV.1. On suppose que les droites $(A_1 A_2)$ et $(A_3 A_4)$ sont sécantes en un point S.

IV.1.1. Montrer que S est différent de A_1, A_2, A_3 et A_4.

IV.1.2. Les mesures algébriques sur les droites $(A_1 A_2)$ et $(A_3 A_4)$ étant définies par rapport à des vecteurs unitaires, montrer que A_1, A_2, A_3, A_4 sont cocycliques si, et seulement si, $\overline{SA_1} \cdot \overline{SA_2} = \overline{SA_3} \cdot \overline{SA_4}$ (on pourra utiliser II.1.1.).

IV.1.3. Montrer que les points A_1, A_2, A_3, A_4 sont cocycliques si, et seulement si, les droites $(A_1 A_2)$ et $(A_3 A_4)$ sont symétriquement inclinées sur la droite D.

IV.2. On suppose les droites $(A_1 A_2)$ et $(A_3 A_4)$ parallèles.

IV.2.1. L'équivalence montrée en IV.1.3. est-elle encore vraie (on pourra utiliser I.2.2.) ?

IV.2.2. Montrer que les points A_1, A_2, A_3, A_4 sont cocycliques si, et seulement si, les droites $(A_1 A_2)$ et $(A_3 A_4)$ sont perpendiculaires à un même axe de symétrie de Γ.

IV.3. On suppose que la tangente T_1 à Γ en A_1 et la droite $(A_2 A_3)$ sont sécantes en un point S. On appelle C le cercle circonscrit au triangle $A_1 A_2 A_3$.

IV.3.1. Montrer que S est différent de A_1, A_2 et A_3.

IV3.2. Les mesures algébriques sur la droite $(A_2 A_3)$ étant définies par rapport à un vecteur unitaire, montrer que T_1 est la tangente à C en A_1 si, et seulement si, $SA_1^2 = \overline{SA_2} \cdot \overline{SA_3}$ (on pourra utiliser II.1.2.).

IV.3.3. Montrer que T_1 est la tangente à C en A_1 si, et seulement si, les droites $(A_1 A_2)$ et $(A_1 A_3)$ sont symétriquement inclinées sur la droite D.

IV.4. On suppose que la tangente T_1 à Γ en A_1 et la tangente T_2 à Γ en A_2 sont sécantes en un point S.

IV.4.1. Montrer que S est différent de A_1 et A_2.

IV.4.2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) il existe un cercle C tangent à T_1 en A_1 et à T_2 en A_2 ;

(ii) $SA_1 = SA_2$;

(iii) T_1 et T_2 sont symétriquement inclinées sur la droite D.

IV.4.3. On suppose que les propriétés (i), (ii) et (iii) ci-dessus sont satisfaites. On note D_1 la parallèle à D passant par S, ϕ_1 la réflexion d'axe D_1, D'_1 la perpendiculaire à D passant par S, ϕ'_1 la réflexion d'axe D'_1. On pose $\phi = \phi_1 \circ \phi'_1$.

a. Reconnaître la transformation ϕ.

b. Quelle est l'image de T_1 par ϕ_1 ? En déduire que $\phi_1(A_1)$ appartient à l'ensemble $\{A_2, \phi(A_2)\}$.

c. Montrer que A_2 appartient à l'ensemble $\{\phi_1(A_1), \phi'_1(A_1)\}$.

IV.4.4. Montrer que les propriétés (i), (ii) et (iii) de la question IV.4.2. sont encore équivalentes à : la droite $(A_1 A_2)$ est perpendiculaire à un axe de symétrie de Γ.

V. Cas de l'ellipse.

Dans cette partie, Γ désigne une ellipse, d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dans le repère $\mathscr{R}$, avec $0 < b < a$. On pose $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

On note ici U l'ensemble des nombres complexes de module 1 et, à tout élément u de U, on associe le point $M(u)$ du plan P de coordonnées $x = a\dfrac{u + \overline{u}}{2}$, $y = b\dfrac{u - \overline{u}}{2i}$.

V.1. Montrer que l'application $u \longmapsto M(u)$ est une bijection de U sur Γ.

V.2. C désigne un cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$ dans le repère $\mathscr{R}$.

V.2.1. Déterminer un polynôme $Q_C(X)$ de degré 4, à coefficients complexes, de coefficient dominant c^2, dont les autres coefficients sont des polynômes en $a, b, \alpha, \beta, \gamma$ qu'on précisera, et qui vérifie la propriété suivante : $(\forall u, u \in U)\,[(M(u) \in C \cap \Gamma) \Longleftrightarrow Q_C(u) = 0]$.

Le polynôme $Q_C(X)$ ainsi construit est appelé polynôme associé au cercle C.

V.2.2. On suppose que $C \cap \Gamma$ est un ensemble de quatre points (distincts) M_1, M_2, M_3 et M_4. Pour $1 \leqslant j \leqslant 4$, on pose $M_j = M(u_j)$, $u_j \in U$.

Montrer que $u_1 u_2 u_3 u_4 = 1$.

Tournez la page S.V.P.

V.3. Soit $M_1 = M(u_1)$, $M_2 = M(u_2)$, $M_3 = M(u_3)$ et $M_4 = M(u_4)$, $u_j \in U$ pour $1 \leqslant j \leqslant 4$, quatre points distincts de Γ. Montrer que ces points sont cocycliques si, et seulement si, $u_1 u_2 u_3 u_4 = 1$.

V.4. Soit $M_0 = M(u_0)$ un point de Γ, $u_0 \in U$.

V.4.1. Montrer qu'il existe un unique cercle C_0 tel que u_0 soit racine d'ordre de multiplicité au moins égal à 3 du polynôme $Q_{C_0}(X)$ associé à C_0.
C_0 s'appelle le cercle osculateur à l'ellipse Γ au point M_0.

V.4.2. Exprimer, en fonction de a, b et u_0, les coordonnées du centre Ω_0 de C_0.

V.4.3. Montrer que C_0 et Γ ont la même tangente T_0 au point M_0.

V.4.4. Comment doit-on choisir M_0 sur Γ pour avoir $C_0 \cap \Gamma = \{M_0\}$?

V.4.5. On suppose que M_0 n'est pas choisi de cette manière.
Montrer que C_0 recoupe Γ en un unique point M_1 (différent de M_0), et que les droites T_0 et $(M_0 M_1)$ sont symétriquement inclinées sur l'axe focal D de Γ.

V.4.6. On note E l'ensemble de tous les points M de $\Gamma \setminus \{M_0\}$ qui sont tels que le cercle osculateur en M à Γ passe par M_0. Quel est le cardinal de E ? Montrer que l'ensemble $E \cup \{M_0\}$ est contenu dans un cercle (on distinguera les cas où M_0 est choisi comme en V.4.4. et ceux où il est choisi comme en V.4.5.).

CAPES externe 1994 de Mathématiques deuxième composition

solution proposée par Dany-Jack Mercier

IUFM de Guadeloupe, Morne Ferret,
BP399, Pointe-à-Pitre cedex 97159,
dany-jack.mercier@univ-ag.fr

NB : Le sujet de l'épreuve n'est pas joint à ce document. Il pourra être téléchargé au format pdf sur le site http://perso.wanadoo.fr/megamaths/

[0] [ag27] v1.00

P.1 $\sigma_j = (-1)^j \dfrac{a_j}{a_0}$

P.2.1 $(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = \theta \quad [2\pi] \iff (0, \vec{v_2}) - (0, \vec{v_1}) = \theta \quad [2\pi]$

$$\iff \arg z_2 - \arg z_1 = \theta \quad [2\pi]$$

$$\iff \arg z_2 - \arg z_1 + \arg e^{-i\theta} = 0 \quad [2\pi]$$

$$\iff \arg\left(\frac{z_2}{z_1} e^{-i\theta}\right) = 0 \quad [2\pi]$$

$$\iff \frac{z_2}{z_1} e^{-i\theta} \in \mathbb{R}_+$$

P.2.2 Comme précédemment,

$$(D_1, D_2) = \theta \quad [\pi] \iff (v_1, v_2) = \theta \quad [\pi] \iff \arg\left(\frac{z_2}{z_1} e^{-i\theta}\right) = 0 \quad [\pi]$$

$$\iff \frac{z_2}{z_1} e^{-i\theta} \in \mathbb{R}$$

P.3.1

$$\Phi : \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Φ est une application affine de partie linéaire l'homothétie vectorielle de rapport $\lambda \neq 0$. C'est donc une <u>homothétie-translation</u>.
Φ sera donc <u>bijective</u>.

Cherchons l'ensemble $\text{Inv}\,\Phi$ des points invariants par Φ :

$$\begin{cases} x = \lambda x + \alpha \\ y = \lambda y + \beta \end{cases} \iff \begin{cases} (1-\lambda) x = \alpha \\ (1-\lambda) y = \beta \end{cases}$$

Si $\lambda \neq 1$, Φ est une homothétie de rapport λ et de centre $\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{1-\lambda} \\ \frac{\beta}{1-\lambda} \end{pmatrix}$

Si $\lambda = 1$, Φ est la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

[P.3.2]

Notons M le point de coordonnées (x,y). Les équations de Γ et Γ' sont :

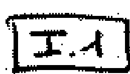
$$\Gamma : f(M) = 0$$

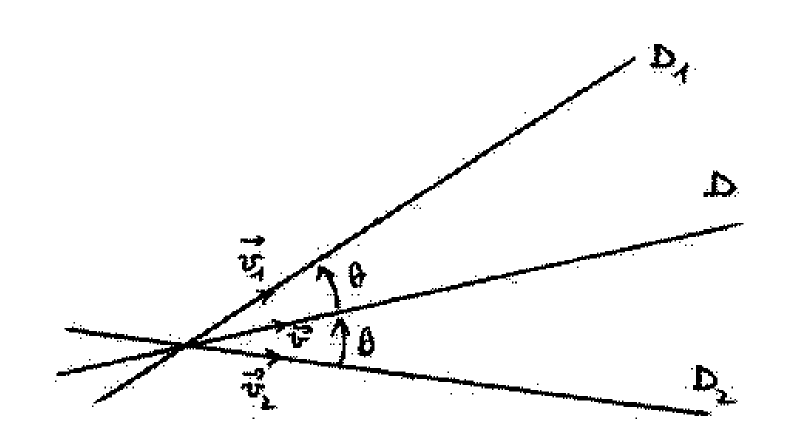
$$\Gamma' : f(\Phi(M)) = 0$$

de sorte que :

$$M \in \Gamma' \Leftrightarrow f(\Phi(M)) = 0 \Leftrightarrow \Phi(M) \in \Gamma \Leftrightarrow M \in \Phi^{-1}(\Gamma)$$

Ainsi : $\boxed{\Gamma' = \Phi^{-1}(\Gamma)}$





* D_1 et D_2 sont symétriquement inclinées sur D ssi

$$(\vec{v}, \vec{v}_1) = -(\vec{v}, \vec{v}_2) \quad [\pi]$$

ce qui équivaut à l'existence de $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(1) \begin{cases} (\vec{v}, \vec{v}_1) = \theta & [\pi] \\ (\vec{v}_2, \vec{v}) = \theta & [\pi] \end{cases}$$

(P.2) montre que (1) équivaut successivement à :

$$\frac{z_1}{z} e^{-i\theta} \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \frac{z}{z_2} e^{-i\theta} \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

d'où $\dfrac{z_1 z_2}{z^2} = \dfrac{z_1}{z} e^{-i\theta} \cdot \dfrac{1}{\dfrac{z}{z_2} e^{-i\theta}} \in \mathbb{R}$

Réciproquement si $\dfrac{z_1 z_2}{z^2} \in \mathbb{R}$ alors $\dfrac{z_1 z_2}{z^2} = t \in \mathbb{R}$ et il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{z_1}{z} = t \frac{z}{z_2} = r e^{i\theta}$$

Par suite $\begin{cases} \dfrac{z_1}{z} e^{-i\theta} = r \in \mathbb{R} \\ \dfrac{z}{z_2} e^{-i\theta} = \dfrac{r}{t} \in \mathbb{R} \end{cases}$

ce qui entraîne (2), et (1).

- Plus rapide : sans faire intervenir de θ et les préliminaires.

D_1 et D_2 s.i. sur $D \Leftrightarrow (\vec{v}, \vec{v_1}) = -(\vec{v}, \vec{v_2})$ (π)

$\Leftrightarrow \arg \dfrac{z_1}{z} = -\arg \dfrac{z_2}{z}$ (π)

$\Leftrightarrow \arg \dfrac{z_1 z_2}{z^2} = 0$ (π)

$\Leftrightarrow \dfrac{z_1 z_2}{z^2} \in \mathbb{R}$

<u>Conclusion</u> : D_1 et D_2 sont symétriquement inclinées sur D ssi $\dfrac{z_1 z_2}{z^2} \in \mathbb{R}$

* Supposons $D_1 // D_2$. On peut prendre $\vec{v_1} = \vec{v_2}$ soit $z_1 = z_2$, et :

D_1 et D_2 sont sym. incl. sur $D \Leftrightarrow \dfrac{z_1^2}{z^2} \in \mathbb{R}$

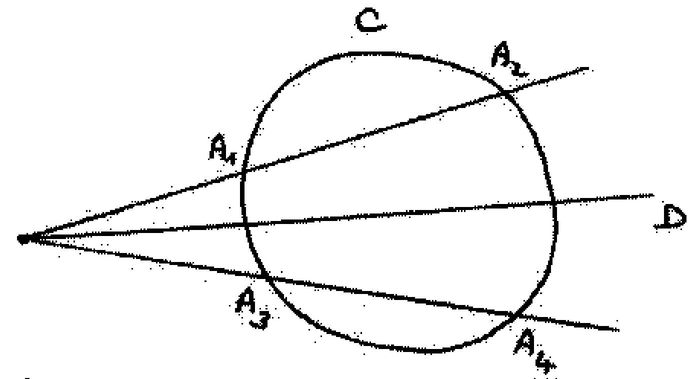
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{z_1}{z} \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ \dfrac{z_1}{z} \in i\mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \arg(\vec{v}, \vec{v_1}) = 0 \quad [\pi] \\ \text{ou} \\ \arg(\vec{v}, \vec{v_1}) = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{D_1} = \vec{B} \\ \text{ou} \\ \vec{D_1} \perp \vec{B} \end{cases}$$

où $\vec{B}$ désigne la direction de D. CQFD

I.2.1



A_1, A_2, A_3, A_4 sont cocycliques ssi

$$(\overrightarrow{A_2A_1}, \overrightarrow{A_2A_4}) = (\overrightarrow{A_3A_1}, \overrightarrow{A_3A_4}) \quad [\pi]$$

$$\arg(z_4 - z_2) - \arg(z_1 - z_2) = \arg(z_4 - z_3) - \arg(z_1 - z_3) \quad [\pi]$$

$$\arg \frac{z_4 - z_2}{z_1 - z_2} + \arg \frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_3} = 0 \quad [\pi]$$

$$\arg \frac{z_4 - z_2}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_3} = 0 \quad [\pi]$$

$$\frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_1} \cdot \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_4} \in \mathbb{R}$$

CQFD

I.2.2 Soit z l'affixe d'un vecteur directeur de D.

$(A_1A_2), (A_3A_4)$ sont sym. incl. sur D ssi

$$\frac{(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)}{z^2} \in \mathbb{R}$$

Compte tenu de I.2.1, le nombre :

$$\frac{(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)}{z^2} \cdot \frac{(z_3 - z_1)(z_2 - z_4)}{(z_3 - z_4)(z_2 - z_1)} = - \frac{(z_2 - z_1)(z_2 - z_4)}{z^2}$$

sera réel comme produit de 2 réels.

donc $\dfrac{(z_3-z_1)(z_2-z_4)}{\delta^2} \in \mathbb{R}$ et (I.1) montre que (A₁A₃) et (A A) seront sym. incl. sur D.

* (A_1A_4) et (A_2A_3) seront aussi symétriquement inclinées sur D :

1ʳᵉ solution : On vient de prouver que : $(A_1A_2),(A_3A_4)$ s.i. $\Rightarrow$ $(A_1A_3),(A\ A_4)$ s.i et il suffit d'écrire :
$(A_1A_2),(A_3A_4)$ s.i. $\Leftrightarrow$ $(A_1A_2),(A_4A_3)$ s.i. $\Rightarrow$ $(A_1A_4),(A_2A_3)$ s.i. CQFD

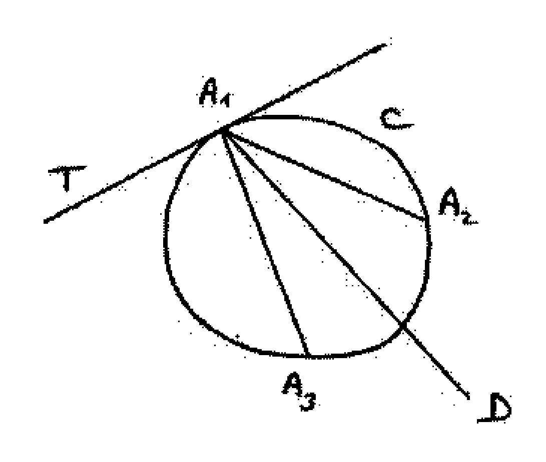
2ᵉ solution : le critère de cocyclicité du I.2.1 s'écrit aussi

$$\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} \in \mathbb{R}$$

et l'on sait que $\dfrac{(z_3-z_1)(z_2-z_4)}{\delta^2} \in \mathbb{R}$, donc le produit p de ces 2 réels sera réel :

$$p = -\frac{(z_4-z_1)(z_3-z_2)}{\delta^2} \in \mathbb{R}$$

donc (A_1A_4) et (A_2A_3) sont bien sym. incl. sur D. CQFD



I.3.1

En angles de droites :

$(A_2A_1, A_2A_3) = (T, A_1A_3) \quad [\pi]$

$\arg \dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2} = \arg \dfrac{z_3-z_1}{t} \quad [\pi]$

$\arg \dfrac{(z_3-z_2)t}{(z_3-z_1)(z_1-z_2)} = 0 \quad [\pi]$

et donc $\dfrac{(z_3-z_2)t}{(z_3-z_1)(z_1-z_2)} \in \mathbb{R} \qquad (1)$

I.3.2

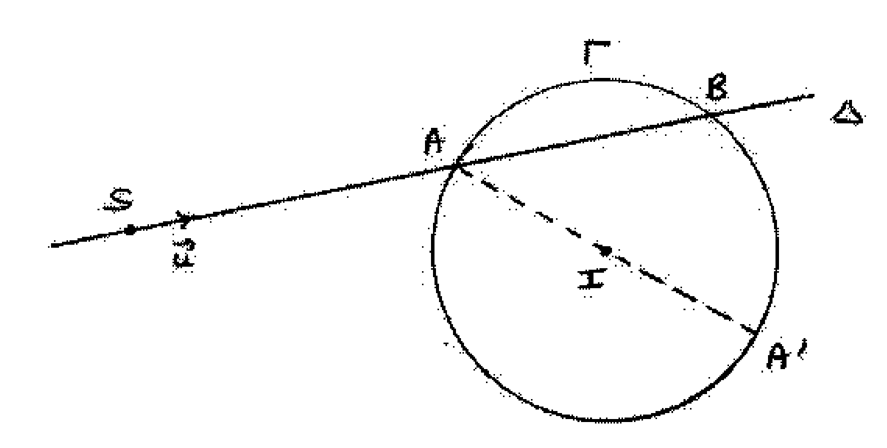
Par hypothèse $\dfrac{(z_2-z_1)(z_3-z_1)}{z^2} \in \mathbb{R}$ (2)

où z est l'affixe d'un vecteur directeur de D.
En multipliant les 2 réels (1) et (2) précédents, on obtient

$$\frac{(z_3-z_2)\,t}{z^2} \in \mathbb{R}$$

et T, (A_2A_3) sont bien sym. inclinées sur D d'après I.1

II.1.1



$\vec{u}$ étant unitaire, $\vec{SA} = \overline{SA}\,\vec{u}$ et $\vec{SB} = \overline{SB}\,\vec{u}$, donc

$$p = \vec{SA}.\vec{SB} = \vec{SA}.(\vec{SB}+\vec{BA'})$$

puisque $\vec{SA}.\vec{BA'} = 0$. En effet, B est sur le cercle de diamètre $[AA']$ donc le triangle ABA' est rectangle en B. Ainsi :

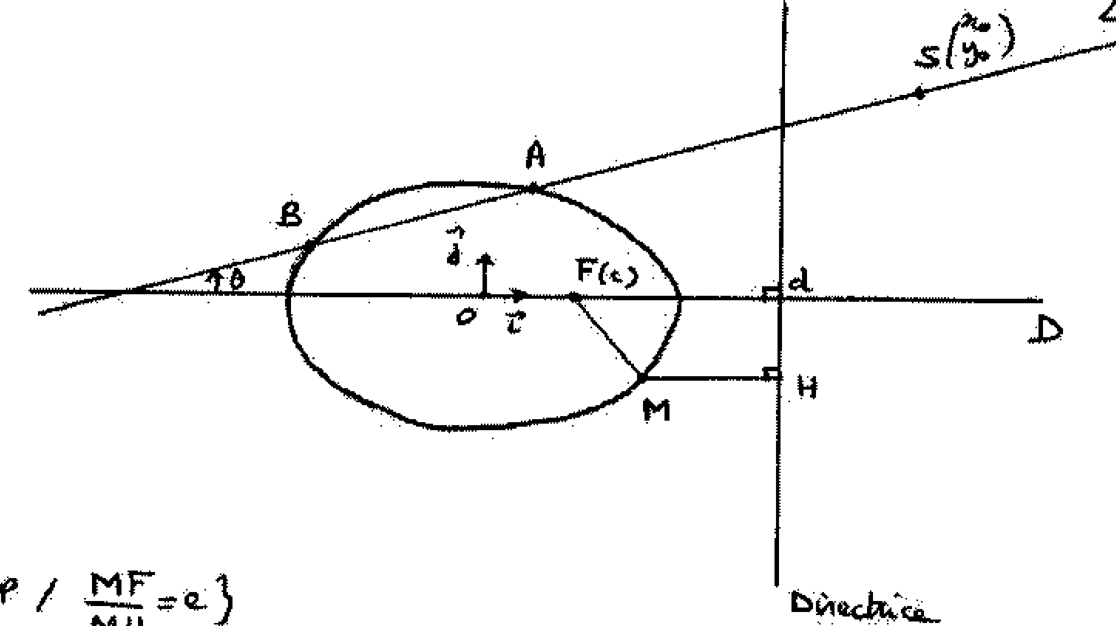
$$p = \vec{SA}.\vec{SA'}$$
$$= (\vec{SI}+\vec{IA})(\vec{SI}+\vec{IA'})$$
$$= SI^2 + \vec{SI}.(\vec{IA}+\vec{IA'}) + \vec{IA}.\vec{IA'}$$
$$= SI^2 - IA^2 \quad \text{car } \vec{IA'} = -\vec{IA}$$

$$\boxed{p = SI^2 - R^2}$$

SM_0I est rectangle en M_0, donc :

$$\Gamma(S) \doteq SI^2 - R^2 = SI^2 - M_0I^2 = SM_0^2$$

II.2.1



$$\Gamma = \left\{ M \in P \ / \ \frac{MF}{MH} = e \right\}$$

où H désigne la projection orthogonale de M sur la directrice associée au foyer F. On aura :

$$\begin{aligned}
M\binom{x}{y} \in \Gamma \quad & \Leftrightarrow \quad MF^2 = e^2 MH^2 \\
& \Leftrightarrow \quad (x-c)^2 + y^2 = e^2 (x-d)^2 \\
& \Leftrightarrow \quad (1-e^2)x^2 + y^2 + 2(e^2d - c)x + c^2 - e^2d^2 = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad (1-e^2)x^2 + y^2 + u_1 x + u_2 = 0
\end{aligned}$$

où $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$.

II.2.2

* Prenons $\vec{u}\begin{pmatrix}\varepsilon\cos\theta\\ \varepsilon\sin\theta\end{pmatrix}$ avec $\varepsilon = \pm 1$.

$$\overrightarrow{SM} = \overline{SM}\,\vec{u} = \lambda\varepsilon\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \Longrightarrow M\begin{pmatrix}\lambda\varepsilon\cos\theta + x_0\\ \lambda\varepsilon\sin\theta + y_0\end{pmatrix}$$

* $M\in\Gamma \Leftrightarrow (1-e^2)(\lambda\varepsilon\cos\theta + x_0)^2 + (\lambda\varepsilon\sin\theta + y_0)^2 + u_1(\lambda\varepsilon\cos\theta + x_0) + u_2 = 0$

$$\Leftrightarrow (1-e^2\cos^2\theta)\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma = 0 \qquad (3)$$

avec $\begin{cases}\beta = 2\varepsilon(1-e^2)x_0\cos\theta + 2\varepsilon y_0\sin\theta + \varepsilon u_1\cos\theta\\ \gamma = (1-e^2)x_0^2 + y_0^2 + u_1x_0 + u_2 = f(x_0,y_0)\end{cases}$

II.2.3

L'équation (3) admet 2 solutions distinctes $\lambda_1 = \overline{SA}$ et $\lambda_2 = \overline{SB}$.
Nécessairement $1-e^2\cos^2\theta \neq 0$, sinon $\beta\lambda + \gamma$ n'admettait pas 2 solutions. (3) fait donc intervenir un vrai trinôme du second degré, donc :

$$\overline{SA}\cdot\overline{SB} = \lambda_1\cdot\lambda_2 = \frac{\gamma}{1-e^2\cos^2\theta}$$

ce qui entraîne

$$p = (1-e^2\cos^2\theta)\cdot\overline{SA}\cdot\overline{SB} = \gamma = (1-e^2)x_0^2 + y_0^2 + u_1x_0 + u_2$$

p ne dépend que de S et Γ.

<u>NB</u> : $\Gamma(S) = p = f(x_0,y_0)$ où $S\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$ <u>lorsque $f(x,y) = (1-e^2)x^2+y^2+u_1x+u_2$</u>

<u>Attention</u> : les équations de Γ sont de la forme $k.f(x,y)=0$, mais pour le calcul de $\Gamma(S)$, <u>seule</u> l'équation $f(x,y)=0$ possédant un coefficient en y^2 égal à 1 (et par suite un coefficient de x^2 égal à $(1-e^2)$) sera à retenir !

II.2.4

* Supposons par l'absurde que $\cos^2\theta = \frac{1}{e^2}$. Alors $\frac{1}{e^2} \leq 1 \Rightarrow e \geq 1$ et Γ est soit une hyperbole, soit une parabole.

Cas de l'hyperbole : $e > 1$.

Notons $M_0\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$. La tangente Δ en M_0 à l'hyperbole $\Gamma : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ admet l'équation :

$$\Delta : \quad \frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

Un vecteur directeur normé de cette tangente sera

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}} \begin{pmatrix} \frac{y_1}{b^2} \\ \frac{x_1}{a^2} \end{pmatrix}$$

de sorte que $\cos\theta = \dfrac{\frac{y_1}{b^2}}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}}$.

Compte tenu de $c^2 = a^2 + b^2$ et de $e = \frac{c}{a}$, $\cos^2\theta = \frac{1}{e^2}$ se traduit ainsi :

$$\frac{\frac{y_1^2}{b^4}}{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}} = \frac{a^2}{a^2+b^2}$$

$$(a^2+b^2)\,\frac{y_1^2}{b^4} = a^2\left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}\right)$$

et comme $x_1^2 = a^2\left(1 + \frac{y_1^2}{b^2}\right)$, cette dernière équation s'écrit :

$$\frac{a^2+b^2}{b^4}\, y_1^2 = 1 + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^4}\, y_1^2$$

$$0 = 1 \qquad \text{absurde.}$$

Cas de la parabole : $e = 1$

Ici $\cos^2\theta = \frac{1}{e^2} \Rightarrow \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \theta \equiv 0 \ [\pi] \Rightarrow \Delta = D$

ce qui est absurde puisque l'axe focal d'une parabole n'est pas tangent à celle-ci.

* Montrons que $\Gamma(S) = (1 - e^2\cos^2\theta)\, SM_0^2$

L'équation (3) $(1 - e^2\cos^2\theta)\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma = 0$ est du second degré et admet la racine double $\lambda = \overline{SM_0}$, donc

$$\lambda^2 = \overline{SM_0}^2 = \frac{\gamma}{1 - e^2\cos^2\theta}$$

Comme $\Gamma(S) = \gamma$, on déduit :

$$\Gamma(S) = (1 - e^2\cos^2\theta)\, SM_0^2$$

□

III.1

$\Gamma(S) = r \iff SI^2 - R^2 = r \iff SI^2 = R^2 + r$

1) Si $r > -R^2$, Γ_r est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{R^2+r}$
2) Si $r = -R^2$, $\Gamma_r = \{I\}$
3) Si $r < -R^2$, $\Gamma_r = \emptyset$

On aura donc : $\begin{cases} U =]-\infty, -R^2[\\ V = \{-R^2\} \\ W =]-R^2, +\infty[\end{cases}$

III.2.1 Notons $S\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. D'après II.2.3 :

$\Gamma(S) = 0 \iff (1-e^2)x_0^2 + y_0^2 + u_1 x_0 + u_2 = 0$

$\iff f(x_0, y_0) = 0 \iff S \in \Gamma$

Donc $\boxed{\Gamma_0 = \Gamma}$, de sorte que $\#\Gamma_0 \geq 2$ et $\boxed{0 \in W}$.

III.2.2

Γ est une ellipse. En prenant O au centre de symétrie de Γ, on sait que l'équation de Γ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

soit : $\Gamma : \quad f(x,y) = 0$

avec $f(x,y) = \dfrac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 - b^2$

Ce que nous avons fait au II.2 est valide avec cette équation $f(x,y) = 0$ de Γ, car le coefficient de y^2 dans $f(x,y)$ est 1. Donc :

$$\Gamma(S) = f(x_0, y_0) = \frac{b^2}{a^2}x_0^2 + y_0^2 - b^2$$

Résolvons $\Gamma(S) = r \iff \dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = \dfrac{r}{b^2} + 1$ $\quad (*)$

1) <u>Si $r > -b^2$</u>, Γ_r admet l'équation :

$$\Gamma_r : \quad \frac{x_0^2}{\left(a\sqrt{\frac{r}{b^2}+1}\right)^2} + \frac{y_0^2}{\left(b\sqrt{\frac{r}{b^2}+1}\right)^2} = 1$$

Γ_r est une ellipse de mêmes axes que Γ, mais de longueurs d'axes multipliés par $\sqrt{\frac{r}{b^2}+1}$. Si l'on pose

$$\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{b^2}+1}}\, x \\ \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{b^2}+1}}\, y \end{pmatrix}$$

on constate que :

$$\Gamma_r : \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{r}{b^2}+1}}\, x \,,\, \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{b^2}+1}}\, y\right) = 0$$

et (P.3.2) montre que $\Gamma_r = \Phi^{-1}(\Gamma)$ où Φ est l'homothétie $h_{0,\frac{1}{\sqrt{\frac{r}{b^2}+1}}}$ de centre O et de rapport $\frac{1}{\sqrt{\frac{r}{b^2}+1}}$. Donc :

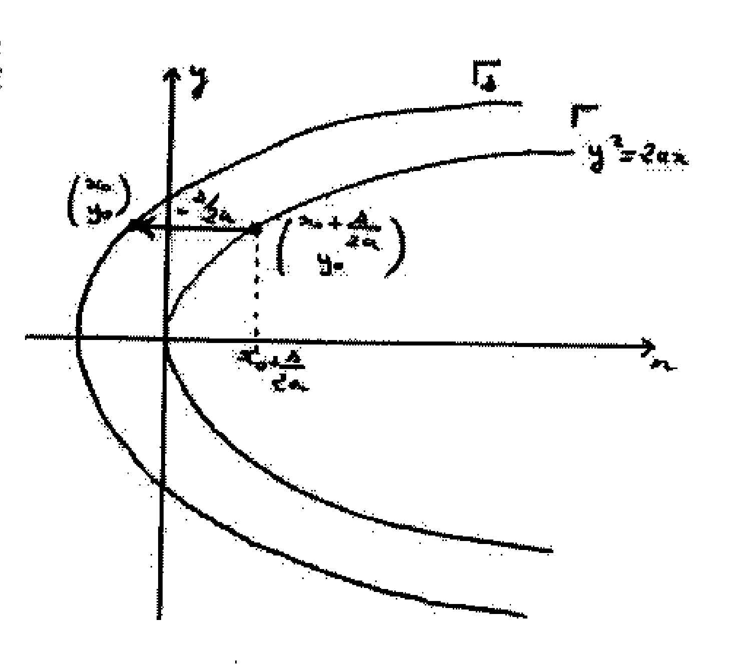
$$\boxed{\Gamma_r = h_{\left(0,\sqrt{\frac{r}{b^2}+1}\right)}(\Gamma)}$$

2) <u>Si $r = -b^2$</u>, $\Gamma(S) = \{0\}$

3) <u>Si $r < -b^2$</u>, $\Gamma(S) = \emptyset$

<u>Conclusion</u> :

$U =]-\infty, -b^2[\qquad V = \{-b^2\} \qquad W =]-b^2, +\infty[$.



III.2.3

* Ici $f(x,y) = y^2 - 2ax$

$\Gamma(S) = y_0^2 - 2ax_0 = s$

Γ_s est donc la parabole d'équation $y_0^2 = 2ax_0 + s$ déduite de Γ par la translation t de vecteur $\begin{pmatrix} -\frac{s}{2a} \\ 0 \end{pmatrix}$

En effet : Γ_s : $y_0^2 = 2a\left(x_0 + \frac{s}{2a}\right)$

Γ_s : $f\left(x_0 + \frac{s}{2a}, y_0\right) = 0$

et (P.3.2) entraine $\Gamma_s = \Phi^{-1}(\Gamma)$ où $\Phi\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + \frac{s}{2a} \\ y_0 \end{pmatrix}$.

* On déduit : $U = V = \emptyset$ et $W = \mathbb{R}$.

III.2.4.a

Γ : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Γ : $\frac{b^2}{a^2}x^2 - y^2 = b^2$

Γ : $-\frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 + b^2 = 0$

Γ : $f(x,y) = 0$

où $f(x,y) = -\frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 + b^2$ est bien le polynôme canonique représentant Γ, utile pour le calcul de $\Gamma(S)$ du III.2.2. En effet, le coefficient de y^2 de $f(x,y)$ est 1 (et de surcroît, ce qui est prévisible : $1 - e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2} = -\frac{b^2}{a^2}$)

Ici : $$\boxed{\Gamma(S) = f(x_0, y_0) = -\frac{b^2}{a^2}x_0^2 + y_0^2 + b^2}$$

On aura

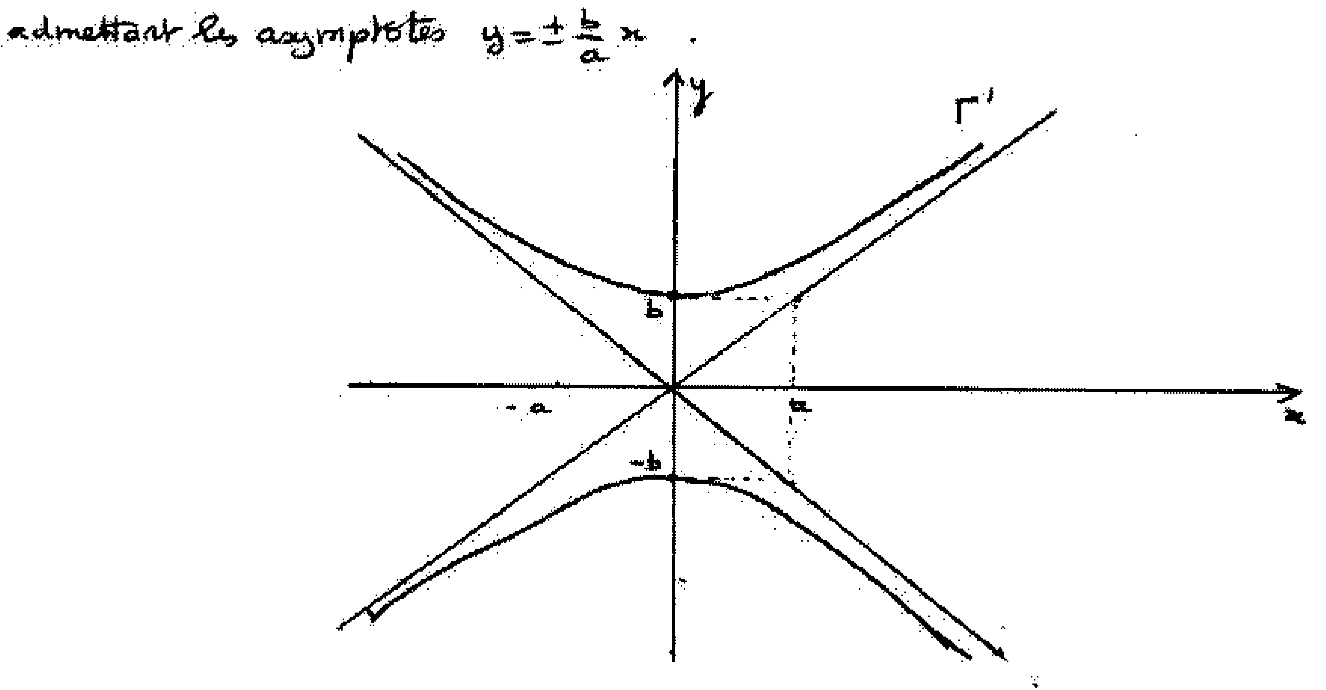
$$\Gamma(S) = b^2 \iff y_0^2 = \frac{b^2}{a^2} x_0^2 \iff y_0 = \pm \frac{b}{a} x_0$$

Γ_{b^2} est la réunion des 2 asymptotes de notre hyperbole, à savoir les droites d'équations $y_0 = \pm \frac{b}{a} x_0$.

III.2.4.b

$$\Gamma(S) = 2b^2 \iff -\frac{b^2}{a^2} x_0^2 + y_0^2 = b^2 \iff -\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

$\Gamma' = \Gamma_{2b^2}$ est l'hyperbole d'axes Ox, Oy, d'axe transverse Oy, admettant les asymptotes $y = \pm \frac{b}{a} x$.



III.2.4.c Si $r \neq b^2$,

$$\Gamma(S) = r \iff -\frac{b^2}{a^2} x_0^2 + y_0^2 + b^2 = r \iff \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 - \frac{r}{b^2}$$

1) Si $1 - \frac{r}{b^2} > 0$, ie $r < b^2$,

$$\Gamma_r : \frac{1}{a^2}\left(\frac{x_0}{\sqrt{1-\frac{r}{b^2}}}\right)^2 - \frac{1}{b^2}\left(\frac{y_0}{\sqrt{1-\frac{r}{b^2}}}\right)^2 = 1$$

$$\Gamma_r : \quad f\left(\frac{x_0}{\sqrt{1-\frac{r}{b^2}}}, \frac{y_0}{\sqrt{1-\frac{r}{b^2}}}\right) = 0$$

(P.3.2) montre que $\Gamma_r = \Phi^{-1}(\Gamma)$ où $\Phi\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_0}{\sqrt{1-\frac{r}{b^2}}} \\ \frac{y_0}{\sqrt{1-\frac{r}{b^2}}} \end{pmatrix}$.

Φ^{-1} est donc l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{1-\frac{r}{b^2}}$.

2) <u>Si $1-\frac{r}{b^2}<0$, ie $r>b^2$</u>,

$$\Gamma_r : \quad -\frac{1}{a^2}\left(\frac{x_0}{\sqrt{\frac{r}{b^2}-1}}\right)^2 + \frac{1}{b^2}\left(\frac{y_0}{\sqrt{\frac{r}{b^2}-1}}\right)^2 = 1$$

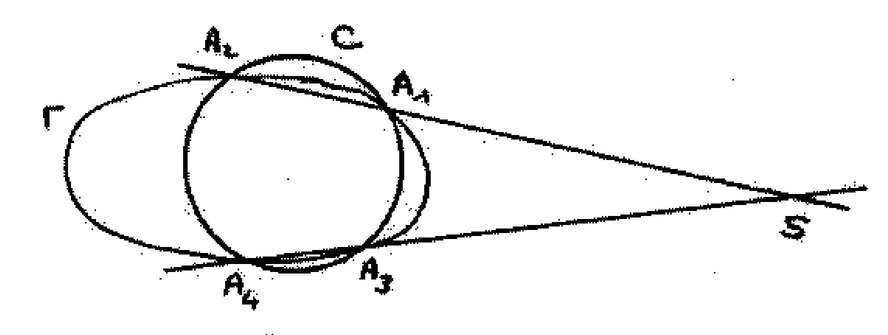
et (P.3.2) montre que $\Gamma_r = \Phi^{-1}(\Gamma')$ où Φ^{-1} est l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{\frac{r}{b^2}-1}$.

IV.1.1

Si S était égal à A_1, les points A_1, A_3, A_4 seraient alignés et sur la conique Γ. C'est absurde, une droite ne coupant une conique qu'au plus en 2 points.

On recommence avec A_2, A_3 et A_4.

IV.1.2



* Si A_1, A_2, A_3, A_4 appartiennent au cercle C, la puissance de S par rapport à C est :

$$C(S) \doteq \overline{SA_1}.\overline{SA_2} = \overline{SA_3}.\overline{SA_4}$$

* Réciproquement, si $\overline{SA_1}.\overline{SA_2} = \overline{SA_3}.\overline{SA_4}$, notons C le cercle circonscrit au triangle $A_1A_2A_3$. Il existe puisque les points A_1, A_2, A_3 ne peuvent pas être alignés, étant sur Γ.

Soit A_4' l'autre point d'intersection de la droite (SA_3) et du cercle C (éventuellement $A_4' = A_3$ si (SA_3) est tangente à C).

D'après l'aller :

$$\overline{SA_1}.\overline{SA_2} = \overline{SA_3}.\overline{SA_4'}$$

et par hypothèse $\overline{SA_1}.\overline{SA_2} = \overline{SA_3}.\overline{SA_4}$

On déduit $\overline{SA_4'} = \overline{SA_4}$, donc $A_4' = A_4$, et les points A_1, A_2, A_3, A_4 seront bien cocycliques.

IV.1.3

La puissance de S par rapport à la conique Γ est (II.2.3):

$$p = (1 - e^2\cos^2\theta)\,\overline{SA_1}.\overline{SA_2} = (1 - e^2\cos^2\theta')\,\overline{SA_3}.\overline{SA_4} \qquad (*)$$

où $\begin{cases} \theta = (D, A_1A_2) & [\pi] \\ \theta' = (D, A_3A_4) & [\pi] \end{cases}$

* Si A_1, A_2, A_3, A_4 sont cocycliques, alors $\overline{SA_1}.\overline{SA_2} = \overline{SA_3}.\overline{SA_4}$ et (*) entraîne $\cos^2\theta = \cos^2\theta'$, d'où :

$$\begin{cases} \cos\theta = \cos\theta' \iff \theta = \pm\theta' \ [2\pi] \Rightarrow \theta = -\theta' \quad (\theta = \theta' \text{ est absurde puisque } (A_1A_2), (A_3A_4) \text{ sont distinctes}) \\ \text{ou} \\ \cos\theta = -\cos\theta' \iff \cos\theta = \cos(\pi - \theta') \iff \theta = \pm(\pi - \theta') \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \theta = \pi - \theta' \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ \theta = -\pi + \theta' \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta = -\theta' \quad [\pi]$$

(puisqu'on s'intéresse seulement à θ modulo π, et que $\theta = \theta'$ $[\pi]$ est à rejeter puisqu'entraînant $(A_1A_2) = (A_3A_4)$)

Dans les 2 cas, on trouve $\theta = -\theta'$ $[\pi]$, ce qui prouve que (A_1A_2) et (A_3A_4) sont symétriquement inclinées sur D.

* Réc., si (A_1A_2) et (A_3A_4) sont symétriquement inclinées sur D, avec les notations ci-dessus :

$\theta = -\theta'$ $[\pi]$ $\Rightarrow \cos^2\theta = \cos^2\theta'$

$\Rightarrow \overline{SA_1}.\overline{SA_2} = \overline{SA_3}.\overline{SA_4}$ (utiliser (*) et voir la remarque ci-dessous)

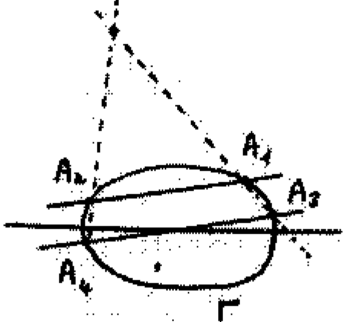
$\Rightarrow A_1, A_2, A_3, A_4$ cocycliques (d'après IV.1.2)

CQFD

<u>Remarque</u> : $1 - e^2\cos^2\theta$ (resp. $1 - e^2\cos^2\theta'$) ne peut être nul, car cela entraînerait $\Gamma(S) = 0$, donc $S \in \Gamma_0 = \Gamma$ (cf III.2.1), et $S \notin \Gamma$ (sinon A_1, A_2, S seraient distincts, alignés et sur Γ, ce qui est absurde).

NB : Voici une autre raison à $1 - e^2\cos^2\theta \neq 0$: (SA_1) coupe Γ en 2 points distincts A_1 et A_2. Il suffit d'utiliser II.2.3 pour affirmer que le trinôme $(1 - e^2\cos^2\theta)X^2 + \beta X + \gamma$ est un vrai trinôme du second degré.

IV.2.1



• On suppose $(A_1A_2) \parallel (A_3A_4)$, ce qui permet d'affirmer que (A_1A_3) n'est pas parallèle à (A_2A_4) ou que (A_1A_4) n'est pas parallèle à (A_2A_3). En effet, dans le cas contraire $A_1A_3A_4A_2$ et $A_1A_4A_2A_3$ seraient des parallélogrammes, mais alors (A_1A_4) et (A_2A_3) seraient des diagonales d'un parallélogramme tout en étant parallèles. C'est absurde.

• Supposons donc (A_1A_3) non parallèle à (A_2A_4) : on a

$$A_1, A_2, A_3, A_4 \text{ cocycliques} \underset{\text{IV.1.3}}{\Longleftrightarrow} (A_1A_3), (A_2A_4) \text{ s.i. sur } D$$

et d'après I.2.2, si A_1, A_2, A_3, A_4 sont cocycliques et si $(A_1A_3), (A_2A_4)$ sont s.i. sur D, on a $(A_1A_2), (A_3A_4)$ s.i. sur D.

On a montré :

$$\boxed{A_1A_2A_3A_4 \text{ cocycliques} \Rightarrow (A_1A_2), (A_3A_4) \text{ s.i. sur } D}$$

• Réciproquement, si les droites (A_1A_2) et (A_3A_4) sont parallèles et s.i. sur D, alors (I.1) elles sont soit parallèles, soit perpendiculaires à D.

On remarque :

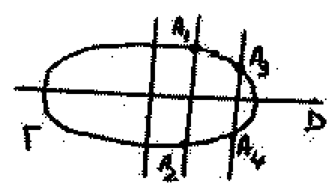
<u>Lemme</u> : $A_i \in \Gamma$ $(i \in \mathbb{N}_4)$; $(A_1A_2) \parallel (A_3A_4)$; D axe focal de Γ

Alors (A_1A_2) perpendiculaire ou parallèle à D $\Longleftrightarrow$ (A_1A_2) perpendiculaire à un axe de symétrie de Γ

preuve : C'est trivial si Γ est une conique bifocale. Si Γ est une parabole, et si $A_1, A_2 \in \Gamma$, la droite (A_1A_2) ne peut jamais être parallèle à l'axe focal D. $\square$

Puis on montre que les points A_i $(i \in \mathbb{N}_4)$ sont cocycliques en envisageant chaque cas :

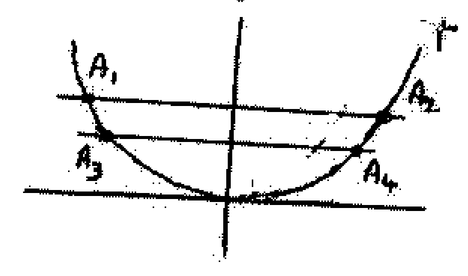
ⓐ Ellipse



Par symétrie, les médiatrices de $[A_1A_3]$ et $[A_2A_4]$ se coupent en O situé sur l'axe D. Comme D est médiatrice de $[A_1A_2]$, on déduit $OA_1 = OA_2 = OA_3 = OA_4$ et les points A_i ($i \in \mathbb{N}_4$) sont cocycliques.

ⓑ Hyperbole : idem.

ⓒ Parabole :



D

on peut raisonner de même avec les médiatrices de $[A_1A_3]$, $[A_2A_4]$ et $[A_1A_2]$.

IV.2.2 On récapitule les résultats de IV.2.1 :

A_1, A_2, A_3, A_4 cocycliques $\underset{\text{IV.2.1}}{\Longleftrightarrow}$ $(A_1A_2), (A_3A_4)$ s.i. sur D $\underset{\text{I.1}}{\Longleftrightarrow}$ (A_1A_2) perpendiculaire ou parallèle à D

$\Updownarrow$ lemme du IV.2.1

(A_1A_2) perpendiculaire à un axe de symétrie de Γ

IV.3.1

Si $S = A_1$, A_1, A_2, A_3 seront 3 points distincts alignés de la conique Γ, absurde.
Si $S = A_2$, la tangente T_1 à Γ coupe Γ en 2 points distincts A_1 et A_2, absurde.
Si $S = A_3$, idem.

IV.3.2

* Si T_1 est tangente à C, la puissance de S par rapport à C s'écrit :

$$C(S) = SA_1^2 = \overline{SA_2}\cdot\overline{SA_3}$$

* Réc., supposons que $SA_1^2 = \overline{SA_2}\cdot\overline{SA_3}$ et notons A_1, A_1' les 2 points d'intersection de T_1 et de C (éventuellement confondus).

On a :

$$C(S) = \overline{SA_1}\cdot\overline{SA_1'} = \overline{SA_2}\cdot\overline{SA_3}$$

d'où

$$\overline{SA_1}\cdot\overline{SA_1'} = \overline{SA_1}^2$$

$$\overline{SA_1'} = \overline{SA_1}$$

$$A_1' = A_1$$

T_1 coupera C en 1 seul point A_1, donc sera tangente à C.

IV.3.3

Soient $\theta = (D, T_1)$ $[\pi]$ de sorte que $\Gamma(S) = (1-e^2\cos^2\theta)\,\overline{SA_1}^2$
$\theta' = (D, A_2A_3)$ $[\pi]$ de sorte que $\Gamma(S) = (1-e^2\cos^2\theta')\,\overline{SA_2}\cdot\overline{SA_3}$ $\Big\}$ (*)

T_1, (A_2A_3) s.i. sur D $\iff$ $\theta' = -\theta$ $[\pi]$ $\iff$ $\cos^2\theta = \cos^2\theta'$

$\underset{(*)\text{ et NB}}{\iff}$ $\overline{SA_1}^2 = \overline{SA_2}\cdot\overline{SA_3}$

$\underset{\text{IV.3.2}}{\iff}$ T_1 tangente à C en A_1

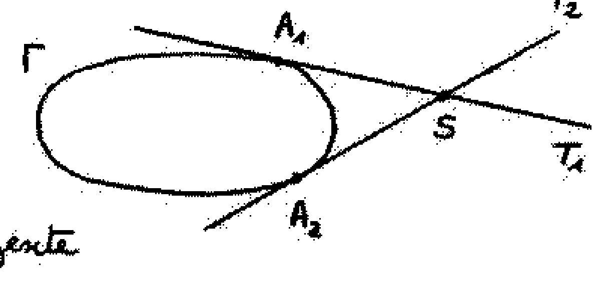
[Reste à vérifier que T_1, (A_2A_3) s.i. sur D $\iff$ (A_1A_2), (A_1A_3) s.i. sur D.
Je n'ai trouvé que le sens ($\Rightarrow$) car alors, on suppose que T_1 est la tgte à C en A_1 et l'on peut écrire :
$(T_1, D) = (D, A_2A_3) \Rightarrow \underset{\substack{\text{cocyclicité} \\ (A_3A_1,\, A_3A_2)}}{(T_1, A_1A_2)} + (A_1A_2, D) = (D, A_1A_3) + (A_1A_3, A_2A_3) \Rightarrow (A_1A_2, D) = (D, A_1A_3) \iff$ (A_1A_2) et (A_1A_3) s.i. sur D.]

NB : On a encore utilisé la non nullité de $1-e^2\cos^2\theta$ et de $1-e^2\cos^2\theta'$. En effet :

$$\begin{cases} 1-e^2\cos^2\theta \neq 0 & \text{d'après II.2.4} \\ 1-e^2\cos^2\theta' \neq 0 & \text{d'après II.2.3 puisque } \overline{SA_2} \text{ et } \overline{SA_3} \text{ sont 2 racines distinctes} \end{cases}$$

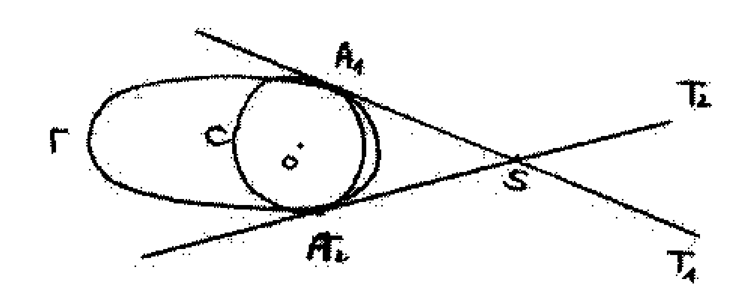
de l'équation $(1-e^2\cos^2\theta)X^2 + \beta X + \gamma = 0$.

IV.4.1



Si S était égal à A_1, T_2 couperait Γ en A_1 et A_2, et ne serait pas une tangente à Γ.

IV.4.2



(i) ⇒ (ii)

Soient o le centre de C

(L) la médiatrice de $[A_1A_2]$

s la réflexion / à (L)

$o \in (L)$ donc $s(C) = C$. On a aussi $s(A_1) = A_2$. La tangente T_1 à C en A_1 devient, par s, la tangente à $s(C) = C$ en $s(A_1) = A_2$, ie T_2 :

$$s(T_1) = T_2$$

Mais alors $T_1 \cap s(T_1) = T_1 \cap T_2 = \{S\}$ est inclus dans (L), soit $S \in (L)$. Cela entraine $SA_1 = SA_2$.

(ii) ⇒ (iii)

T_i étant tangente à Γ en A_i, on a

$$\Gamma(S) = (1 - e^2 \cos^2 \theta_i)\, SA_i^2$$

où $\theta_i = (D, T_i) \quad [\pi]$ (cf II.2.4)

De $\Gamma(S) = (1 - e^2\cos^2\theta_1)\, SA_1^2 = (1 - e^2\cos^2\theta_2)\, SA_2$ et $SA_1 = SA_2$ on tire $\cos^2\theta_1 = \cos^2\theta_2$ soit $\theta_1 = -\theta_2 \quad [\pi]$. Cela signifie bien que T_1 et T_2 sont s.i. sur D.

<u>NB</u>: On a encore $1 - e^2\cos^2\theta_i \neq 0$ (cf NB de IV.3.3)

(iii) ⇒ (i)

Avec les notations ci-dessus, $\theta_1 = -\theta_2$ $[\pi]$ entraine $\cos^2\theta_1 = \cos^2\theta_2$ et donc

$$\Gamma(S) = (1-e^2\cos^2\theta_1)\,SA_1^2 = (1-e^2\cos^2\theta_2)\,SA_2^2$$

entraine $$SA_1 = SA_2$$

Soit C le cercle passant par A_1 et A_2 et tangent à T_1 en A_1. (Il existe car $T_1 \neq (A_1A_2)$). Notons A_2, A_2' les intersections, éventuellement confondues, de T_2 et C. On a :

$$C(S) = SA_1^2 = \overline{SA_2}\cdot\overline{SA_2'}$$

d'où

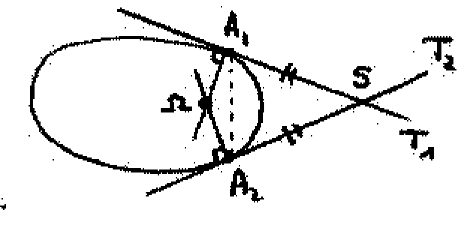
$$\overline{SA_2}^2 = \overline{SA_2}\cdot\overline{SA_2'}$$

$$\overline{SA_2} = \overline{SA_2'}$$

$$A_2 = A_2'$$

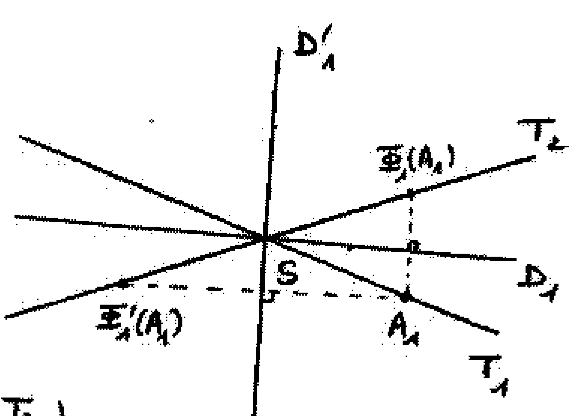
et T_2 sera tangente à C en A_2. CQFD

<u>NB</u> : On pouvait conclure de cette façon : soit Ω l'intersection de la perpendiculaire à T_1 en A_1 et de la perpendiculaire à T_2 en A_2



Soit s la réflexion $/_r$ la médiatrice de $[A_1A_2]$.
$SA_1 = SA_2$, donc $s(T_1) = T_2$. Comme $s(A_1) = A_2$,
la symétrique de la droite (ΩA_1) sera la perpendiculaire à (SA_2) passant par A_2, ie (ΩA_2).
Ainsi : $s((\Omega A_1)) = (\Omega A_2) \Rightarrow s(\Omega) = \Omega \Rightarrow \Omega A_1 = \Omega A_2$
et le cercle C de centre Ω et de rayon ΩA_1 répond à la question ! CQFD

IV.4.3



a) $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi'_1$ est la symétrie par rapport à S

b) $\Phi_1(T_1) = T_2$ car $(D_1, T_1) = -(D_1, T_2)$ signifie que D_1 est la bissectrice du couple (T_1, T_2).
Φ_1 est une isométrie et $\Phi_1(S) = S$, donc

$$\Phi_1(A_1)S = A_1 S$$

Comme $\Phi(A_1) \in T_2$, $\Phi(A_1)$ sera l'un des 2 points de T_2 situés à la distance A_1S de S, ie A_2 ou le symétrique $\Phi(A_2)$ de A_2 /à S. Soit :

$$\Phi_1(A_1) \in \{A_2, \Phi(A_2)\}$$

c) D'après b), $\Phi_1(A_1) = A_2$ ou $\Phi(A_2)$.

Si $\Phi_1(A_1) = \Phi(A_2)$, alors

$$\Phi_1(A_1) = \Phi_1 \circ \Phi'_1(A_2)$$

$$A_1 = \Phi'_1(A_2)$$

$$\Phi'_1(A_1) = A_2$$

Par conséquent :

$$A_2 \in \{\Phi_1(A_1), \Phi'_1(A_1)\}$$

IV.4.4

* Si (i) a lieu, IV.4.3.c montre que

$$A_2 \in \{\Phi_1(A_1), \Phi'_1(A_1)\}$$

<u>1^er cas</u> : Si $A_2 = \mathcal{I}_1(A_1)$, $(A_1A_2) \perp D_1$

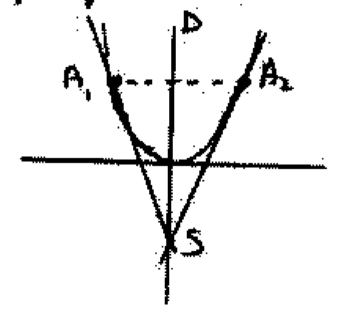
<u>2^e cas</u> : Si $A_2 = \mathcal{I}_1'(A_1)$, $(A_1A_2) \perp D_1'$

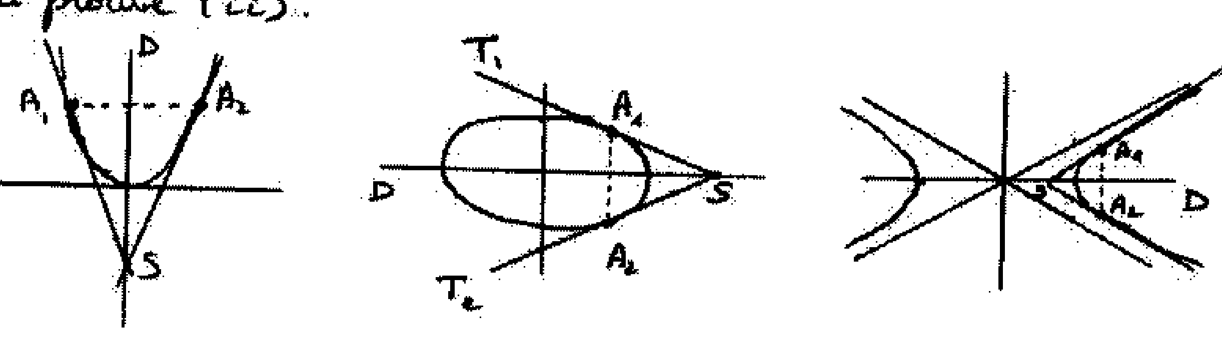
Dans les 2 cas (A_1A_2) est perpendiculaire à l'un des axes de symétrie de Γ dès que Γ est une ellipse ou une hyperbole. Si Γ est une parabole, on ne peut pas avoir $A_2 = \mathcal{I}_1'(A_1)$ (car A_1 et A_2 seraient sur la parabole et la droite (A_1A_2) serait parallèle à l'axe focal D de la parabole. C'est absurde !) de sorte que (A_1A_2) soit perpendiculaire à l'unique axe de symétrie D de la parabole.

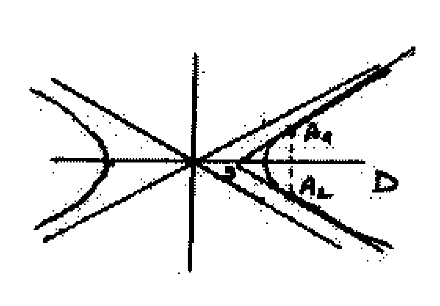
* Réc., si (A_1A_2) est perpendiculaire à un axe de symétrie de Γ, on vérifie facilement sur les figures suivantes et en utilisant ces axes de symétrie de Γ, que

$$SA_1 = SA_2$$

ce qui prouve (ii).







(preuve détaillée : Soit s la réflexion d'axe D. $(A_1A_2) \perp D$ et $A_1, A_2 \in \Gamma$ entraînent $s(A_1) = A_2$. T_1 est tgte à Γ en A_1, donc $s(T_1)$ sera tgte à Γ en $s(A_1) = A_2$, donc $s(T_1) = T_2$. T_1 et T_2 se couperont donc sur la base D de s (T_1 et T_2 ne sont pas parallèles par hypothèse) en S, donc $SA_1 = SA_2$. CQFD.)

V.1

* Pour tout $u \in U$, $M(u) \in \Gamma$ car $\frac{(a\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(b\sin\theta)^2}{b^2} = 1$. L'application $\varphi : U \longrightarrow \Gamma$, $u \longmapsto M(u)$ est donc <u>bien définie</u>.

* Tout point N de Γ a des coordonnées de la forme

$$N\begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{où } \theta \in \mathbb{R}$$

(En effet, si $N\binom{x}{y}$ vérifie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, alors $\left|\frac{x}{a}\right| \leq 1$ et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{x}{a} = \cos\theta$. En remplaçant :

$$\cos^2\theta + \frac{y^2}{b^2} = 1 \implies y^2 = b^2\sin^2\theta \implies y = \pm b\sin\theta$$

Si $y = b\sin\theta$, c'est fini. Sinon $\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) \\ \sin(-\theta) \end{pmatrix}$. CQFD)

Ainsi φ est <u>surjective</u>.

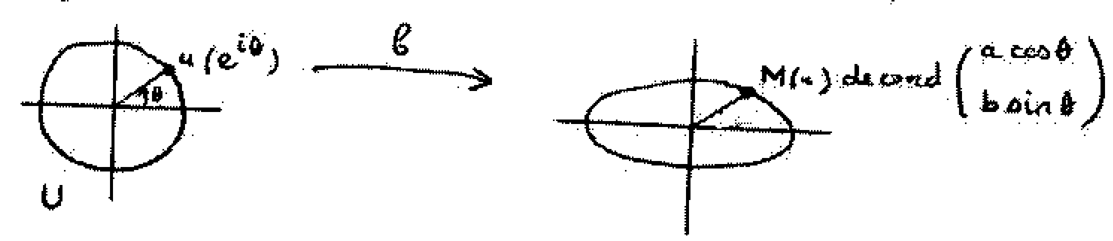
* $\varphi(u) = \varphi(u') \iff \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\theta' \\ b\sin\theta' \end{pmatrix}$ où $u = e^{i\theta}$ et $u' = e^{i\theta'}$

$$\iff \theta \equiv \theta' \ [2\pi]$$

$$\iff u = u'$$

φ est <u>injective</u>.

NB : On a une paramétrisation bijective du cercle sur l'ellipse



V.2.1

$M(u) \in C \cap \Gamma \iff M(u) \in C$ (car $M(u) \in \Gamma$ pour tout $u \in U$)

$$\begin{cases} x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma=0 \\ \text{où } x = a\dfrac{u+\bar u}{2} \text{ et } y = b\dfrac{u-\bar u}{2i} \end{cases}$$

$$\iff \frac{a^2}{4}(u+\bar u)^2 - \frac{b^2}{4}(u-\bar u)^2 - \alpha a(u+\bar u) - \beta b\frac{u-\bar u}{i} + \gamma = 0$$

$$\iff \frac{a^2-b^2}{4}u^2 + \frac{a^2-b^2}{4}\bar u^2 + u\bar u\frac{a^2}{2} + u\bar u\frac{b^2}{2}$$
$$-\left(\alpha a + \frac{\beta b}{i}\right)u - \left(\alpha a - \frac{\beta b}{i}\right)\bar u + \gamma = 0$$

$u \in U$ donc $\bar u = \frac{1}{u} = u^{-1}$. Multipliant les 2 membres par u^2, on trouve :

$$M(u) \in C\cap\Gamma \iff \frac{a^2-b^2}{4}u^4 + (\beta bi-\alpha a)u^3 + \left(\frac{a^2+b^2}{2}+\gamma\right)u^2 - (\alpha a+\beta bi)u + \frac{a^2-b^2}{4} = 0$$

$$\iff \underbrace{c^2u^4 + 4(\beta bi-\alpha a)u^3 + 2(a^2+b^2+2\gamma)u^2 - 4(\alpha a+\beta bi)u + c^2}_{=Q_c(u)} = 0$$

V.2.2 Dans ce cas u_j $(1\le j\le 4)$ est racine de $Q_c(u)$, et les relations entre coefficients et racines d'un polynôme permettent d'écrire

$$u_1u_2u_3u_4 = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

V.3

* Si les M_j sont cocycliques, V.2.2 montre que $u_1 u_2 u_3 u_4 = 1$.

* Réc., si $u_1 u_2 u_3 u_4 = 1$, notons C le cercle circonscrit à M_1, M_2, M_3. Il existe car ces 3 points distincts ne peuvent pas être alignés sur la conique Γ.

Les points d'intersection de C et Γ sont donnés par l'équation :

$$Q_C(u) = 0$$

qui admet déjà les 3 racines u_1, u_2, u_3. Notons v la quatrième racine complexe de $Q_C(u)$, éventuellement confondue avec l'une des racines précédentes. On aura :

$$u_1 . u_2 . u_3 . v = 1$$

et comme $u_1 u_2 u_3 u_4 = 1$, on tire $v = u_4$, soit $M_4 \in C \cap \Gamma$.

Finalement les 4 points M_1, M_2, M_3, M_4 sont sur le cercle C.

V.4.1

Il s'agit de chercher un cercle C_0 vérifiant

$$Q_{C_0}(X) = c^2 (X - u_0)^3 (X - v)$$

Notons encore $C_0 : x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$. Tout revient à résoudre le système ci-dessous en $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Ce système provient des relations coefficients-racines d'un polynôme :

$$\begin{cases} \sigma_1 = 3u_0 + v = (-1) \dfrac{4(\beta b i - \alpha a)}{c^2} \\ \sigma_2 = 3u_0^2 + 3u_0 v = \dfrac{2(a^2 + b^2 + 2\gamma)}{c^2} \\ \sigma_3 = u_0^3 + 3u_0^2 v = \dfrac{4(\alpha a + \beta b i)}{c^2} \\ \sigma_4 = u_0^3 v = 1 \end{cases}$$

La dernière équation équivaut à $v = \frac{1}{u_0^3} = \overline{u}_0^{3}$, de sorte que le système équivalle à :

$$\begin{cases} \alpha a - \beta b i = \frac{c^2}{4}(3u_0 + \overline{u}_0^3) \\ \alpha a + \beta b i = \frac{c^2}{4}(u_0^3 + 3\overline{u}_0) \\ a^2 + b^2 + 2\gamma = \frac{c^2}{2}(3u_0^2 + 3\overline{u}_0^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{c^2}{4a}\left(\frac{u_0^3 + \overline{u}_0^3}{2} + 3\,\frac{u_0 + \overline{u}_0}{2} \right) \\ \beta = \frac{c^2}{4b}\left(\frac{u_0^3 - \overline{u}_0^3}{2i} - 3\,\frac{u_0 - \overline{u}_0}{2i} \right) \qquad (S) \\ \gamma = \frac{3}{2} c^2 . \frac{u_0^2 + \overline{u}_0^2}{2} - \frac{a^2+b^2}{2} \end{cases}$$

d'où l'existence et l'unicité de $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, donc de C_0, telsque $Q_{C_0}(X)$ admette u_0 comme racine d'ordre ≥ 3.

V.4.2

Le centre de C_0 est $\Omega_0 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ où α, β sont donnés par le système (S) ci-dessus.

V.4.3

La tangente T_C à C en M_0 a pour équation :

$$T_C : \quad (x_0 - \alpha)(x - x_0) + (y_0 - \beta)(y - y_0) = 0$$

La tangente T_Γ à Γ en M_0 a pour équation :

$$T_\Gamma : \quad \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

Ces 2 tangentes seront égales ssi elles ont même direction, ie

$$D \doteq \begin{vmatrix} x_0-\alpha & \dfrac{x_0}{a^2} \\ y_0-\beta & \dfrac{y_0}{b^2} \end{vmatrix} = 0$$

Calculons :

$$D = (x_0-\alpha)\frac{y_0}{b^2} - (y_0-\beta)\frac{x_0}{a^2} \qquad \text{où } x_0 = a\,\frac{u_0+\bar{u}_0}{2} \text{ et } y_0 = b\,\frac{u_0-\bar{u}_0}{2i}$$

$$D = \left(a\,\frac{u_0+\bar{u}_0}{2} - \frac{c^2}{4a}\left(\frac{u_0^3+\bar{u}_0^3}{2} + 3\,\frac{u_0+\bar{u}_0}{2}\right)\right)\frac{1}{b}\,\frac{u_0-\bar{u}_0}{2i}$$

$$- \left(b\,\frac{u_0-\bar{u}_0}{2i} - \frac{c^2}{4b}\left(\frac{u_0^3-\bar{u}_0^3}{2i} - 3\,\frac{u_0-\bar{u}_0}{2i}\right)\right)\frac{1}{a}\cdot\frac{u_0+\bar{u}_0}{2}$$

$$D = \frac{a}{b}\,\frac{u_0^2-\bar{u}_0^2}{4i} - \frac{b}{a}\,\frac{u_0^2-\bar{u}_0^2}{4i} - \frac{c^2}{4ab}\left(\frac{(u_0^3+\bar{u}_0^3)(u_0-\bar{u}_0)}{4i} + 3\,\frac{u_0^2-\bar{u}_0^2}{4i}\right)$$

$$+ \frac{c^2}{4ab}\left(\frac{(u_0^3-\bar{u}_0^3)(u_0+\bar{u}_0)}{4i} - 3\,\frac{u_0^2-\bar{u}_0^2}{4i}\right)$$

$$D = \frac{c^2}{4ab}\left(\frac{u_0^2-\bar{u}_0}{i} - \frac{(u_0^3+\bar{u}_0^3)(u_0-\bar{u}_0)}{4i} - 3\,\frac{u_0^2-\bar{u}_0^2}{4i} + \frac{(u_0^3-\bar{u}_0^3)(u_0+\bar{u}_0)}{4i} - 3\,\frac{u_0^2-\bar{u}_0^2}{4i}\right)$$

$$D = \frac{c^2}{16abi}\cdot E$$

avec

$$E = 4u_0^2 - 4\bar{u}_0^2 - (u_0^4 - \bar{u}_0^4 + \bar{u}_0^2 - u_0^2) - 3u_0^2 + 3\bar{u}_0^2 + (u_0^4 - \bar{u}_0^3 - \bar{u}_0^2 + u_0^2)$$
$$- 3u_0^2 + 3\bar{u}_0^2$$

$$E = 0$$

CQFD

IV.4.4

$\{M_0\} = C_0 \cap \Gamma \iff v = \dfrac{1}{u_0^3} = u_0$ (notations du IV.4.1)

$\iff u_0^4 = 1 \iff u_0 \in \{1, i, -1, -i\}$

$\iff M(u_0)$ est l'un des 4 sommets de Γ

IV.4.5

* Si M_0 n'est pas un sommet de Γ, la question précédente assure que $\{M_0\} \subsetneq C_0 \cap \Gamma$, et $Q_{C_0}(X)$ ne pouvant avoir qu'une racine $v = \dfrac{1}{u_0^3}$ distincte de u_0, C_0 coupera Γ en exactement 2 points, à savoir $M_0(u_0)$ et $M_1\left(\dfrac{1}{u_0^3}\right)$.

* $T_0 : \dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$ admet le vecteur directeur $\vec{u_0}\begin{pmatrix} -\frac{y_0}{b^2} \\ \frac{x_0}{a^2} \end{pmatrix}$

où $M_0(u_0)$ de coordonnées $\begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix}$ avec $u_0 = e^{i\theta}$

Ainsi $\begin{cases} x_0 = a\cos\theta \\ y_0 = b\sin\theta \end{cases}$ et $\vec{u_0}\begin{pmatrix} -\frac{\sin\theta}{b} \\ \frac{\cos\theta}{a} \end{pmatrix}$

<u>L'affixe d'un vecteur directeur de T_0 est donc</u> $z_0 = -\dfrac{\sin\theta}{b} + i\dfrac{\cos\theta}{a}$.

Notons $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ les coordonnées de $M_1(v)$, On a :

$$\begin{cases} x_1 = a\,\dfrac{v+\bar{v}}{2} = a\,\dfrac{\bar{u}_0^3 + u_0^3}{2} = a\cos 3\theta \\ y_1 = b\,\dfrac{v-\bar{v}}{2i} = b\,\dfrac{\bar{u}_0^3 - u_0^3}{2i} = -b\sin 3\theta \end{cases}$$

donc $\overrightarrow{M_0N_1}\begin{pmatrix} a\cos 3\theta - a\cos\theta \\ -b\sin 3\theta - b\sin\theta \end{pmatrix}$

L'affixe d'un vecteur directeur de (M_0M_1) sera donc :

$$z_1 = (a\cos 3\theta - a\cos\theta) - bi(\sin\theta + \sin 3\theta)$$

L'affixe de $\binom{1}{0}$ qui dirige D est $z = 1$.

On applique (I.1) : T_0 et (M_0M_1) sont symétriquement inclinées sur D ssi

$$\frac{z_0 z_1}{z^2} \in \mathbb{R}$$

ie $\quad z_0 z_1 = \left(-\frac{\sin\theta}{b} + i\frac{\cos\theta}{a}\right)\left(a(\cos 3\theta - \cos\theta) - b(\sin\theta + \sin 3\theta)i\right) \in \mathbb{R}$

Prenons la partie imaginaire de $z_0 z_1$ et montrons sa nullité :

$$\operatorname{Im}(z_0 z_1) = \cos\theta . (\cos 3\theta - \cos\theta) + \sin\theta . (\sin\theta + \sin 3\theta)$$

$$= \cos\theta\cos 3\theta - \cos^2\theta + \sin^2\theta + \sin\theta\sin 3\theta$$
$$= \cos(3\theta - \theta) - \cos 2\theta = 0$$

CQFD

V.4.6

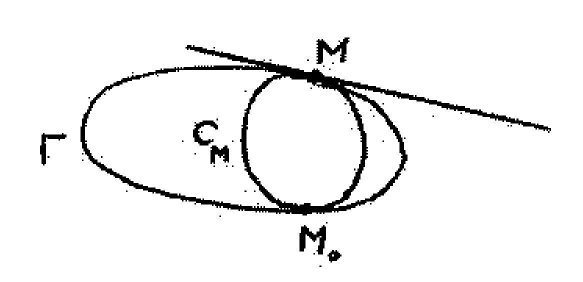
C_M = cercle osculateur en M à Γ

$M_0 = M(u_0)$

$E = \{ M \in \Gamma \setminus \{M_0\} \ / \ M_0 \in C_M \}$

$= \{ M(u) \ / \ u \neq u_0 \text{ et } u_0 = \frac{1}{u^3} \}$

$= \{ M(u) \ / \ u \neq u_0 \text{ et } u^3 = \overline{u_0} \}$



donc $\# E = 3$ (les 3 racines 3-ièmes de $\overline{u_0}$) sauf si u_0 vérifie $u_0^3 = \overline{u_0}$, ie $u_0^4 = 1$, ie est une racine 4-ème de l'unité.

D'où la discussion :

- 1er cas : $C_0 \cap \Gamma = \{M_0\}$, alors $u_0^4 = 1$ et M_0 est l'un des 4 sommets de l'ellipse Γ.

$\# E = 2$

Ici $E \cup \{M_0\}$ est formé de 3 points de Γ qui sont les sommets d'un triangle équilatéral, donc cocycliques.

- 2e cas : $C_0 \cap \Gamma \neq \{M_0\}$, ie $u_0^4 \neq 1$.

Alors $\# E = 3$

$E \cup \{M_0\}$ est formé de $M_0(u_0)$ et des points $M(u)$ tels que $u^3 = \overline{u_0}$.

Notons u_1 un complexe tel que $u_1^2 = \overline{u_0}$. On a :

$$E \cup \{M_0\} = \{ M(u) \,/\, u = u_0, u_1, u_1 j, u_1 j^2 \}$$

et il suffit d'appliquer V.3 compte tenu de

$$u_0 . u_1 . (u_1 j) . (u_1 j^2) = u_0 u_1^3 = u_0 \overline{u_0} = 1$$

pour conclure à la cocyclicité des 4 points de $E \cup \{M_0\}$.

FIN

SESSION DE 1995

concours externe de recrutement de professeurs certifiés

section : mathématiques

première composition de mathématiques

Durée : 5 heures

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche – éventuellement programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Tournez la page S.V.P.

OBJET ET NOTATIONS DU PROBLÈME

Ce problème a pour objet l'étude d'un algorithme, voisin de celui de Salamin (1976), qui donne une suite convergeant très rapidement vers π.

Étant donné deux nombres réels positifs ou nuls a et b, on notera (a_n) et (b_n) les suites définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et, pour $n \geqslant 0$, par :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Si $a = 1$ et $b = x$, avec $x \geqslant 0$, alors a_n et b_n sont des fonctions de x qu'on notera respectivement u_n et v_n.

I. LA MOYENNE ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE M (a, b)

I.1. Convergence des suites (a_n) et (b_n).

I.1.1. Démontrer que pour $n \geqslant 1$ et $a \neq b$, on a :

$$\begin{cases} 0 \leqslant b_n \leqslant b_{n+1} < a_{n+1} < a_n \\ a_{n+1} - b_{n+1} < \dfrac{1}{2}(a_n - b_n). \end{cases}$$

Que deviennent ces inégalités si $a = b$?

I.1.2. Démontrer que les deux suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et qu'elles ont la même limite.

On notera $M(a, b)$ cette limite commune et f la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = M(1, x)$.

I.2. Propriétés de la moyenne arithmético-géométrique.

Démontrer que, quels que soient les réels $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 0$ et quel que soit l'entier naturel n, on a :

$$\begin{cases} M(a_n, b_n) = M(a, b) \\ M(a, b) = M(b, a) \\ M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b). \end{cases}$$

En déduire que, pour $a > 0$, on a $M(a, b) = af\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

I.3. Continuité de la fonction f.

I.3.1. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 0$, les fonctions u_n et v_n sont continues.

I.3.2. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \geqslant 0$, on a :

$$0 \leqslant u_n(x) - f(x) \leqslant 2^{-n}|1 - x|.$$

I.3.3. En déduire que la fonction f est continue.

I.4. Étude de la fonction f au voisinage de 1.

Démontrer que pour tout $x \geqslant 0$ on a $\sqrt{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1 + x}{2}$. En déduire que la fonction f est dérivable au point $x = 1$.

I.5. **Étude aux bornes de la fonction f.**

I.5.1. Calculer $f(0)$. La fonction f est-elle dérivable en ce point ? Le graphe de f a-t-il une tangente au point d'abscisse nulle ?

I.5.2. Démontrer que, pour tout $x > 0$, on a $f(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$.

I.5.3. Démontrer que le graphe de f présente une branche parabolique, dont on précisera la direction, quand x tend vers $+\infty$.

I.6. **Sens de variation de la fonction f.**

Démontrer que, pour tout $n \geqslant 0$, les fonctions u_n et v_n sont croissantes. En déduire que la fonction f est croissante.

I.7. **Représentation graphique de la fonction f.**

I.7.1. Calculer les valeurs décimales par défaut à 10^{-5} près de $f(x)$ pour les valeurs suivantes de x :

0,01 0,1 0,2 0,4 0,6 0,8 2 3 10 100.

I.7.2. Donner une représentation graphique sur l'intervalle [0, 3] de la fonction f ainsi que des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \frac{1+x}{2}$ (on prendra 5 cm pour unité).

II. EXPRESSION DE M (a, b) PAR UNE INTÉGRALE ELLIPTIQUE

Étant donné deux réels strictement positifs a et b, on pose :

$$\mathrm{I}(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}}, \quad \mathrm{J}(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}}.$$

II.1. **Convergence et propriétés des intégrales I (a, b) et J (a, b).**

II.1.1. Démontrer que les intégrales $\mathrm{I}(a, b)$ et $\mathrm{J}(a, b)$ sont convergentes et qu'on a $\mathrm{J}(a, b) = 2\mathrm{I}(a, b)$.

On notera g la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{I}(1, x)$.

II.1.2. Démontrer, en utilisant le changement de variable $t = b \tan\theta$, que :

$$\mathrm{I}(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}.$$

En déduire que la fonction g est continûment dérivable.

II.1.3. Démontrer que, quels que soient $a > 0$, $b > 0$ et $\lambda > 0$, on a :

$$\begin{cases} \mathrm{I}(a, b) = \mathrm{I}(b, a) \\ \mathrm{I}(\lambda a, \lambda b) = \lambda^{-1}\,\mathrm{I}(a, b). \end{cases}$$

En déduire que $\mathrm{I}(a, b) = \frac{1}{a}\, g\left(\frac{b}{a}\right)$.

Tournez la page S.V.P.

II.2. Expression de M (a, b) en fonction de I (a, b).

II.2.1. Démontrer, en utilisant le changement de variable $s = \frac{1}{2}\left(t - \frac{ab}{t}\right)$,

qu'on a $J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = 2I(a, b)$.

En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $I(a_n, b_n) = I(a, b)$.

II.2.2. Démontrer que $I(a, b) = \frac{\pi}{2M(a, b)}$.

En déduire que la fonction f est continûment dérivable sur $]0, +\infty[$.

II.3. Comportement asymptotique des fonctions f et g.

II.3.1. Démontrer, en utilisant le changement de variable $s = \frac{x}{t}$, que :

$$\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+x^2)}} = \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{(s^2+1)(s^2+x^2)}}.$$

En déduire que $g(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2\,dt}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+x^2)}}$.

II.3.2. Démontrer, en encadrant $t^2 + 1$ sur l'intervalle $[0, \sqrt{x}]$, que g est équivalente au voisinage de 0^+ à la fonction h définie pour $x > 0$ par :

$$h(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2\,dt}{\sqrt{t^2+x^2}}.$$

II.3.3. Calculer $h(x)$. En déduire que g est équivalente au voisinage de 0^+ à la fonction $x \mapsto -\ln x$.

II.3.4. En déduire des équivalents de f au voisinage de 0^+ et de $+\infty$.

III. EXPRESSION DE π EN FONCTION DE f ET f'

On restreindra désormais les fonctions u_n et v_n à l'intervalle $]0, 1[$. On notera w_n la fonction définie sur $]0, 1[$ par $w_n = \sqrt{u_n^2 - v_n^2}$ et k_n la fonction définie sur $]0, 1[$ par $k_n = 2^{-n} \ln\left(\frac{u_n}{w_n}\right)$.

Justifier l'existence des fonctions w_n et k_n.

III.1. Convergence de la suite des fonctions k_n.

III.1.1. En remarquant que $M(a, b) = M\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$ (cf. I.2.) et que $w_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{2}$, démontrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

$$2M(u_{n+1}, w_{n+1}) = M(u_n, w_n).$$

En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout $x \in]0, 1[$, on a :

$$2^n M(u_n(x), w_n(x)) = f(\sqrt{1-x^2}).$$

III.1.2. Démontrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, on a :

$$\lim_{n \to \infty} 2^n f\left(\frac{w_n(x)}{u_n(x)}\right) = \frac{f(\sqrt{1-x^2})}{f(x)}.$$

III.1.3. Démontrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, on a $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{w_n(x)}{u_n(x)} = 0$.

En remplaçant f par un équivalent dans le résultat de la question précédente, en déduire que, pour tout $x \in]0, 1[$, on a :

$$\lim_{n \to \infty} k_n(x) = \frac{\pi}{2} \frac{f(x)}{f(\sqrt{1 - x^2})}.$$

III.2. Convergence de la suite des fonctions dérivées k'_n.

III.2.1. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 0$, les fonctions u_n, v_n, w_n et k_n sont continûment dérivables sur $]0, 1[$ et que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $u'_n > 0$ et $v'_n > 0$.

III.2.2. Démontrer que la fonction $\dfrac{k'_n}{v_n^2}$ est indépendante de n (on pourra utiliser la relation $w_{n+1} = \dfrac{u_n - v_n}{2}$).

III.2.3. Déduire du résultat précédent que, pour tout $n \geqslant 0$ et tout $x \in]0, 1[$, on a $k'_n(x) = \dfrac{v_n^2(x)}{x(1 - x^2)}$.

III.2.4. Démontrer que la suite de fonctions (k'_n) converge, uniformément sur tout compact de $]0, 1[$, vers la fonction :

$$x \mapsto \frac{f^2(x)}{x(1 - x^2)}.$$

III.3. Une expression de π.

III.3.1. Démontrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{f^2(x)}{x(1 - x^2)}$ est la dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{\pi}{2} \dfrac{f(x)}{f(\sqrt{1 - x^2})}$.

III.3.2. Calculer directement cette dérivée et en déduire, en faisant $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, que :

$$\pi = 2\sqrt{2} \frac{f^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

IV. APPROXIMATION DE π

Pour tout $n \geqslant 1$, on notera y_n la fonction définie sur $]0, 1[$ par $y_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ et z_n la fonction définie sur $]0, 1[$ par $z_n = \dfrac{v'_n}{u'_n}$.

IV.1. Convergence des suites des fonctions u'_n et v'_n.

On note K un compact de $]0, 1[$.

IV.1.1. Démontrer que $y_n \geqslant 1$ et que la suite de fonctions (y_n) converge uniformément vers 1 sur K.

IV.1.2. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{cases} y_{n+1} = \dfrac{1 + y_n}{2\sqrt{y_n}} \\[2ex] z_{n+1} = \dfrac{1 + y_n z_n}{(1 + z_n)\sqrt{y_n}}. \end{cases}$$

Tournez la page S.V.P.

IV.1.3. Démontrer que $z_n \geqslant 1$. En déduire que $u'_n \leqslant v'_n$ et que la suite de fonctions (u'_n) est croissante.

IV.1.4. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $y_{n+1} \leqslant z_{n+1} \leqslant \sqrt{y_n} \leqslant y_n$.
En déduire que la suite de fonctions (z_n) converge uniformément vers 1 sur K.

IV.1.5. Démontrer que $v'_{n+1}(x) \leqslant v'_n(x)$ si $(\sqrt{y_n(x)} - 1)^2 \leqslant \dfrac{z_n(x) - 1}{z_n(x)}$ et que cette dernière inégalité est satisfaite à partir d'un rang n_0 indépendant de x dans K. En déduire que, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $u'_n \leqslant u'_{n+1} \leqslant v'_{n+1} \leqslant v'_n$ sur K et que les suites (u'_n) et (v'_n) convergent uniformément sur K.

IV.2. Construction d'une suite (π_n) convergeant vers π.

IV.2.1. Démontrer que $\pi = 2\sqrt{2} \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{v_n^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) u_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{u'_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$.

IV.2.2. En déduire que π est limite de la suite (π_n) définie par $\pi_0 = 2 + \sqrt{2}$ et, pour tout $n \geqslant 1$, par :

$$\pi_n = \pi_{n-1} \frac{1 + y_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{1 + z_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

IV.3. Rapidité de convergence de la suite (π_n).

IV.3.1. Démontrer que $0 \leqslant y_{n+1} - 1 \leqslant \dfrac{1}{8}(y_n - 1)^2$. En déduire que :

$$0 \leqslant y_{n+1} - 1 \leqslant \frac{(y_1 - 1)^{2^n}}{8^{2^n - 1}}$$

et qu'on a donc :

$$0 \leqslant y_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1 \leqslant 8\,(500)^{-2^n}.$$

IV.3.2. Démontrer que :

$$0 \leqslant \pi_p - \pi_{p+1} \leqslant \frac{\pi_p}{2}\left(z_{p+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - y_{p+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \leqslant \frac{\pi_0}{2}\left(y_p\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - y_{p+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

En déduire que :

$$0 \leqslant \pi_{n+1} - \pi = \sum_{i=1}^{+\infty} (\pi_{n+i} - \pi_{n+i+1}) \leqslant \frac{\pi_0}{2}\left(y_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1\right) \leqslant 4\pi_0\,(500)^{-2^n}$$

IV.3.3. Évaluer n pour que l'erreur commise en remplaçant π par π_{n+1} soit inférieure à $10^{-1\,000\,000}$.

CAPES externe 1995 de Mathématiques première composition

solution proposée par Antoine Delcroix

IUFM de Guadeloupe, Morne Ferret,
BP399, Pointe-à-Pitre cedex 97159,
dany-jack.mercier@univ-ag.fr

NB : Le sujet de l'épreuve n'est pas joint à ce document. Il pourra être téléchargé au format pdf sur le site http://perso.wanadoo.fr/megamaths/

[0]version du 9 novembre 2002

IUFM ANTILLES GUYANE
PLC1 - Mathématiques

CAPES EXTERNE 1995-PREMIERE EPREUVE

Une proposition de CORRIGE

I. LA MOYENNE ARITHMETICO-GEOMETRIQUE

I.1. Convergence des suites (a_n) et (b_n).

I.1.1. Par construction, les suites (a_n) et (b_n) sont clairement à termes positifs. Pour tout $n \geq 0$, on a

$$2a_{n+1} - 2b_{n+1} = a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n} = \left(\overline{a_n} - \sqrt{b_n} \right)^2 \geq 0.$$

D'où, en particulier, l'équivalence

$$n \quad \mathbb{N} \quad a_{n+1} - b_{n+1} = 0 \qquad a_n = b_n$$

Lorsque $a_0 = a = b = b_0$, une récurrence immédiate montre alors que, pour tout $n \quad \mathbb{N}^*$, $b_n < a_n$. Pour $a = b$, on en déduit

$$n \quad \mathbb{N}^* \qquad b_n = \sqrt{b_n^2} \leq \sqrt{a_n b_n} = b_{n+1} < a_{n+1} = (1 \ \ 2)(a_n + b_n) < a_n \tag{1}$$

Comme $-b_{n+1} \leq -b_n$, pour $n \geq 1$, il vient

$$n \quad \mathbb{N}^* \qquad a_{n+1} - b_{n+1} = (a_n + b_n) \ \ 2 - b_{n+1} \leq (a_n + b_n) \ \ 2 - b_n \leq (a_n - b_n) \ \ 2$$

Remarques.
1. l'inégalité est large comme le montre le contre-exemple $a > 0$ et $b = 0$, où la suite (b_n) est nulle et la suite (a_n) vérifie $a_{n+1} = (1 \ \ 2)a_n$.
2. On a, pour tout $n \quad \mathbb{N}$, l'inégalité $a_{n+1} - b_{n+1} \leq (1 \ \ 2) \ \ a_n - b_n$.

Notons enfin que si $a = b$ les suites (a_n) et (b_n) sont constantes, comme relevé ci-dessus.

I.1.2. Les suites (a_n) et (b_n) sont *adjacentes* c'est-à-dire que (a_n) est décroissante, (b_n) croissante et que l'on a les deux propriétés

$$n \quad \mathbb{N}^* \qquad b_n \leq a_n \qquad \lim_{n} \ (a_n - b_n) = 0$$

La dernière propriété résulte de l'inégalité

$$n \quad \mathbb{N} \qquad 0 \leq a_n - b_n \leq (1 \ \ 2)^n \ \ a - b \tag{2}$$

établie par récurrence (attention à la valeur absolue !).
Les suites (a_n) et (b_n) sont donc convergentes et convergent vers la même limite. On a de plus

$$n \quad \mathbb{N}^* \qquad b_n \leq M(a \ \ b) \leq a_n \tag{3}$$

Remarque : autre méthode.- On peut redémontrer le résultat sur les suites adjacentes dans ce cas particulier : on remarque que (a_n) est décroissante et minorée par b_1 donc convergente (de limite $a \quad$) et que (b_n) est croissante et majorée par a_1 donc convergente (de limite $b \quad$). L'inégalité $a_{n+1} - b_{n+1} \leq (1 \ \ 2)(a_n - b_n)$ entraine alors, par prolongement, $a \quad - b \quad \leq (1 \ \ 2)(a \quad - b \quad)$ d'où $a \quad = b$

I.2. Propriétés des moyennes arithmético-géométrique

A. Une suite convergente (c_n) possède la même limite que toute suite obtenue à partir de (c_n) en supprimant un nombre fini de termes : ceci entraine, pour tout entier n, l'égalité $M(a_n \ \ b_n) = M(a \ \ b)$.
B. Les suites relatives aux couples $(a \ \ b)$ et au couple $(b \ \ a)$ ne diffèrent que par leur premier terme, ce que montre la relation de récurrence entre a_{n+1} (*resp.* b_{n+1}) et a_n (*resp.* b_n) symétrique en a_n et b_n. D'où l'égalité $M(a \ \ b) = M(a \ \ b)$.
C. Pour tout réel $\lambda \geq 0$, la suite relative au couple $(\lambda a \ \ \lambda b)$ s'obtient en multipliant par λ les termes de la suite relative au couple $(a \ \ b)$. D'où l'égalité $M(\lambda a \ \ \lambda b) = \lambda M(a \ \ b)$. On a donc en particulier, pour $a > 0 \quad M(a \ \ b) = aM(1 \ \ b \ \ a) = af(b \ \ a)$

I.3. Continuité de la fonction f

I.3.1. On raisonne par récurrence. Par définition

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad u_0(x) = 1 \quad v_0(x) = x$$

Les fonctions u_0 et v_0 sont donc continues. Supposons que, pour $n \geq 0$, u_n et v_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$. Comme la somme (*resp.* le produit) de deux fonctions continues sont continues et que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, les fonctions $u_{n+1} = (1/2)(u_n + v_n)$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$.

I.3.2. L'inégalité (2) entraine immédiatement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leq u_n(x) - v_n(x) \leq (1/2)^n \left|u_0(x) - v_0(x)\right| = (1/2)^n \left|1 - x\right| \tag{4}$$

La double inégalité (3), appliquée pour $a = x$ et $b = 1$, entraine $0 \leq u_n - f \leq u_n - v_n$. On dispose donc de la majoration

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leq u_n(x) - f(x) \leq (1/2)^n \left|1 - x\right|$$

I.3.3. Soit A un réel strictement positif. La majoration précédente entraine

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [0, A] \quad 0 \leq u_n(x) - f(x) \leq (1/2)^n (1 + A)$$

La suite (u_n) converge donc uniformément vers la fonction f sur l'intervalle $[0, A]$. Comme chaque fonction (u_n) est continue sur $\mathbb{R}_+$, il en résulte que f est continue sur $[0, A]$. Comme A est quelconque, la fonction f est continue sur la réunion $\bigcup_{A \in \mathbb{R}_+^*} [0, A]$ qui est égale à $\mathbb{R}_+$.

I.4. Etude de la fonction f au voisinage de 1

L'inégalité (3), appliquée pour $n = 1$, donne

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \sqrt{x} \leq f(x) \leq (1/2)(1 + x) \tag{5}$$

On remarque ensuite que $f(1) = M(1, 1) = 1$. D'où,

$$\forall x \in]1, +\infty[\quad (\sqrt{x} - 1)/(x - 1) \leq (f(x) - 1)/(x - 1) \leq 1/2$$
$$\forall x \in]0, 1[\quad (\sqrt{x} - 1)/(x - 1) \geq (f(x) - 1)/(x - 1) \geq 1/2$$

Comme $(\sqrt{x} - 1)/(x - 1) = 1/(\sqrt{x} + 1)$, il vient

$$\lim_{x \to 1^-} (f(x) - 1)/(x - 1) = 1/2 = \lim_{x \to 1^+} (f(x) - 1)/(x - 1)$$

D'où la dérivabilité de f en 1 et $f'(1) = 1/2$.

I.5. Etude aux bornes de la fonction f

I.5.1. On a $f(0) = M(1, 0) = 0$, d'après une remarque ci-dessus (*cf* I.1.1.). On a, selon l'inégalité (5), pour tout $x > 0$, l'inégalité $1/\sqrt{x} \leq f(x)/x$. Ceci entraine que $\lim_{x \to 0^+} f(x)/x = +\infty$: la fonction f n'est donc pas dérivable à droite en 0 et le graphe de f possède une tangente verticale au point $(0, 0)$.

I.5.2. On a pour tout $x > 0$, $f(x) = M(1, x) = xM(1/x, 1) = xM(1, 1/x) = xf(1/x)$, en utilisant les propriétés de la moyenne arithmético-géométrique démontrées en I.2.

I.5.3. On a, pour tout $x > 0$, $f(x)/x = f(1/x)$, d'après le I.5.2.. Comme f est continue en 0 à droite, on a $\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$ d'où l'on déduit par composition de limites

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)/x = \lim_{x \to +\infty} f(1/x) = \lim_{y \to 0^+} f(y) = 0$$

Le graphe de f présente donc une branche parabolique dans la direction Ox.

I.6. Sens de variation de la fonction f

De nouveau, on procède par récurrence : les fonctions u_0 et v_0 sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$. Supposons que, pour $n \geq 0$, u_n et v_n sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$. Comme la somme de deux fonctions croissantes, le produit de deux fonctions *positives* et croissantes sont croissantes et que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, les fonctions $u_{n+1} = (1/2)(u_n + v_n)$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$. On a alors, pour

tout couple de réels $(x\ \ y)$ tels que $x < y$ et pour tout $n \quad \mathbb{N}^*$ l'inégalité $v_n(x) \leq v_n(y)$. L'inégalité se prolonge et donne $f(x) \leq f(y)$.

Remarque.- On vient donc de redémontrer qu'une fonction f, limite simple d'une suite de fonctions croissantes (*resp.* décroissante), est croissante (*resp.* décroissante).

I.7. Représentation graphique de la fonction f

I.7.1. Pour calculer les valeurs décimales par défaut à 10^{-5} près $\widetilde{y}$ de $f(x)$, on réalise un programme calculant a_n et b_n avec comme valeurs initiales $a = 1$ et $b = x$ et comme test d'arrêt $a_n - b_n < 10^{-6}$. Alors d'une part $f(x) \quad]b_n\ \ a_n\ [$ et d'autre part la troncature $\widetilde{y}$ de b_n à la cinquième décimale est le nombre cherché puisque $a_n - \widetilde{y} < 10^{-5}$, comme le montre la majoration

$$f(x) - \widetilde{y} \leq a_n - b_n + b_n - \widetilde{y} < 10^{-6} + 9\ 10^{-6}$$

Un algorithme possible est le suivant (la variable b recueille le résultat final) :

Initialiser $a := 1$ et $b := x$;
Tant que $a - b \geq 10^{-6}$ faire
  $Temp1 := (1\ \ 2)(a + b)$; $Temp2 := \quad \overline{ab}$;
  $a := Temp1$; $b := Temp2$;
Tronquer b à la cinquième décimale;
Afficher b.

Remarque.- De la relation $\quad x > 0,\ f(x) = xf(1\ \ x)$, il vient, en particulier

$$f(10^{-1}) = 10^{-1}f(10) \qquad f(10^{-2}) = 10^{-2}f(10^2)$$

Une valeur approchée de $f(10^{-1})$ (*resp.* $f(10^{-2})$) à 10^{-5} près s'obtient donc en divisant par 10 (*resp.* 100) une valeur approchée de $f(10)$ (*resp.* $f(100)$) à 10^{-5} près. Attention, il est faux à l'inverse qu'en multipliant par 10 une valeur approchée de $f(10^{-1})$ à 10^{-5} près, on obtient une valeur approchée de $f(10^{-1})$ à 10^{-5} près !

Les calculs donnent le tableau de valeurs suivant

$x =$	0 01	0 1	0 2	0 4	0 6	0 8	2	3	10	100
$\widetilde{y} =$	0 26216	0 42504	0 52080	0 66579	0 78724	0 89721	1 45679	1 86361	4 25040	26 21668

I.7.2. On dispose des éléments suivants pour tracer le graphe Γ de f. L'inégalité (5) montre que Γ est compris entre la courbe S d'équation $y = \quad \overline{x}\ (x \geq 0)$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = (x+1)\ \ 2\ (x \geq 0)$. De plus, selon le I.4. la droite $\mathcal{D}$ est la tangente à Γ au point $(1\ \ 1)$; la droite $\mathcal{D}$ est aussi la tangente à $\mathcal{S}$ au même point. Enfin, la courbe Γ est tangente à l'axe $0y$ au point $(0\ \ 0)$ et admet une branche parabolique dans la direction Ox.

II EXPRESSION DE $M(a\ \ b)$ PAR UNE INTEGRALE ELLIPTIQUE

II.1. Convergence et propriétés des intégrales $I(a\ \ b)$ et $J(a\ \ b)$

II.1.1. La fonction $\Phi_{a\ b} : t \quad 1\ \ \sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C $\quad$ sur $\mathbb{R}$, car les réels a et b sont strictement positifs. Cette fonction est de plus paire et l'on a $\Phi_{a\ b}(t) = \bigcirc(1\ \ t^2)$, en $+ \quad$. Les intégales $I(a\ \ b)$ et $J(a\ \ b)$ sont alors convergentes et de plus

$$\int_0^{+} \quad \Phi_{a\ b}(t)\mathrm{d}t = \int_{-}^{0} \quad \Phi_{a\ b}(t)\mathrm{d}t$$

d'où l'égalité $J(a\ \ b) = 2I(a\ \ b)$.

II.1.2. La fonction $T_b : \theta \qquad b\tan\theta$ est un C $\ $-difféomorphisme de $] - \pi\ \ 2\ \ \pi\ \ 2[$ dans $\mathbb{R}$ L'existence de l'intégrale $\int_0^{\pi\ \ 2} \Phi_{a\ b}(T_b(\theta))T_b(\theta)\mathrm{d}\theta$ en découle, avec les égalités

$$I(a\ \ b) = \int_0^{\pi\ \ 2} \frac{b^2(1 + \tan^2\theta)\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(b^2\tan^2\theta + a^2)(b^2\tan^2\theta + b^2)}} = \int_0^{\pi\ \ 2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(b^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta)}} \tag{6}$$

Cette dernière intégrale est btenue par simplification puis par multiplication des numérateur et dénominateur de l'expression sous le signe intégral par $\cos^2\theta$: ceci est possible, puisque $\cos^2\theta$ est strictement

positif sur $[0 \quad \pi \quad 2[$.

On déduit en particulier que $\quad x \quad \mathbb{R}_+^* \quad g(x) = \int_0^{\pi \quad 2} 1 \quad \sqrt{(\cos^2\theta + x^2 \sin^2\theta} \mathrm{d}\theta$.

La fonction $\Psi : (\theta \quad x) \quad 1 \quad \sqrt{(\cos^2\theta + x^2\sin^2\theta}$ est clairement de classe C^1 sur $[0 \quad \pi \quad 2] \times \mathbb{R}_+^*$. L'intervalle d'intégration étant compact, la fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

II.1.3. Soient a, b et λ trois réels strictement positifs. Comme l'expression définissant $I(a \quad b)$ est symétrique en a et b, on a $I(a \quad b) = I(b \quad a)$. L'expression obtenue en II.1.2 pour $I(a \quad b)$ montre que $I(\lambda a \quad \lambda b) = (1 \quad \lambda)I(a \quad b)$. Enfin, $I(a \quad b) = aI(1 \quad b \quad a) = ag(b \quad a)$.

II.2. Expression de $M(a \quad b)$ en fonction de $I(a \quad b)$

II.2.1. La fonction $S : t \quad (1 \quad 2)(t - ab \quad t)$ est de classe C^1 sur $]0 \; + \quad [$ avec $S \; (t) = (1 \quad 2)(1 + ab \quad t^2)$. Comme S est strictement positive sur $]0 \; + \quad [$, S est strictement croissante sur $]0 \; + \quad [$. La fonction S est donc un C^1-difféomorphisme de $]0 \; + \quad [$ sur $S(]0 \; + \quad [) =] - \quad + \quad [$. Pour tout $(\alpha \quad \beta) \quad (\mathbb{R}_+^*)^2$, l'intégrale $\int_0^{+} \quad \Phi_{\alpha \; \beta}(S(t))S \; (t)\mathrm{d}t$ est donc convergente, et égale à $J(\alpha \quad \beta) = \int_-^{+} \quad \Phi_{\alpha \; \beta}(s))\mathrm{d}s$. On a, pour tout $(a \quad b) \quad (\mathbb{R}_+^*)^2$, les égalités

$$J(\frac{a+b}{2} \quad \overline{ab}) = \int_-^{+} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(4s^2 + (a+b)^2)(s^2+ab)}} = \int_0^{+} \frac{2(t^2+ab)\mathrm{d}t}{\sqrt{((t^2-ab)^2 + t^2(a+b)^2)((t^2-ab)^2 + 4t^2ab)}}$$

Or $(t^2 - ab)^2 + t^2(a+b)^2 = (t^2+a^2)(t^2+b^2)$ et $(t^2-ab)^2 + 4t^2ab = (t^2+ab)^2$. D'où, en remplacant

$$J(\frac{a+b}{2} \quad \overline{ab}) = \int_0^{+} \frac{2}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}\mathrm{d}t = 2I(a \quad b)$$

Comme $J(\frac{a+b}{2} \quad \overline{ab}) = 2I((\frac{a+b}{2} \quad \overline{ab}))$ d'après le II.1.1., on a, pour tout $(a \quad b) \quad (\mathbb{R}_+^*)^2$, $I(\frac{a+b}{2} \quad \overline{ab}) = I(a \quad b)$. Par une récurrence facile, il vient enfin, pour tout $n \geq 0$, $I(a_n \quad b_n) = I(a \quad b)$.

II.2.2. On a, d'après le II.1.3., $I(a_n \quad b_n) = (1 \quad a_n)g(b_n \quad a_n)$. Or $\lim_n a_n = \lim_n b_n = M(a \quad b)$ et l'application g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$: il vient $\lim_n I(a_n \quad b_n) = (1 \quad M(a \quad b))g(1)$. Avec $I(a \quad b) = I(a_n \quad b_n)$ et $g(1) = \int_0^{\pi \quad 2} \mathrm{d}\theta = \pi \quad 2$, on obtient

$$I(a \quad b) = \pi \quad (2M(a \quad b)).$$

Comme, pour tout $x \quad \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = M(1 \quad x)$ et $g(x) = I(1 \quad x)$ est strictement positif, il vient $f(x) = \pi \quad (2g(x))$. La fonction g étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, il en est de même de f.

II.3. Comportement asymptotique des fonctions f et g

II.3.1. L'application $s \quad x \quad s$ est un C^1-difféomorphisme décroissant de $]0 \quad \overline{x}[$ dans $] \quad \overline{x} \; + \quad [$. Ceci permet d'effectuer ce changement de variable dans la première intégrale ci-dessous et d'obtenir l'égalité

$$\int_0^{\overline{x}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+x^2)}} = -\int_{+}^{\overline{x}} \frac{x\mathrm{d}s}{\sqrt{(x^2+s^2)(x^2+x^2s^2)}} = \int_{\overline{x}}^{+} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(x^2+s^2)(s^2+1)}}$$

On en déduit immédiatement que $g(x) = I(1 \quad x) = \int_0^{+} \quad \Phi_{x \; 1}(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^{\overline{x}} \Phi_{x \; 1}(t)\mathrm{d}t$.

II.3.2. On a pour tout $x > 0$

$$h(x) - g(x) = \int_0^{\overline{x}} \frac{2}{\sqrt{(t^2+x^2}}(1 - \frac{1}{t^2+1})\mathrm{d}t$$

Or, pour tout $t \quad [0 \quad \overline{x}]$, on a $1 \quad \overline{x+1} \leq 1 \quad \overline{t^2+1} \leq 1$. D'où, pour tout $x \quad \mathbb{R}_+^*$

$$0 \leq h(x) - g(x) \leq \int_0^{\overline{x}} \frac{2}{t^2+x^2}(1 - \frac{1}{x+1})\mathrm{d}t = h(x)\left(1 - 1 \quad \overline{x+1}\right)$$

Comme $\lim_{x \quad 0+}\left(1 - 1 \quad \overline{x+1}\right) = 0$, on a bien $h - g = \mathrm{o}(h)$, en zéro à droite. D'où l'équivalence $g \sim h$ en zéro à droite.

II.3.3. On a, pour tout $x > 0$ $h(x) = \int_0^{\overline{x}} 2 \quad \overline{t^2 + x^2}\mathrm{d}t = \int_0^{1} {}^{\overline{x}} 2 \quad \overline{t^2 + 1}\mathrm{d}t$. D'où

$$x \quad \mathbb{R}_+^* \qquad h(x) = \Big[2\ln(t + \sqrt{t^2+1})\Big]_0^{1 \quad \overline{x}} = -\ln x + 2\ln(1 + \quad \overline{1+x})$$

On obtient facilement $\lim_{x \quad 0+} h(x) \ (-\ln x) = 1$ D'où l'équivalence $h(x) \sim -\ln x$ en zéro, à droite. Donc, par transitivité de l'équivalence, $g(x) \sim -\ln x$ en zéro à droite.

II.3.4. Avec l'égalité $f(x) = \pi \ (2g(x))$, pour tout $x > 0$, établie en II.2.2., il vient en appliquant directement II.3.3.

$$f(x) \sim -\pi \ (2\ln x) \ \text{ (en zéro, à droite).}$$

On en déduit $f(1 \ x) \sim \pi \ (2\ln x)$ en $+ \quad$. Comme, pour tout $x > 0$, $f(x) = xf(1 \ x)$ il vient enfin l'équivalence

$$f(x) \sim (\pi \ 2)(x \ \ \ln x) \quad \text{ en} +$$

III EXPRESSION DE π EN FONCTION DE f ET f

Pour $x \quad]0 \ 1[$, on a $v_0(x) = x < u_0(x) = 1$. Puis, pour $n \geq 1$, d'après la question I.1.1., on a $0 \leq v_n(x) < u_n(x)$, pour tout $x \quad]0 \ 1[$. Ceci justifie l'existence de w_n et l'inégalité

$$x \quad]0 \ 1[\quad w_n(x) > 0$$

Comme par ailleurs, pour tout $n \quad \mathbb{N}$ et tout $x \quad]0 \ 1[$, on a $0 < u_n(x)$, l'existence de k_n est assurée.

III.1. Convergence de la suite des fonctions k_n

III.1.1. Rappelons les relations de récurrence définissant les suites (u_n) et (v_n)

$$u_{n+1} = (1 \ 2)(u_n + v_n) \qquad v_{n+1} = \quad \overline{u_n v_n} \tag{7}$$

On a pour tout $n \geq 0$ $w_{n+1}^2 = u_{n+1}^2 - v_{n+1}^2 = \frac{1}{4}(u_n^2 + v_n^2) - \frac{1}{2}u_n v_n = \frac{1}{4}(u_n - v_n)^2$ D'où

$$n \quad \mathbb{N} \quad w_{n+1} = (1 \ 2)(u_n - v_n) \tag{8}$$

Remarquons que, pour tout $n \geq 0$ $w_n^2 = u_n^2 - v_n^2 = (u_n - v_n)(u_n + v_n) = 4w_{n+1}u_{n+1}$. On obtient finalement en combinant les relations 7 et 8

$$n \quad \mathbb{N} \quad w_n = 2 \quad \overline{w_{n+1}u_{n+1}} \qquad u_{n+1} + w_{n+1} = u_n$$

On a alors, pour tout $n \geq 0$

$$M(u_n \ \ w_n) = M(u_{n+1} + w_{n+1} \ \ 2 \quad \overline{w_{n+1}u_{n+1}}) = 2M(\frac{u_{n+1} + w_{n+1}}{2} \quad \overline{w_{n+1}u_{n+1}}) = 2M(u_{n+1} \ \ w_{n+1})$$

en raison des propriétés algébriques de la moyenne arithmético-géométrique.

Une récurrence immédiate montre alors que, pour tout $n \geq 0$, on a $2^n M(u_n \ \ w_n) = M(u_0 \ \ w_0)$. Or $u_0 = 1$ et, pour tout $x \quad]0 \ 1[$, $w_0(x) = \quad \overline{1 - x^2}$. D'où

$$n \quad \mathbb{N} \quad x \quad]0 \ 1[\ \ 2^n M(u_n(x) \ \ w_n(x)) = M(1 \ \ \sqrt{1-x^2}) = f(\sqrt{1-x^2})$$

III.1.2. Puisque pour tout $n \geq 0$, u_n est à valeurs strictement positives, il vient

$$n \quad \mathbb{N} \quad M(u_n \ \ w_n) = u_n M(1 \ \ w_n \ \ u_n) = u_n f(w_n \ \ u_n)$$

D'où, pour tout $x \quad]0 \ 1[$ et tout $n \quad \mathbb{N}$, $2^n f(w_n(x) \ \ u_n(x)) = \big(f(\quad \overline{1-x^2})\big) \ \ u_n(x)$. Comme la suite (u_n) converge vers la fonction f qui est à valeurs strictement positives sur $]0 \ 1[$ (car minorée par v_0 : $x \quad x$) on obtient l'existence de $\lim_n \quad 2^n f(w_n(x) \ \ u_n(x))$ et l'égalité $\lim_n \quad 2^n f(w_n(x) \ \ u_n(x)) = \big(f(\quad \overline{1-x^2})\big) \ \ f(x)$

III.1.3. On a, pour tout $n \quad \mathbb{N}$, $w_n \ \ u_n = \sqrt{1 - (v_n \ \ u_n)^2}$. Comme les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite f, il vient, pour tout $x \quad]0 \ 1[$, $\lim_n \quad w_n(x) \ \ u_n(x) = 0$.

Puisque $f(x) \sim -\pi \ \ (2\ln x)$ en zéro, on a, pour tout $x \ \ ]0\ \ 1[$, les équivalences suivantes pour n tendant vers

$$2^n f(w_n(x) \ \ u_n(x)) \sim -2^{n-1}\pi \ \ \ln((w_n(x) \ \ u_n(x)) \sim -\pi \ \ (2k_n(x)).$$

On en déduit, grâce au III.1.2., que

$$x \ \ ]0\ \ 1[\quad \lim_{n} \ k_n(x) = (\pi f(x)) \Big/ \Big(2f(\sqrt{1-x^2})\Big)$$

III.2. Convergence de la suite de fonctions dérivées k_n

III.2.1. On va procéder par récurrence, comme aux questions I.3. et I.4. Notons r_c la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ définie par $r_c(x) = \ \ \overline{x}$. Cette fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. On rappelle aussi que l'on a

$$x \ \ ]0\ \ 1[\qquad n \quad \mathbb{N} \quad 0 < v_n(x) < u_n(x) \tag{9}$$

A. Comme, pour tout $x \ \ ]0\ \ 1[$, $u_0(x) = 1$ et $v_0(x) = x$, les fonctions u_0 et v_0 sont de classe C^1. Supposons que, pour $n \geq 0$, u_n et v_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$. Comme la somme (*resp.* le produit) de deux fonctions de classe C^1 est de classe C^1 et que la fonction r_c est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, les fonctions $u_{n+1} = (1\ \ 2)(u_n + v_n)$ et $v_{n+1} = r_c \circ (u_n v_n)$ sont de classe C^1 sur $]0\ \ 1[$. On utilise, en particulier, le fait que u_{n+1} et v_{n+1} sont à valeurs strictement positives.

B. Notons que

$$x \ \ ]0\ \ 1[\quad u_1(x) = (1\ \ 2)(1+x) \quad v_1(x) = \ \ \overline{x}$$

Pour tout $x \ \ ]0\ \ 1[$, on a donc $u_1(x) = 1\ \ 2 > 0$ et $v_1(x) = 1\ \ (2\ \ \overline{x}) > 0$: les fonctions u_1 et v_1 sont positives et ne s'annulent pas sur $]0\ \ 1[$. On note alors que

$$n \quad \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = (1\ \ 2)(u_n + v_n) \qquad v_{n+1} = r_c(u_n v_n)(u_n v_n + u_n v_n)$$

Une récurrence analogue à celle qui précède permet alors de conclure que pour tout $n \geq 1$ u_n et v_n sont positives et ne s'annulent pas sur $]0\ \ 1[$.

C. Soit $n \quad \mathbb{N}$. Etant donné les inégalités (9), la fonction $u_n^2 - v_n^2$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $w_n = r_c \circ (u_n^2 - v_n^2)$ est de classe C^1 sur $]0\ \ 1[$ et à valeurs strictement positives. Comme $k_n = \ln \circ (u_n \ \ w_n)$ la fonction $k_n$est de classe C^1 sur $]0\ \ 1[$, comme composée de fonctions de classe C^1.

III.2.2. Soit $n \quad \mathbb{N}$. On a les égalités

$$k_{n+1} = 2^{-n-1}(u_{n+1} \ \ u_{n+1} - w_{n+1} \ \ w_{n+1}) = 2^{-n-1}\frac{u_{n+1}w_{n+1} - w_{n+1}u_{n+1}}{u_{n+1}w_{n+1}}$$

En notant que $w_{n+1} = (u_n - v_n) \ \ 2$, $u_{n+1} = (u_n + v_n) \ \ 2$ et $w_n = \ \ \overline{u_{n+1}w_{n+1}}$, il vient, après simplification

$$k_{n+1} = 2^{-n}(v_n u_n - u_n v_n) \ \ w_n^2$$

Puisque $w_{n+1}^2 = v_n u_n$, on obtient finalement

$$k_{n+1} \ \ v_{n+1}^2 = \frac{1}{2^n w_n^2}(\frac{v_n}{v_n} - \frac{u_n}{u_n}) \tag{10}$$

Par ailleurs, de $k_n = 2^{-n}(u_n \ \ u_n - w_n \ \ w_n)$, on tire l'égalité

$$k_n \ \ v_n^2 = \frac{1}{2^n w_n^2}(\frac{w_n^2 u_n}{v_n^2 u_n} - \frac{w_n w_n}{v_n^2})$$

Comme $w_n^2 = u_n^2 - v_n^2$, il vient $w_n w_n = u_n u_n - v_n v_n$ et les égalités

$$k_n \ \ v_n^2 = \frac{1}{2^n w_n^2}((\frac{u_n^2}{v_n^2} - 1)\frac{u_n}{u_n} - \frac{u_n u_n - v_n v_n}{v_n^2}) = \frac{1}{2^n w_n^2}(\frac{v_n}{v_n} - \frac{u_n}{u_n}) \tag{11}$$

D'où le résultat, par comparaison des égalités (10) et (11).

III.2.3. Soit $x \ \ ]0\ \ 1[$ et $B(x)$ la valeur indépendante de n de $k_n(x) \ \ v_n^2(x)$. On a en particulier

$$x \ \ ]0\ \ 1[\quad B(x) = k_0(x) \ \ v_0^2(x) = (\frac{d}{dx}(-\ln\sqrt{1-x^2})) \ \ x^2 = 1 \ \ (x(1-x^2))$$

On en déduit que, pour tout $x \quad]0\ 1[$, $k_n(x) = v_n^2(x)\ \ (x(1-x^2))$.

III.2.4. Soit K un compact de $]0\ 1[$. Définissons sur $]0\ 1[$, la suite de fonctions (c_n) par

$$n \quad \mathbb{N} \quad c_n(x) = f^2(x)\ \ (x(1-x^2)) - k_n(x) = [(f^2(x) - v_n^2(x)]\ \ (x(1-x^2))$$

Comme la suite (v_n) est croissante et formée de fonctions positives, on a clairement $c_n \geq 0$. La fonction $x \quad 1\ \ (x(1-x^2))$ étant continue sur $]0\ 1[$, elle est bornée sur le compact K : notons M_K sa borne supérieure sur K. On a

$$n \quad \mathbb{N} \quad x \quad K \qquad 0 \leq c_n(x) \leq M_K[(f^2(x) - v_n^2(x)]$$

Or, $f^2(x) - v_n^2(x) \leq u_n^2(x) - v_n^2(x) \leq (u_n(x) - v_n(x))(u_n(x) + v_n(x)) \leq 2u_n(x)(u_n(x) - v_n(x))$, selon les propriétés montrées en I.1.1. En utilisant encore les propriétés de (u_n) et (v_n), il vient

$$n \quad \mathbb{N} \quad x \quad K \ \ 0 \leq c_n(x) \leq 2M_K u_0(x)\frac{1}{2^n}\ \ u_0(x) - v_0(x)\ \ \leq 2^{-n+1}M_K$$

Il en résulte la convergence uniforme de la suite (c_n) vers 0 sur K : la suite (k_n) converge donc uniformément sur tout compact de $]0\ 1[$ vers la fonction $x \quad f^2(x)\ \ (x(1-x^2)$.

III.3. Une expression de π

Pour cette question III.3., notons ψ la fonction définie sur $]0\ 1[$ par $\psi(x) = \pi f(x)\ \ \big(2f(\ \overline{1-x^2})\big)$

III.3.1. Soit $[\alpha\ \beta]$ un intervalle inclus dans $]0\ 1[$. D'après le III.1.3., la suite (k_n) converge simplement vers la fonction ψ sur $[\alpha\ \beta]$. D'après le III.2.3., la suite (k_n) converge uniformément sur $[\alpha\ \beta]$ vers la fonction $x \quad f^2(x)\ \ (x(1-x^2))$. Il en résulte que ψ est dérivable sur $]\alpha\ \beta[$ et de dérivée la fonction précédente. Comme ce résultat est vrai sur tout intervalle $]\alpha\ \beta[$ inclus dans $]0\ 1[$, ψ est dérivable sur $]0\ 1[$ et de dérivée $x \quad f^2(x)\ \ (x(1-x^2))$.

Remarque. Le texte ne précisant pas sur quel ensemble montrer l'assertion, c'est au candidat de voir que le contexte demande de travailler sur l'intervalle $]0\ 1[$.

III.3.2. Soit $x \quad]0\ 1[$. Un calcul direct donne

$$\psi\ (x) = (\pi\ \ 2)\left(\frac{f\ (x)}{f(\ \overline{1-x^2})} + \frac{f(x)f\ (\ \overline{1-x^2})}{(f(\ \overline{1-x^2}))^2}\frac{x}{\overline{1-x^2}}\right)$$

Le choix de $x = 1\ \ \overline{2}$ (racine de l'équation $x = \ \ \overline{1-x^2}$) donne $\psi\ (1\ \ \overline{2}) = \pi f\ (1\ \ \overline{2})f(1\ \ \overline{2})$. Comme d'autre part $\psi\ (x) = f^2(x)\ \ (x(1-x^2))$, on a $\psi\ (1\ \ \overline{2}) = 2\ \ \overline{2}f^2(1\ \ \overline{2})$. On obtient donc bien

$$\pi = 2\ \ \overline{2}f^3(1\ \ \overline{2})\ \ f(1\ \ \overline{2})$$

IV APPROXIMATION DE π

Dans cette partie, pour toute fonction bornée sur K, nous noterons par $\quad_K$ le nombre $\sup_{x\ \ K}\ \ (x)$. Remarquons aussi que les suites $(y_n)_{n\geq 1}$ et $(z_n)_{n\geq 1}$ sont bien définies puisque, pour tout $x \quad]0\ 1[$ et tout $n \quad \mathbb{N}^*$, on a $v_n(x) > 0$ et $u_n(x) > 0$, d'après le III.2.1..

IV.1. Convergence des suites des fonctions u_n et v_n

IV.1.1. On a, pour tout $x \quad]0\ 1[$ et tout $n \quad \mathbb{N}^*$, $u_n(x) \geq v_n(x)$ d'où la première assertion ; les majorations suivantes découlent des propriétés démontrées en I.1.1.

$$0 \leq y_n(x) - 1 = \frac{1}{v_n(x)}(u_n(x) - v_n(x)) \leq \frac{1}{v_0(x)}(u_n(x) - v_n(x)) \leq 2^{-n}(1\ \ v_0(x)) \leq 2^{-n}\ \ 1\ \ v_0\ \ _K$$

puisqu'en effet, la fonction $x \quad 1\ \ v_0(x)$ est continue et donc bornée sur le compact K. On déduit immédia- tement de la majoration précédente la convergence uniforme de la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ vers 1 sur K.

IV.1.2. On a, pour tout $n \quad \mathbb{N}^*$,

$$y_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{u_n + v_n}{2\ \ \overline{u_n v_n}} = \frac{u_n\ \ v_n + 1}{2\sqrt{u_n\ \ v_n}} = \frac{1 + y_n}{2\ \ \overline{y_n}}$$

Par ailleurs, on a $v_{n+1} = (1\ \ 2)(u_n v_n + u_n v_n) \quad \overline{u_n v_n} = (1\ \ 2)(u_n\sqrt{v_n\ \ u_n} + v_n\sqrt{u_n\ \ v_n})$. D'où

$$z_{n+1} = \frac{u_n \quad \overline{y_n} + v_n \quad \overline{y_n}}{(u_n + v_n)} = \frac{1 \quad \overline{y_n} + z_n \quad \overline{y_n}}{(1+z_n)} = \frac{1 + z_n y_n}{(1+z_n) \quad \overline{y_n}}$$

IV.1.3. *A.* Démontrons par récurrence la propriété $z_n \geq 1$. Selon des calculs effectués dans le III.2.1. on a, pour tout $x \quad]0\ \ 1[$, $u_1(x) = 1\ \ 2$ et $v_1(x) = 1\ \ (2\ \ \overline{x})$ d'où

$$x \quad]0\ \ 1[\qquad v_1(x)\ \ u_1(x) = 1 \quad \overline{x} > 1$$

On a ensuite, pour tout $n \geq 1$, les équivalences

$$z_{n+1} = \frac{1 + z_n y_n}{(1+z_n) \quad \overline{y_n}} \geq 1 \qquad 1 + z_n y_n \geq (1+z_n) \quad \overline{y_n} \qquad z_n \quad \overline{y_n}(\quad \overline{y_n} - 1) \geq \quad \overline{y_n} - 1$$

Or $\quad \overline{y_n} \geq 1$, d'après le IV.1.1. Sous l'hypothèse de récurrence $z_n \geq 1$, l'inégalité $z_n \quad \overline{y_n}(\quad \overline{y_n} - 1) \geq \quad \overline{y_n} - 1$ est vraie et donc $z_{n+1} \geq 1$ aussi. La récurrence aboutit.
B. Comme, pour tout $n \quad \mathbb{N}^*$, $z_n = v_n\ \ u_n$, on a immédiatement $u_n \leq v_n$. D'où

$$n \quad \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = (1\ \ 2)(u_n + v_n) \geq u_n$$

La suite (u_n) est donc croissante.

IV.1.4. *A.* En utilisant le IV.1.2., on a pour tout $n \geq 1$,

$$y_{n+1} \leq z_{n+1} \qquad \frac{1 + y_n}{2} \leq \frac{1 + y_n z_n}{1 + z_n} \qquad (1+y_n)(1+z_n) \leq 2(1 + y_n z_n) \qquad y_n - 1 \leq z_n(y_n - 1)$$

Or $y_n \geq 1$ et $z_n \geq 1$, donc $y_{n+1} \leq z_{n+1}$. Puis, en utilisant de nouveau $y_n \geq 1$ (et donc $\quad \overline{y_n} \geq 1$),

$$z_{n+1} = \frac{1 + y_n z_n}{(1+z_n) \quad \overline{y_n}} \leq \frac{y_n + y_n z_n}{(1+z_n) \quad \overline{y_n}} \leq \quad \overline{y_n} \leq y_n.$$

B. On en déduit, pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq y_{n+1} - 1 \leq z_{n+1} - 1 \leq y_n - 1$$

D'où $\quad z_{n+1} - 1 \quad _K \quad \leq \quad y_n - 1 \quad _K$. Comme la suite (y_n) converge uniformément vers 1 sur K (d'après le IV.1.1.) il en est de même de la suite (z_n).

IV.1.5. *A.* On a, pour tout $n \geq 1$, les égalités

$$v_{n+1} = u_{n+1} z_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)\frac{1 + y_n z_n}{(1+z_n) \quad \overline{y_n}}$$

Comme $z_n = v_n\ \ u_n$, il vient facilement $\ v_{n+1}\ \ v_n = \frac{1}{2}(1 + y_n z_n)\ \ (z_n \quad \overline{y_n})$. On a donc l'équivalance

$$x \quad]0\ \ 1[\quad v_{n+1}(x)\ \ v_n(x) \leq 1 \qquad 1 + y_n(x) z_n(x) \leq 2 z_n(x)\sqrt{y_n(x)} \tag{12}$$

Par ailleurs, un calcul simple montre l'équivalence

$$x \quad]0\ \ 1[\quad (\sqrt{y_n(x)} - 1)^2 \leq \frac{z_n(x) - 1}{z_n(x)} \qquad 1 + y_n(x) z_n(x) \leq 2 z_n(x)\sqrt{y_n(x)}. \tag{13}$$

La comparaison des expressions (12) et (13) montre donc que l'implication demandée est vraie

$$x \quad]0\ \ 1[\quad (\sqrt{y_n(x)} - 1)^2 \leq \frac{z_n(x) - 1}{z_n(x)} \qquad v_{n+1}(x)\ \ v_n(x) \leq 1.$$

B. Des inégalités $1 \leq \quad \overline{y_n} \leq y_n$ (vraie pour tout $n \geq 1$) et $y_n \leq z_n$ (vraie pour tout $n \geq 2$, *cf* IV.1.4.), il vient pour tout $n \geq 2$ la double inégalité

$$0 \leq \quad \overline{y_n} - 1 \leq z_n - 1 \tag{14}$$

C. Comme la suite (z_n) converge uniformément vers 1 sur K, la double inégalité précédente entraine la convergence uniforme de la suite $\overline{y_n}$ vers 1 sur K par valeurs supérieures, selon un raisonnement analogue à celui effectué en IV.1.4.. Il existe alors un entier $n_0 \geq 2$ tel que les inégalités suivantes soient satisafaites, pour tout $n \geq n_0$

$$x \quad K \qquad 1 \leq z_n(x) \leq 3 \ \ 2 \qquad 0 \leq \sqrt{y_n(x)} - 1 \leq 1 \ \ 2$$

Il en résulte, pour tout $x \quad K$ et tout $n \geq n_0$, l'inégalité $z_n(x)(\sqrt{y_n(x)} - 1) < 1$. On en déduit

$$x \quad K \qquad n \geq n_0 \quad z_n(x)(\sqrt{y_n(x)} - 1)^2 \leq \sqrt{y_n(x)} - 1 \leq z_n(x) - 1$$

en raison de la double inégalité (14).

D. Les résultats du *A.* et du *C.* entrainent, pour tout $x \quad K$ et tout $n \geq n_0$, l'inégalité $v_{n+1}(x) \leq v_n(x)$. Comme d'après le IV.1.3., la suite de fonctions (u_n) est croissante et que $u_n \leq v_n$, on obtient finalement

$$x \quad K \qquad n \geq n_0 \qquad u_n(x) \leq u_{n+1}(x) \leq v_{n+1}(x) \leq v_n(x).$$

E. Soit $x \quad K$. Comme selon *D.* la suite $(u_n(x))$ (*resp.* $(v_n(x))$) est croissante et majorée (*resp.* décroissante à partir d'un certain rang et minorée), les suites numériques $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ sont convergentes. Comme de plus la suite de fonctions (z_n) converge vers 1, les deux suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ convergent vers la même limite.

On en déduit la convergence simple (sur K) des suites de fonctions (u_n) et (v_n) vers une fonction w définie sur K. On a de plus (propriété des suites adjacentes)

$$x \quad K \qquad n \geq n_0 \qquad u_n(x) \leq w(x) \leq v_n(x).$$

En utilisant de nouveau *D.*, on obtient, pour tout $n \geq n_0$

$$x \quad K \qquad 0 \leq w(x) - u_n(x) \leq v_n(x) - u_n(x) \leq v_n(x)(z_n(x) - 1) \ \ z_n(x) \leq v_{n_0}(x)(z_n(x) - 1)$$

puisque la suite de fonctions v_n est décroissante sur K à partir du rang n_0 et que $z_n \geq 1$, pour tout $n \geq 1$. La fonction v_{n_0} étant continue (*cf* III.2.1.), elle est bornée sur K. On a donc

$$x \quad K \qquad 0 \leq w(x) - u_n(x) \leq \left\|v_{n_0}\right\|_K \quad (z_n(x) - 1)$$

Comme la suite de fonctions (z_n) converge vers 1, uniformément sur K, l'inégalité précédente entraine la convergence uniforme sur K de la suite de fonctions (u_n). On procède de façon analogue pour la suite (u_n) en remarquant que sur K et pour $n \geq n_0$ on a $0 \leq v_n - w \leq v_n - u_n$.

Remarques.

1. Selon le IV.1.3., la suite u_n est croissante et majorée et selon *D.* la suite v_n décroissante à partir d'un certain rang et minorée sur K : on en déduit la convergence simple sur K des deux suites de fonctions. Mais de plus, d'après le premier théorème de Dini, toute suite *monotone* de fonctions définies sur un *compact,* simplement convergente, est uniformément convergente. Ceci donne un argument sophistiqué et rapide pour conclure cette question.

2. Soit $[\alpha \ \beta]$ un intervalle non trivial inclus dans $]0 \ 1[$. Sur $[\alpha \ \beta]$, les suites (u_n) et (v_n) convergent vers f et les suites (u_n) et (v_n) convergent uniformément : la fonction f est donc de classe C^1 sur $[\alpha \ \beta]$ (résultat déja connu : *cf* II.2.2.). De plus les suites (u_n) et (v_n) convergent vers f sur K, puisque selon le théorème utilisé $\lim_n \quad u_{n\ [\alpha\ \beta]} = (f_{\ [\alpha\ \beta]}) = f_{\ [\alpha\ \beta]}$. Par l'argument usuel, les suites (u_n) et (v_n) convergent vers f sur $]0 \ 1[$. C'est le seul résultat dont on a besoin dans la suite.

IV.2. Construction d'une suite (π_n) convergeant vers π

IV.2.1. On a, d'après le III.3.2., l'égalité $\pi = 2 \ \ \overline{2} f^3(1 \quad \overline{2}) \ \ f(1 \quad \overline{2})$. Selon les rappels et la remarque effectuée à la fin du IV.1.5., les suites (u_n) et (v_n) convergent vers f et la suite (u_n) vers f sur l'intervalle $]0 \ 1[$. il en résulte en particulier

$$\pi = 2 \ \ \overline{2} \lim_n \ v_n^2(1 \quad \overline{2}) u_n(1 \quad \overline{2}) \ \ u_n(1 \quad \overline{2}).$$

IV.2.2. Posons pour cette seule question $s_n = v_n^2 u_n \ \ u_n$, pour tout entier $n \geq 1$. La suite $(2 \ \ \overline{2} s_n(1 \quad \overline{2}))$ converge vers π. Notons encore que $s_1(1 \quad \overline{2}) = (1 + \quad \overline{2}) \ \ 2$, puisque $u_1(x) = (1 + x) \ \ 2$, $u_1(x) = 1 \ \ 2$ et

$v_1(x) = \sqrt{x}$.
Ecrivons, pour tout entier $n \geq 1$, $s_{n+1} = c_n s_n$ où c_n est une fonction à déterminer. On a

$$c_n = \frac{u_n}{v_n^2 u_n} \ \frac{v_{n+1}^2 u_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{u_n v_n u_n(u_n + v_n)}{v_n^2 u_n(u_n + v_n)} = \frac{1 + u_n \ v_n}{1 + v_n \ u_n} = \frac{1 + y_n}{1 + z_n}.$$

On pose alors, pour $n \geq 0$, $\pi_n = 2 \ \sqrt{2} s_{n+1}(1 \ \ \sqrt{2})$. On constate que $\pi_0 = 2 + \sqrt{2}$, que la suite (π_n) converge vers π et qu'elle vérifie la relation de récurrence

$$n \geq 1 \qquad \pi_n = \frac{1 + y_n}{1 + z_n} \pi_{n-1}.$$

IV.3. Rapidité de convergence de la suite (π_n)
IV.3.1. *A.* On a, pour tout $n \geq 1$, $y_{n+1} = (1 + y_n) \ (2 \ \sqrt{y_n})$, selon le IV.1.2.. D'où la relation

$$y_{n+1} - 1 = (\sqrt{y_n} - 1)^2 \ (2 \ \sqrt{y_n})$$

Comme, pour tout $n \geq 1$, $y_n \geq 1$ (*cf* IV.1.1.), il suffit de comparer $(x - 1)^2 \ (2x)$ et $(1 \ 8)(x^2 - 1)^2$ pour $x \geq 1$. Or, pour tout $x \geq 1$,

$$(x - 1)^2 \ (2x) \leq (1 \ 8)(x^2 - 1)^2 \qquad 1 \ (2x) \leq (1 \ 8)(x + 1)^2 \qquad 1 \leq (1 \ 4)(x + 1)^2 \qquad 1 \leq x$$

(la première équivalence, d'ailleurs inutile, se vérifie par simplification pour $x > 1$ et par le calcul pour $x = 1$).
On en déduit de ce raisonnement et du IV.1.1. déja cité

$$0 \leq y_{n+1} - 1 \leq (1 \ 8)(y_n - 1)^2 \tag{15}$$

B. Le résultat étant donné, il est commode de faire une récurrence. Pour $n = 1$, on a, en utilisant l'inégalité (15), $y_2 - 1 \leq (1 \ 8)(y_1 - 1)^2$. Supposons donc, que pour $n \geq 1$, on ait

$$0 \leq y_{n+1} - 1 \leq (1 \ 8^{2^n - 1})(y_1 - 1)^{2^n}$$

On a alors, en utilisant de nouveau l'inégalité (15),

$$0 \leq y_{n+2} - 1 \leq (1 \ 8)(y_{n+1} - 1)^2 \leq (1 \ 8)(1 \ 8^{2^n - 1})^2 \left((y_1 - 1)^{2^n}\right)^2 = (1 \ 8^{2^{n+1} - 1})(y_1 - 1)^{2^{n+1}}$$

Ce qui achève la récurrence.
C. On a, pour tout $x \ \ ]0 \ 1[$, $y_1(x) = (1 + x) \ (2 \ \sqrt{x})$ et donc $y_1(x) - 1 = (\sqrt{x} - 1)^2 \ (2 \ \sqrt{x})$. Pour $x_0 = 1 \ \ \sqrt{2}$, on utilise l'inégalité $0 \ 707 \leq x_0$ (qui entraine $0 \ 84 \leq \sqrt{x_0}$) pour obtenir le résultat demandé. En effet, on a les implications

$$0 \ 707 \leq x_0 \qquad \left\{ \begin{array}{l} (1 - \sqrt{x_0})^2 \leq 16\,10^{-4} \\ 1 \ (2 \ \sqrt{x_0}) \leq 1 \ \ 1 \ 68 \leq 10 \ \ 16 \end{array} \right\} \qquad y_1(x_0) - 1 \leq 16\,10^{-3}$$

On en déduit que, pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq y_{n+1}(x_0) - 1 \leq (1 \ 8^{2^n - 1})(y_1(x_0) - 1)^{2^n} = 8\left((y_1(x_0) - 1) \ 8\right)^{2^n} \leq 8\left(2 \ 10^{-3}\right)^{2^n} = 8\,(500)^{-2^n} \tag{16}$$

IV.3.2. *A.* On a, pour tout $x \ \ ]0 \ 1[$, $y_1(x) = (1 + x) \ (2 \ \sqrt{x})$ et $z_1(x) = 1 \ \ \sqrt{x}$. D'où $y_1(x) \leq z_1(x)$, pour tout $x \ \ ]0 \ 1[$. D'après le IV.1.4 on a, pour tout $n \geq 2$, l'inégalité $y_n \leq z_n$. D'où, pour tout $n \geq 1$, l'inégalité $1 + y_n \leq 1 + z_n$ et d'après l'expression de π_n (*cf* IV.2.2.) l'inégalité $\pi_n \leq \pi_{n-1}$. On justifie ainsi la relation $\ p \ \ \mathbb{N} \ \ 0 \leq \pi_p - \pi_{p+1}$. La suite (z_p) est décroissante.
B. On a, en notant $1 \ \ \sqrt{2} = x_0$

$$\pi_p - \pi_{p+1} = \pi_p \frac{z_{p+1}(x_0) - y_{p+1}(x_0)}{1 + z_{p+1}(x_0)} \leq \frac{\pi_p}{2}(z_{p+1}(x_0) - y_{p+1}(x_0)) \leq \frac{\pi_0}{2}(z_{p+1}(x_0) - y_{p+1}(x_0))$$

car d'une part $z_{p+1} \geq 1$, pour tout $p \geq 0$ (*cf* IV.1.3.), et d'autre part la suite (π_p) est décroissante. Comme, pour $p \geq 1$, on a $y_{p+1} \leq z_{p+1}$ (*cf* IV.1.4.), on obtient finalement

$$p \ \ \mathbb{N} \ \ 0 \leq \pi_p - \pi_{p+1} \leq \frac{\pi_0}{2}(y_p(x_0) - y_{p+1}(x_0)) \tag{17}$$

C. Soit n un entier quelconque. La série de terme général $\mu_p = \pi_{p+n} - \pi_{p+1+n}$ (*resp.* $\nu_p = y_{p+n}(x_0) - y_{p+1+n}(x_0)$) est convergente, avec

$$\sum_{i=1}^{+} \mu_i = \sum_{i=1}^{+} (\pi_{n+i} - \pi_{n+1+i}) = \pi_{n+1} - \pi \quad (\textit{resp.} \ \sum_{i=1}^{+} \nu_i = y_{n+1}(x_0) - 1),$$

puisque la suite (π_p) converge vers π (*resp.* $(y_p(x_0))$ converge vers 1). Avec la majoration (17) des termes généraux de ces séries, et l'inégalité (16), il vient

$$n \quad \mathbb{N} \qquad 0 \leq \pi_{n+1} - \pi \leq \frac{\pi_0}{2}(y_{n+1}(x_0) - 1) \leq 4\pi_0 \, (500)^{-2^n} \tag{18}$$

IV.3.3. Selon le IV.3.2., pour obtenir une erreur inférieure à 10^{-N}, il suffit de prendre un entier n tel que $4\pi_0 \, (500)^{-2^n} < 10^{-N}$. Or

$$4\pi_0 \, (500)^{-2^n} < 10^{-N} \qquad 2^n > \frac{1}{\operatorname{Log} 500}(N + \operatorname{Log}(4\pi_0)) \qquad n > \frac{1}{\operatorname{Log} 2} \operatorname{Log}\left(\frac{1}{\operatorname{Log} 500}(N + \operatorname{Log}(4\pi_0))\right)$$

Pour $N = 1000000$, on obtient $n \geq 19$

Remarque.- Il s'agit donc d'un algorithme dont la convergence est très rapide puisque *quadratique.* De plus, la valeur $h = 1 \;\; 500$, élevée à la puissance 2^n dans l'expression (18) est petite. Passer de n à $n+1$ divise ainsi l'erreur commise pas 25000.

CAPES externe de Mathématiques
session 1995
deuxième composition

Enoncé

http://perso.wanadoo.fr/megamaths

[0] [ag31e]

OBJET ET NOTATIONS DU PROBLÈME

Ce problème a pour objet l'étude de certaines propriétés des matrices symétriques réelles.

L'espace $\mathbf{R}^n$ sera muni de sa structure canonique d'espace euclidien, sa base canonique sera notée $\mathscr{E} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et la norme euclidienne d'un élément x sera notée $\|x\|$. Relativement à une base fixée, un élément x (resp. y, etc.) de $\mathbf{R}^n$ sera représenté par la matrice colonne X (resp. Y, etc.) de ses coordonnées x_i (resp. y_i, etc.). On appellera *plan vectoriel* de $\mathbf{R}^n$ tout sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbf{R}^n$.

À toute matrice symétrique réelle A, de terme général a_{ij}, on associera la forme bilinéaire symétrique Φ_A définie sur l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$, rapporté à sa base canonique $\mathscr{E}$, par

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \quad \Phi_A(x, y) = {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{A}\mathrm{Y} = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} a_{ij}\, x_i\, y_j .$$

On notera Q_A la forme quadratique associée à Φ_A et Σ_A la A-*sphère unité* définie dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$, rapporté à sa base canonique $\mathscr{E}$, par

$$\Sigma_A = \{x \in \mathbf{R}^n \mid Q_A(x) = {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{A}\mathrm{X} = 1\}.$$

Une forme quadratique Q sur un espace euclidien E est dite *définie positive* si et seulement si on a $Q(x) > 0$ pour tout x non nul de E. Dans l'algèbre des matrices carrées réelles à n lignes et n colonnes, on notera $S_n(\mathbf{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et $S_n^+(\mathbf{R})$ le sous-ensemble des matrices symétriques A telles que la forme quadratique Q_A soit définie positive.

I. Caractérisations de $S_n^+(\mathbf{R})$ liées à la A-sphère unité Σ_A

I.1. Premier exemple.

On considère la matrice symétrique réelle $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}$.

I.1.1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A_1.

I.1.2. Donner l'expression d'une matrice orthogonale directe P et d'une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ telles que $\lambda < \mu$ et que ${}^t\mathrm{P}\,A_1\,\mathrm{P} = \mathrm{D}$. En déduire que A_1 appartient à $S_2^+(\mathbf{R})$.

I.1.3. Déterminer la nature de la conique Σ_{A_1} et son excentricité.

I.2. Deuxième exemple.

On considère la matrice symétrique réelle $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$.

Démontrer directement que $Q_{A_2}(x) \geqslant 0$ pour tout x de $\mathbf{R}^2$ mais que A_2 n'appartient pas à $S_2^+(\mathbf{R})$. Déterminer la nature de la conique Σ_{A_2}.

I.3. Caractérisation de $S_n^+(\mathbf{R})$ par la compacité de Σ_A.

Soit A un élément de $S_n(\mathbf{R})$. Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

i. A appartient à $S_n^+(\mathbf{R})$.

ii. Les valeurs propres de A sont toutes strictement positives.

iii. Σ_A est un compact non vide de $\mathbf{R}^n$.

Caractériser en fonction des valeurs propres de A les cas où Σ_A est vide.

I.4. **Caractérisation de $S_n^+(\mathbf{R})$ par les sections planes de Σ_A.**

I.4.1. Soit A un élément de $S_n^+(\mathbf{R})$. Démontrer que la restriction de Q_A à un plan vectoriel Π de $\mathbf{R}^n$ est une forme quadratique définie positive.

I.4.2. Soit A un élément de $S_n(\mathbf{R})$. Démontrer que A appartient à $S_n^+(\mathbf{R})$ si et seulement si tout plan vectoriel de $\mathbf{R}^n$ coupe Σ_A suivant une ellipse.

II. Sections circulaires de la A-sphère unité Σ_A quand $n = 3$

Soit A un élément de $S_3(\mathbf{R})$ et $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$ ses valeurs propres.

II.1. **Cas où A a une valeur propre triple.**

On suppose que A a une seule valeur propre triple : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

Quelle est, suivant le signe de la valeur propre, la nature de Σ_A ? En déduire que ou bien Σ_A est vide, ou bien tout plan vectoriel coupe Σ_A suivant un cercle.

II.2. **Cas où A a une valeur propre double.**

On suppose que A a deux valeurs propres distinctes, une simple et une double : $\lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3$.

II.2.1. Démontrer que Σ_A est invariante par toute rotation d'axe le sous-espace propre Δ relatif à la valeur propre simple.

II.2.2. Démontrer que, si un plan vectoriel Π non perpendiculaire à Δ coupait Σ_A suivant un cercle Γ, alors Σ_A contiendrait la surface obtenue en faisant tourner Γ autour de Δ et que cette surface serait incluse dans une sphère centrée à l'origine. Démontrer que cela est impossible [on pourra étudier la distance de l'origine à un point de Σ_A].

II.2.3. Déterminer, suivant le signe de la valeur propre double, le nombre de plans vectoriels coupant Σ_A suivant un cercle.

II.3. **Cas où A n'a que des valeurs propres simples.**

On suppose que A a trois valeurs propres distinctes : $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

II.3.1. Soit Π_0 le plan vectoriel engendré par les sous-espaces propres relatifs à λ_1 et λ_2. Démontrer que si un plan vectoriel Π coupe Σ_A suivant un cercle, alors la restriction de Q_A à $\Pi \cap \Pi_0$ est une forme quadratique définie positive. En déduire qu'une condition nécessaire pour qu'il existe un plan vectoriel Π coupant Σ_A suivant un cercle est que $\lambda_2 > 0$.

II.3.2. L'espace $\mathbf{R}^3$ étant rapporté à une base orthonormale de vecteurs propres de A, justifier que $\sqrt{\lambda_3 - \lambda_2}\; x_3 - \sqrt{\lambda_2 - \lambda_1}\; x_1 = 0$ est l'équation d'un plan vectoriel Π. En remarquant que

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = \lambda_2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (\lambda_3 - \lambda_2) x_3^2 - (\lambda_2 - \lambda_1) x_1^2,$$

démontrer que, si $\lambda_2 > 0$, le plan Π coupe Σ_A suivant un cercle.

Pour $\lambda_2 > 0$, déterminer un autre plan vectoriel Π', distinct de Π, coupant Σ_A suivant un cercle.

Tournez la page S.V.P.

II.3.3. Étant donné deux plans vectoriels distincts Π et Π', on rapporte $\mathbf{R}^3$ à une base orthonormale (f_1, f_2, f_3) telle que f_2 appartienne à la droite $\Pi \cap \Pi'$ et que f_1 et f_3 appartiennent aux plans bissecteurs de Π et Π'. Démontrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ tel que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ et que $\mathscr{B} = (\alpha f_1 - \beta f_3, f_2)$ (resp. $\mathscr{B}' = (\alpha f_1 + \beta f_3, f_2)$) soit une base orthonormale de Π (resp. Π').

Exprimer $Q_A(s(\alpha f_1 - \beta f_3) + t f_2)$ et $Q_A(s(\alpha f_1 + \beta f_3) + t f_2)$ en fonction des scalaires s, t, α, β et des $u_{ij} = \Phi_A(f_i, f_j)$ avec $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 3$. En déduire une équation de $\Pi \cap \Sigma_A$ (resp. $\Pi' \cap \Sigma_A$) dans la base $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{B}'$).

Démontrer que, si ces intersections sont des cercles, on a $u_{12} = u_{13} = u_{23} = 0$ et $u_{22} = \alpha^2 u_{11} + \beta^2 u_{33}$. En déduire que (f_1, f_2, f_3) est alors une base de vecteurs propres de A et que la valeur propre relative à f_2 est comprise entre celles relatives à f_1 et f_3.

II.3.4. Déduire de ce qui précède qu'il existe exactement deux plans vectoriels distincts coupant Σ_A suivant un cercle lorsque $\lambda_2 > 0$.

II.4. Exemple.

L'espace $\mathbf{R}^3$ est rapporté à sa base canonique. On considère la matrice symétrique réelle

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

II.4.1. Démontrer que, pour tout x de $\mathbf{R}^3$, on a $Q_{A_3}(x) \geqslant 3 \|x\|^2$ [on pourra, après l'avoir justifiée, se servir de l'inégalité $2uv \leqslant u^2 + v^2$]. Quelle est la nature géométrique de l'intersection de Σ_{A_3} avec un plan vectoriel ?

II.4.2. En remarquant que l'équation de Σ_{A_3} peut s'écrire :

$$4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_2(2x_1 - x_2 + 2x_3) = 1,$$

déterminer deux plans vectoriels distincts coupant Σ_{A_3} suivant un cercle. Y en a-t-il d'autres ?

II.4.3. Déterminer, selon les valeurs du nombre réel h, la nature géométrique de l'intersection de Σ_{A_3} avec les plans affines d'équation $x_2 = h$ et $2x_1 - x_2 + 2x_3 = h$.

III. Décomposition de Choleski

III.1. Existence d'une décomposition.

III.1.1. Démontrer qu'une matrice A appartient à $S_n^+(\mathbf{R})$ si et seulement si il existe une matrice inversible M telle que $A = {}^t MM$ [on pourra diagonaliser A pour établir que la condition est nécessaire].

III.1.2. Soit $\mathscr{V} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ la famille des vecteurs-colonnes d'une matrice inversible M. Justifier que $\mathscr{V}$ est une base de $\mathbf{R}^n$. Soit $\mathscr{W} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ la base orthonormale obtenue par application à la base $\mathscr{V}$ du procédé d'orthonormalisation de Schmidt. Démontrer que la matrice de passage T de la base $\mathscr{W}$ à la base $\mathscr{V}$ est triangulaire supérieure.

Soit O la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{E}$ à la base $\mathscr{W}$. Justifier que O est orthogonale et démontrer que $M = OT$.

III.1.3. Déduire de ce qui précède que toute matrice A appartenant à $S_n^+(\mathbf{R})$ peut s'écrire sous la forme ${}^t TT$ avec T une matrice triangulaire supérieure inversible.

III.2. Une application : majoration du déterminant de A.

Soit A un élément de $S_n^+(\mathbf{R})$ et T une matrice triangulaire supérieure telle que $A = {}^tTT$. On note a_{ij} le terme général de A et t_{ij} le terme général de T. Démontrer que $0 < t_{ii}^2 \leqslant a_{ii}$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

En déduire que $0 < \det A \leqslant \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{ii}$. À quelle condition a-t-on $\det A = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{ii}$?

III.3. Algorithme de décomposition.

L'espace $\mathbf{R}^n$ est rapporté à sa base canonique. Soit A un élément de $S_n(\mathbf{R})$ de terme général a_{ij}.

III.3.1. Démontrer qu'il est équivalent de trouver une matrice triangulaire supérieure inversible T telle que $A = {}^tTT$ et de trouver une écriture de la forme quadratique Q_A de la forme :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \quad Q_A(x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{i \leqslant j \leqslant n} t_{ij} x_j \right)^2$$

avec $t_{ii} > 0$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

III.3.2. Pour $n \geqslant 2$ on identifie $\mathbf{R}^n$ avec le produit $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$ et on note $\tilde{x}$ la projection sur $\mathbf{R}^{n-1}$ d'un élément x de $\mathbf{R}^n$. Démontrer que, si $a_{11} > 0$ et si on pose $t_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{\sqrt{a_{11}}}$ pour $j \in \{1, 2, ..., n\}$, il existe une unique matrice $\tilde{A}$ élément de $S_{n-1}(\mathbf{R})$ telle que :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \quad Q_A(x) = \left(\sum_{i \leqslant j \leqslant n} t_{1j} x_j \right)^2 + Q_{\tilde{A}}(\tilde{x}).$$

Démontrer que, si A appartient à $S_n^+(\mathbf{R})$, alors $\tilde{A}$ existe et appartient à $S_{n-1}^+(\mathbf{R})$.

III.3.3. On considère l'algorithme suivant :

Poser $A_1 = A$.

- si $k < n$ et si le terme de la première ligne, première colonne, de A_k est strictement positif, poser $A_{k+1} = \tilde{A}_k$ et recommencer.
- sinon, arrêter.

Démontrer que A appartient à $S_n^+(\mathbf{R})$ si et seulement si l'algorithme s'arrête pour $k = n$ avec l'unique terme de A_n strictement positif. Démontrer qu'on a alors déterminé une décomposition $A = {}^tTT$ avec T triangulaire supérieure inversible.

III.4. Exemple.

Un entier $n \geqslant 1$ et un réel $a > 0$ étant fixés, on applique l'algorithme à la matrice symétrique $A(n; a)$ à n lignes et n colonnes dont le terme général a_{ij} vaut a si $i = j$, vaut 1 si $i = j + 1$ ou $i = j - 1$ et vaut 0 autrement.

III.4.1. Démontrer que, si on parvient à la k-ième itération, quel que soit $x \in \mathbf{R}^n$ on a :

$$Q_{A(n;a)}(x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} \left(u_i x_i + \frac{x_{i+1}}{u_i} \right)^2 + \left(a - \frac{1}{u_k^2} \right) x_{k+1}^2 + a \sum_{k+2 \leqslant i \leqslant n} x_i^2 + 2 \sum_{k+2 \leqslant i \leqslant n} x_{i-1} x_i$$

où les u_i sont définis par $u_1 = \sqrt{a}$ et $u_i = \sqrt{a - \dfrac{1}{u_{i-1}^2}}$ pour $2 \leqslant i \leqslant k$. Démontrer qu'on a $u_1 > u_2 > ... > u_k$.

À quelle condition pourra-t-on faire une $(k + 1)$-ième itération ?

Tournez la page S.V.P.

III.4.2. Démontrer que, si $a \geqslant 2$, la matrice $A(n; a)$ appartient à $S_n^+(\mathbf{R})$ quel que soit n.

III.4.3. Démontrer que, si $a < 2$, il existe un entier naturel $N(a)$ tel que la matrice $A(n; a)$ appartienne à $S_n^+(\mathbf{R})$ si et seulement si $n \leqslant N(a)$. Calculer $N(1)$, $N(\sqrt{2})$, $N(1{,}9)$.

III.4.4. Donner l'expression de la décomposition $A(n; 2) = {}^tTT$ résultant de l'algorithme.

CAPES externe 1995 de Mathématiques 2ème composition

solution proposée par Dany-Jack Mercier

dany-jack.mercier@hotmail.fr

NB : Le sujet de l'épreuve n'est pas joint à ce document. Il pourra être téléchargé au format pdf sur le site MégaMaths (http://megamaths.perso.neuf.fr/).

[0] [ag31] v1.02

Solution de la deuxième composition du CAPES externe 1995

I.1.1 Le polynôme caractéristique de A_1 est $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 5)(\lambda - 1)$, les valeurs propres de A_1 sont 1 et 5. L'espace propre $E(1)$ associé à 1 est la droite d'équation $x + \sqrt{3}y = 0$ dont un vecteur directeur unitaire est $e'_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. $E(5)$ est la droite d'équation $-3x + \sqrt{3}y = 0$ dont un vecteur directeur unitaire est $e'_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

I.1.2 • La matrice de passage $P = P_e^{e'}$ de la base canonique $e = (e_1, e_2)$ vers la base orthonormale $e' = (e'_1, e'_2)$ de vecteurs propres de A_1 est $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$. Elle vérifie $D = P^{-1}A_1P$ où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. P apparaît comme la matrice, dans la base e, d'une application linéaire qui transforme la base orthonormale e en la base orthonormale e', donc d'une application orthogonale. Donc P est une matrice orthogonale, directe car $\det P = 1$. Ainsi $P^{-1} = {}^tP$ et $D = {}^tPA_1P$.

Remarque : P est la matrice de la rotation d'angle $-\pi/6$ dans $\mathbb{R}^2$ orienté par la base e.

• La forme forme bilinéaire symétrique Φ_{A_1} s'exprime très simplement dans la base e' . En effet, si l'on note X et Y (resp. $X' = {}^t(x'_1, x'_2)$ et $Y' = {}^t(y'_1, y'_2)$) les vecteur-colonnes de x et y dans la base e (resp. e'),

$$\Phi_{A_1}(x, y) = {}^tXA_1Y = {}^t(PX')\,A_1\,(PY') = {}^tX'DY' = x'_1y'_1 + 5x'_2y'_2$$

d'où $Q_{A_1}(x) = x_1'^2 + 5x_2'^2$ et $Q_{A_1}(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$. Cela prouve que Q_{A_1} est définie positive.

I.1.3 L'équation de $\sum_{A_1}$ dans e' est $x_1'^2 + 5x_2'^2 = 1$. On reconnaît l'équation d'une ellipse d'excentricité $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ où $a = 1$ et $b = \frac{1}{\sqrt{5}}$. D'où $e = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

I.2 • $Q_{A_2}(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 4\sqrt{2}x_1x_2 = (\sqrt{2}x_1 + 2x_2)^2 \geq 0$ pour tout x, mais $Q_{A_2}(-\sqrt{2}, 1) = 0$ de sorte que $A_2 \notin S_2^+(\mathbb{R})$.

• La courbe $\sum_{A_1}$ admet l'équation $(\sqrt{2}x_1 + 2x_2)^2 = 1$, soit $\sqrt{2}x_1 + 2x_2 = \pm 1$. $\sum_{A_1}$ est donc la réunion de deux droites parallèles.

I.3 Toute matrice symétrique réelle A est diagonalisable dans une base orthonormale Cela signifie qu'il existe une base orthonormale formée de vecteurs propres de A dans laquelle :

$$\Phi_A(x, y) = \lambda_1 x_1 y_1 + ... + \lambda_n x_n y_n$$

où $\lambda_1, ..., \lambda_n$ représentent les valeurs propres de A, éventuellement confondues. Dans cette base, une équation de $\sum_A$ sera

$$\sum\nolimits_A : \quad \lambda_1 x_1^2 + ... + \lambda_n x_n^2 = 1. \qquad (*)$$

• $i) \Rightarrow ii)$ Supposons que Q_A soit définie positive. Si $x = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, le 1 étant à la j-ième place, alors $Q_A(x) = \lambda_j > 0$, d'où $ii)$.

• $ii) \Rightarrow i)$ Si tous les λ_i sont strictement positifs, alors $Q_A(x) = \lambda_1 x_1^2 + ... + \lambda_n x_n^2$ sera strictement positif pour tout $x \neq 0$ et Q_A sera bien définie positive.

• $ii) \Rightarrow iii)$ Les λ_i étant strictement positifs,

$$x \in \sum\nolimits_A \Leftrightarrow \lambda_1 x_1^2 + ... + \lambda_n x_n^2 = 1 \Rightarrow \forall i \quad \lambda_i x_i^2 \leq 1 \Rightarrow \sup_i |x_i| \leq \sup_i \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \right)$$

et cela prouve que $\sum_A$ est borné. Comme $\sum_A$ est aussi fermé (c'est l'image réciproque de 0 par l'application continue Q_A), ce sera un compact de $\mathbb{R}^n$. Enfin $\sum_A$ n'est pas vide puisque contient $(1/\sqrt{\lambda_1}, 0, ..., 0)$.

• non $ii) \Rightarrow$ non $iii)$ Supposons que les valeurs propres de A ne soient pas toutes strictement positives et envisageons les cas suivants :

⋆ Si tous les λ_i sont ≤ 0, le premier membre de $(*)$ est négatif et ne peut jamais valoir 1. Donc $\sum_A = \emptyset$.

⋆ S'il existe un $\lambda_i > 0$ et un $\lambda_j \leq 0$, par exemple $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 \leq 0$. Alors

$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2, 0, ..., 0) \in \sum\nolimits_A &\Leftrightarrow \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda_1 x_1^2 = 1 - \lambda_2 x_2^2 \\ &\Leftrightarrow x_1 = \pm \sqrt{\tfrac{1 - \lambda_2 x_2^2}{\lambda_1}} \end{aligned}$$

de sorte que les points $(\sqrt{\frac{1-\lambda_2 x_2^2}{\lambda_1}}, x_2, 0, ..., 0)$ appartiennent tous à $\sum_A$, et ceci quel que soit le réel x_2. En faisant tendre x_2 vers $+\infty$, on constate que $\sum_A$ n'est pas borné, et donc n'est pas un compact de $\mathbb{R}^n$.

• On vérifie que $\sum_A = \emptyset$ si et seulement si toutes les valeurs propres λ_i sont négatives ou nulles. En effet, si tous les λ_i sont ≤ 0, le premier membre de $(*)$ est négatif et ne peut jamais valoir 1. Donc $\sum_A = \emptyset$. Par ailleurs, s'il existe un valeur propre strictement positive, par exemple $\lambda_1 > 0$, le point$(1/\sqrt{\lambda_1}, 0, ..., 0)$ appartient à $\sum_A$, et donc $\sum_A \neq \emptyset$.

I.4.1 $\Phi_A|_\Pi$ est encore une forme bilinéaire symétrique, donc $Q_A|_\Pi$ est un forme quadratique de Π. Si $Q_A(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$, on aura à fortiori $Q_A|_\Pi(x) > 0$ pour tout $x \in \Pi \backslash \{0\}$ et $Q_A|_\Pi$ restera définie positive sur Π.

I.4.2 • Si $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ et si Π est un plan vectoriel, Q_A est définie positive, donc $Q_A|_\Pi$ aussi d'après la question précédente, et les deux valeurs propres λ et μ de la matrice B de $Q_A|_\Pi$ dans une base de Π seront strictement positives (cf I.3). Une équation de $\Pi \cap \sum_A$ sera donc $\lambda x_1^2 + \mu x_2^2 = 1$ qui définit une ellipse.

• Réciproquement, si $\Pi \cap \sum_A$ est une ellipse quel que soit le plan Π, travaillons dans une base orthonormale où une équation de $\sum_A$ est $\lambda_1 x_1^2 + ... + \lambda_n x_n^2 = 1$, et interceptons $\sum_A$ par les plans de coordonnées

$$\Pi_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \forall k \in \mathbb{N}_n \backslash \{i,j\} \quad x_k = 0\}.$$

On obtient les coniques d'équations $\lambda_i x_i^2 + \lambda_j x_j^2 = 1$ dans Π_{ij}. Ce sont des ellipses par hypothèse, donc (cf I.3) $\lambda_i > 0$ et $\lambda_j > 0$. Finalement $\lambda_i > 0$ pour tous i et $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ d'après I.3.

II.1 Une équation de $\sum_A$ est $\lambda_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 1$. Si $\lambda_1 > 0$, on reconnaît l'équation de la sphère de centre O et de rayon $1/\sqrt{\lambda_1}$. Si $\lambda_1 \leq 0$, $\sum_A$ est vide.

II.2.1 Nous travaillerons dans la cas où $\lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3$, l'autre cas proposé se traitant de la même façon. Soit $e' = (e_1', e_2', e_3')$ une base orthonormale de vecteurs propres de A telle que le vecteur e_3' dirige Δ. Une rotation r d'axe Δ s'écrit analytiquement

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

dans cette base. On déduit

$$\begin{aligned} (x_1', x_2', x_3') \in \textstyle\sum_A \quad & \Leftrightarrow \lambda_1 \left(x_1'^2 + x_2'^2\right) + \lambda_3 x_3'^2 = 1 \\ & \Leftrightarrow \lambda_1 \left((x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta)^2 + (x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta)^2\right) + \lambda_3 x_3^2 = 1 \\ & \Leftrightarrow \lambda_1 \left(x_1^2 + x_2^2\right) + \lambda_3 x_3^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) \in \textstyle\sum_A \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$x \in \sum\nolimits_A \Leftrightarrow r(x) \in \sum\nolimits_A, \qquad (*)$$

soit, puisque r est bijective, $r(\sum_A) = \sum_A$.

Remarque : On a bel et bien besoin de la bijectivité pour conclure. En effet, $x \in \sum_A \Rightarrow r(x) \in \sum_A$ prouve que $r(\sum_A) \subset \sum_A$. Réciproquement, si $y \in \sum_A$, r étant bijective, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $r(x) = y$, et $(*)$ entraine $x \in \sum_A$ d'où $y \in r(\sum_A)$.

II.2.2 • Si Π non perpendiculaire à Δ coupait $\sum_A$ suivant un cercle Γ, on aurait

$$\Gamma \subset \sum\nolimits_A \Rightarrow r(\Gamma) \subset r\left(\sum\nolimits_A\right) = \sum\nolimits_A$$

pour toute rotation d'axe Δ. Cela montre que la surface de révolution $\widetilde{\Gamma}$ obtenue en faisant tourner Γ autour de Δ est incluse dans $\sum_A$.

• Notons ρ le rayon de Γ. Tout point x de Γ vérifie $\|x\| = \rho$ (en effet, $\sum_A$ et Π admettent l'origine O comme centre de symétrie de sorte que O soit encore centre de symétrie de Γ, ie le centre du cercle Γ). r est une application orthogonale, donc conserve la norme et $\|r(x)\| = \rho$. Ainsi $\widetilde{\Gamma}$ est incluse dans la sphère S de centre O et de rayon ρ.

• On a

$$x=(x_1,x_2,x_3)\in S\cap\sum\nolimits_A \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\lambda_1\left(x_1^2+x_2^2\right)+\lambda_3x_3^2=1\\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=\rho^2\end{array}\right.$$
$$\Rightarrow \lambda_1\left(\rho^2-x_3^2\right)+\lambda_3x_3^2=1$$
$$\Rightarrow (\lambda_3-\lambda_1)\,x_3^2=1-\lambda_1\rho^2$$
$$\Rightarrow x_3^2=\frac{1-\lambda_1\rho^2}{\lambda_3-\lambda_1}$$

et deux cas possibles :

α) Si $\frac{1-\lambda_1\rho^2}{\lambda_3-\lambda_1}<0$, l'ensemble $S\cap\sum_A$ sera vide et $\Gamma\subset S\cap\sum_A$ est absurde,

β) Si $\frac{1-\lambda_1\rho^2}{\lambda_3-\lambda_1}\geq 0$, $S\cap\sum_A$ est inclus dans la réunion des deux plans parallèles (éventuellement confondus) d'équations $x_3=\pm\sqrt{\frac{1-\lambda_1\rho^2}{\lambda_3-\lambda_1}}$. Le cercle Γ est inclus dans cette réunion. Comme Γ est connexe, il est inclus dans l'un de ces plans, donc Π est perpendiculaire à Δ. Absurde.

II.2.3 D'après la question précédente, seuls les plans perpendiculaires à Δ sont susceptibles de couper $\sum_A$ suivant un cercle. Il n'existe qu'un seul plan vectoriel perpendiculaires à Δ, c'est le plan Π_{12} d'équation $x_3=0$. On a

$$\Pi_{12}\cap\sum\nolimits_A:\quad\left\{\begin{array}{l}x_3=0\\ \lambda_1(x_1^2+x_2^2)=1\end{array}\right.$$

⋆ Si $\lambda_1\leq 0$, $\Pi_{12}\cap\sum_A=\emptyset$.
⋆ Si $\lambda_1>0$, $\Pi\cap\sum_A$ est le cercle de Π_{12} de centre O et de rayon $1/\sqrt{\lambda_1}$.

Remarque : On peut vérifier ces résultats avec l'ellipsoïde $x_1^2+x_2^2+2x_3^2=1$ puis l'hyperboloïde à deux nappes $-x_1^2-x_2^2+x_3^2=1$.

II.3.1 • Supposons que $\Pi\cap\sum_A$ soit un cercle. Alors $\Pi\cap\sum_A$ est un compact du plan Π et $Q_A|_\Pi$ est définie positive d'après (I.3). Le même raisonnement qu'en (I.4.1) montre que $Q_A|_{\Pi\cap\Pi_0}$ est définie positive.

• Cela prouve que

$$Q_A|_{\Pi_0}(x)=\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2\quad\text{avec }\lambda_1\text{ ou }\lambda_2\text{ strictement positif.}$$

En effet, $\lambda_1\leq 0$ et $\lambda_2\leq 0$ entraîneraient $Q_A|_{\Pi_0}(x)=\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2\leq 0$ pour tout $x\in\Pi_0$, ce qui contredirait le caratère défini positif de $Q_A|_{\Pi\cap\Pi_0}$.
Si l'on avait $\lambda_2\leq 0$, $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$ entraînerait $\lambda_1<\lambda_2\leq 0$, ce qui est absurde. Donc $\boxed{\lambda_2>0}$.

II.3.2 • L'équation

$$\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}x_3-\sqrt{\lambda_2-\lambda_1}x_1=0$$

est celle d'un plan vectoriel car $\left(\sqrt{\lambda_3-\lambda_2},\sqrt{\lambda_2-\lambda_1}\right)\neq(0,0)$.

• On a

$$x\in\Pi\cap\sum\nolimits_A\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\lambda_3x_3^2=1\\ \sqrt{\lambda_3-\lambda_2}x_3-\sqrt{\lambda_2-\lambda_1}x_1=0\end{array}\right.$$

ce qui, compte tenu de la relation de l'énoncé et de l'identité

$$\left(\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}x_3-\sqrt{\lambda_2-\lambda_1}x_1\right)\left(\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}x_3+\sqrt{\lambda_2-\lambda_1}x_1=\right)=\left(\lambda_3-\lambda_2\right)x_3^2-\left(\lambda_2-\lambda_1\right)x_1^2$$

permet d'écrire

$$x\in\Pi\cap\sum_A\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\lambda_2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)=1\\ \sqrt{\lambda_3-\lambda_2}x_3-\sqrt{\lambda_2-\lambda_1}x_1=0\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow x\in\Gamma$$

où Γ désigne le cercle de Π de centre 0 et de rayon $\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$, si $\lambda_2>0$.

- On recommence comme ci-dessus avec le plan

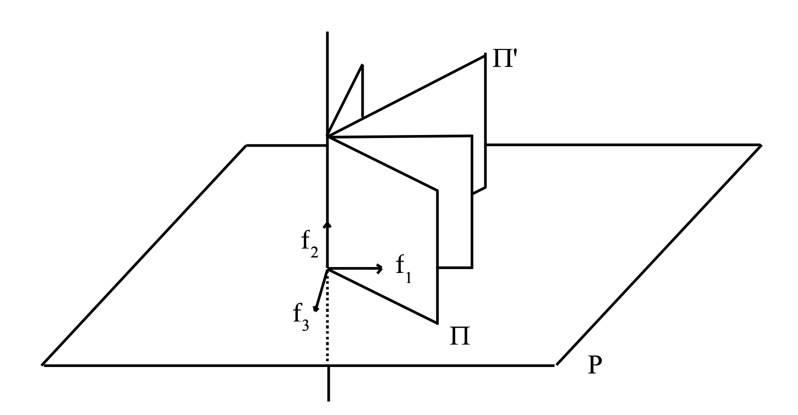
$$\Pi':\quad\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}x_3+\sqrt{\lambda_2-\lambda_1}x_1=0$$

et la même identité. Π' est distinct de Π car

$$\left|\begin{array}{cc}-\sqrt{\lambda_2-\lambda_1}&\sqrt{\lambda_2-\lambda_1}\\ \sqrt{\lambda_3-\lambda_2}&\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}\end{array}\right|=-2\sqrt{\left(\lambda_2-\lambda_1\right)\left(\lambda_3-\lambda_2\right)}\neq0.$$

II.3.3 • Soit P le plan vectoriel orthogonal à $\Pi\cap\Pi'$. On a $P=\mathrm{Vect}\left(f_1,f_3\right)$. Notons u et u' des vecteurs directeurs unitaires respectifs de $P\cap\Pi$ et de $P\cap\Pi'$. Dire que f_1 et f_3 appartiennent aux plans bissecteurs de Π et Π' équivaut à dire que $\mathrm{Vect}\left(f_1\right)$ et $\mathrm{Vect}\left(f_3\right)$ sont les bissectrices des droites $P\cap\Pi$ et de $P\cap\Pi'$, et cela revient à dire que, quitte à changer u en $-u$,

$$\left\{\begin{array}{l}f_1=\frac{u+u'}{\|u+u'\|}\\ f_3=\frac{u-u'}{\|u-u'\|}.\end{array}\right.$$



On obtient

$$\left\{\begin{array}{l}u+u'=\|u+u'\|\,f_1\\ u-u'=\|u-u'\|\,f_3\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}u=\frac{1}{2}\left(\|u+u'\|\,f_1+\|u-u'\|\,f_3\right)\\ u'=\frac{1}{2}\left(\|u+u'\|\,f_1-\|u-u'\|\,f_3\right).\end{array}\right.$$

En posant $\alpha = \frac{1}{2}\|u+u'\|$ et $\beta = -\frac{1}{2}\|u-u'\|$, on trouve

$$\begin{cases} u = \alpha f_1 - \beta f_3 \\ u' = \alpha f_1 + \beta f_3 \end{cases}$$

et l'on a clairement

$$\begin{cases} \alpha \neq 0 \text{ et } \beta \neq 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{4}\left(\|u+u'\|^2 + \|u-u'\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(2\|u\|^2 + 2\|u'\|^2\right) = 1 \\ \mathcal{B} = (u, f_2) = (\alpha f_1 - \beta f_3, f_2) \text{ est une base orthonormale de } \Pi \\ \mathcal{B}' = (u, f_2) = (\alpha f_1 + \beta f_3, f_2) \text{ est une base orthonormale de } \Pi' \end{cases}$$

• Tous calculs faits

$$Q_A(s(\alpha f_1 - \beta f_3) + t f_2) = \left(\alpha^2 u_{11} + \beta^2 u_{33} - 2\alpha\beta u_{13}\right)s^2 + u_{22}t^2 + 2(\alpha u_{12} - \beta u_{23})st$$

de sorte que

$$\Pi \cap \sum\nolimits_A : \quad \left(\alpha^2 u_{11} + \beta^2 u_{33} - 2\alpha\beta u_{13}\right)s^2 + u_{22}t^2 + 2(\alpha u_{12} - \beta u_{23})st = 1. \quad (*)$$

En recommençant de la même manière avec $\mathcal{B}'$, on trouve (changer β en $-\beta$ dans $(*)$)

$$\Pi' \cap \sum\nolimits_A : \quad \left(\alpha^2 u_{11} + \beta^2 u_{33} + 2\alpha\beta u_{13}\right)s^2 + u_{22}t^2 + 2(\alpha u_{12} + \beta u_{23})st = 1.$$

• Si $\Pi \cap \sum_A$ et $\Pi' \cap \sum_A$ sont des cercles,

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{11} + \beta^2 u_{33} - 2\alpha\beta u_{13} = u_{22} = \alpha^2 u_{11} + \beta^2 u_{33} + 2\alpha\beta u_{13} \\ 2(\alpha u_{12} - \beta u_{23}) = 2(\alpha u_{12} + \beta u_{23}) = 0 \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{cases} u_{13} = u_{12} = u_{23} = 0 \\ u_{22} = \alpha^2 u_{11} + \beta^2 u_{33} \end{cases}$$

puisque $\alpha\beta \neq 0$.

Remarque : Montrons que l'équation $ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$ $(*)$ représente un cercle dans un r.o., si, et seulement si, $a=b$ et $c=0$. La condition est clairement suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire : si $(*)$ repésente un cercle, la matrice de la forme quadratique $q(x,y) = ax^2+by^2+cxy$ admet une seule valeur propre double, donc son polynôme caractéristique $\chi(X) = X^2 - (a+b)X + ab - \frac{c^2}{4}$ admet un racine double, ie $\Delta = (a-b)^2 + c^2 = 0$. On trouve bien $a=b$ et $c=0$.

• On vient de prouver que $u_{13} = \Phi_A(f_1, f_3) = 0$, $u_{12} = \Phi_A(f_1, f_2) = 0$ et $u_{23} = \Phi_A(f_2, f_3) = 0$. La matrice de Φ_A dans la base orthonormale (f_1, f_2, f_3) est diagonale car

$$\operatorname{Mat}(\Phi_A; (f_1, f_2, f_3)) = (u_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Cela signifie que (f_1, f_2, f_3) est une base orthogonale de vecteurs propres de A (En effet, si l'on note D la matrice diagonale ci-dessus, D et A représentent la forme bilinéaire symétrique Φ_A

dans des bases orthonormales différentes. Il existe alors une matrice orthogonale P telle que $D = {}^tPAP = P^{-1}AP$, et par conséquent D et A admettent les mêmes valeurs propres et les mêmes sous-espaces propres)

Les valeurs propres de A sont donc indifféremment $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ou u_{11}, u_{22}, u_{33}, et la relation $u_{22} = \alpha^2 u_{11} + \beta^2 u_{33}$ montre que u_{22} est barycentre à coefficients positifs de u_{11} et u_{33} et se situe entre ces deux valeurs. Cela prouve que $u_{22} = \lambda_2$ et que f_2 correspond à la seconde valeur propre λ_2.

II.3.4 Si $\lambda_2 > 0$, (II.3.2) montre l'existence de deux plans distincts Π et Π' coupant $\sum_A$ suivant des cercles. De plus (II.3.3) montre que Π et Π' admettent $\text{Vect}(f_1, f_2)$ et $\text{Vect}(f_2, f_3)$ comme plans bissecteurs. Si s désigne la réflexion par rapport au plan $\text{Vect}(f_1, f_2)$, on obtient alors $s(\Pi) = \Pi'$.

Si Π'' est un plan coupant $\sum_A$ suivant un cercle et si $\Pi'' \neq \Pi$, (II.3.3) appliqué avec les plans Π'' et Π montre que Π'' et Π admettent $\text{Vect}(f_1, f_2)$ et $\text{Vect}(f_2, f_3)$ comme plans bissecteurs. Donc

$$\Pi' = s(\Pi) = \Pi''.$$

Conclusion : si $\lambda_2 > 0$, il existe exactement deux plans coupant $\sum_A$ suivant des cercles.

II.4.1 • L'inégalité $2uv \leq u^2 + v^2$ équivaut à $0 \leq (u - v)^2$. Elle est donc toujours vérifiée. On déduit

$$Q_{A_3}(x) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 \underbrace{-2x_1x_2}_{\geq -x_1^2 - x_2^2} \underbrace{-2x_2x_3}_{\geq -x_2^2 - x_3^2} \geq 3\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) = 3\|x\|^2$$

• L'inégalité ci-dessus montre que $Q_{A_3}(x) > 0$ dès que $x \neq 0$. Q_{A_3} est donc définie positive et les valeurs propres de A_3 seront strictement positives. Par (I.3), $A_3 \in S_n^+(\mathbb{R})$, et (I.4.2) montre que tout plan vectoriel Π intercepte l'ellipsoïde $\sum_A$ suivant une ellipse.

II.4.2 • On a

$$\sum\nolimits_{A_3} : \qquad 4\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) - x_2(2x_1 - x_2 + 2x_3) = 1$$

de sorte que le plan Π (resp. Π') d'éqation $x_2 = 0$ (resp. $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$) coupe $\sum_A$ suivant un cercle. Vérifions le pour le plan Π' :

$$x \in \Pi' \cap \sum\nolimits_{A_3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) = 1 \end{cases}$$

de sorte que $\Pi' \cap \sum_{A_3}$ soit exactement l'intersection du plan Π' passant par O et de la sphère centrée en O et de rayon $1/2$, i.e. un cercle.

• Le polynôme caractéristique de A_3 est

$$\begin{aligned} \chi_{A_3}(X) &= \begin{vmatrix} 4-X & -1 & 0 \\ -1 & 5-X & -1 \\ 0 & -1 & 4-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-X & -1 & 3-X \\ -1 & 5-X & 3-X \\ 0 & -1 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4-X & 0 & 0 \\ -1 & 6-X & 0 \\ 0 & -1 & 3-X \end{vmatrix} = (4-X)(X-3)(X-6). \end{aligned}$$

Q_{A_3} admet trois valeurs propres distinctes : 3, 4 et 6. Comme $4 > 0$, (II.3.4) s'applique et il n'y aura pas d'autres plans vectoriels interceptant $\sum_{A_3}$ suivant un cercle.

II.4.3 • Notons P_h le plan d'équation $x_2 = h$. On a

$$x \in P_h \cap \sum\nolimits_{A_3} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = h & (1) \\ 4x_1^2 + 5h^2 + 4x_3^2 - 2x_1 h - 2hx_3 = 1. & (2) \end{cases}$$

Comme

$$\begin{aligned} (2) \quad & \Leftrightarrow x_1^2 + x_3^2 - \tfrac{h}{2}x_1 - \tfrac{h}{2}x_3 + \tfrac{5}{4}h^2 = \tfrac{1}{4} \\ & \Leftrightarrow \left(x_1 - \tfrac{h}{4}\right)^2 + \left(x_3 - \tfrac{h}{4}\right)^2 - 2\tfrac{h^2}{16} + \tfrac{5}{4}h^2 = \tfrac{1}{4} \\ & \Leftrightarrow \left(x_1 - \tfrac{h}{4}\right)^2 + \left(x_3 - \tfrac{h}{4}\right)^2 = \tfrac{1}{4} - \tfrac{9}{8}h^2 \end{aligned}$$

on déduit

$$x \in P_h \cap \sum\nolimits_{A} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = h \\ \left(x_1 - \tfrac{h}{4}\right)^2 + \left(x_3 - \tfrac{h}{4}\right)^2 = \tfrac{1}{4} - \tfrac{9}{8}h^2. \end{cases}$$

Le système de coordonnées (x_1, x_3) du plan P_h étant orthonormal (car P_h est parallèle au plan x_1Ox_3), la dernière équation montre que $P_h \cap \sum_{A_3}$ est le cercle de centre $\left(\frac{h}{4}, h, \frac{h}{4}\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{9}{8}h^2}$ dès que $\frac{1}{4} - \frac{9}{8}h^2 \geq 0$, i.e. $|h| \leq \frac{\sqrt{2}}{3}$ (Dans le cas contraire, $P_h \cap \sum_{A_3}$ est vide).

• Notons Q_h le plan d'équation $2x_1 - x_2 + 2x_3 = h$.

⋆ **Première méthode** : On cherche une base orthonormale $g = (g_1, g_2, g_3)$ telle que g_1 soit orthogonal à $\overrightarrow{Q_h}$. (g_2, g_3) sera une base orthonormale de la direction $\overrightarrow{P_h}$ de P_h. On trouve par exemple

$$g_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad g_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad g_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Les formules de changement de repère de l'ancien repère (O, x_1, x_2, x_3) vers le nouveau repère (O, g_1, g_2, g_3) sont

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}.$$

Une équation de Q_h dans ce nouveau repère est

$$Q_h \ : \qquad 3X_1 = h.$$

Cherchons les équations cartésiennes de $Q_h \cap \sum_{A_3}$:

$$x \in Q_h \cap \sum\nolimits_{A_3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3X_1 = h \\ 4\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) - x_2 h = 1. \end{cases}$$

On trouve $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$, de sorte que

$$x \in Q_h \cap \sum\nolimits_{A_3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3X_1 = h \\ 4\left(\left(\frac{h}{3}\right)^2 + X_2^2 + X_3^2\right) - h\left(-\frac{1}{3}.\frac{h}{3} + \frac{4}{3\sqrt{2}}X_3\right) = 1. \end{cases}$$

Tous calculs faits, on trouve

$$x \in Q_h \cap \sum_{A_3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3X_1 = h \\ X_2^2 + \left(X_3 - \frac{h}{6\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{h^2}{8}. \end{cases}$$

Comme (X_2, X_3) est un système de coordonnées orthonormal de Q_h, on peut conclure :

- Si $\frac{1}{4} - \frac{h^2}{8} \geq 0$, i.e. $|h| \leq \sqrt{2}$, $Q_h \cap \sum_{A_3}$ est un cercle de Q_h de rayon $\frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{h^2}{2}}$
- Si $|h| > \sqrt{2}$, alors $Q_h \cap \sum_{A_3} = \emptyset$.

$\star$ **Seconde méthode** : plus rapidement,

$$\begin{aligned} x \in Q_h \cap \sum_{A_3} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = h \\ 4\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) - x_2 h = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = h \\ x_1^2 + \left(x_2 - \frac{h}{8}\right)^2 + x_3^2 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{h^2}{16}\right) \qquad (*) \end{cases} \end{aligned}$$

montre que $Q_h \cap \sum_{A_3}$ est aussi l'intersection du plan Q_h et de la sphère S_h d'équation $(*)$. La distance du centre $\Omega(0, \frac{h}{8}, 0)$ de la sphère S_h au plan Q_h est

$$d\left(\Omega, Q_h\right) = \frac{\left|-\frac{h}{8} - h\right|}{\sqrt{2^2 + 1 + 2^2}} = \frac{3}{8}|h|$$

d'où la discussion :

- Si $\frac{3}{8}|h| \leq \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{h^2}{16}}$, i.e. $|h| \leq \sqrt{2}$, $Q_h \cap \sum_{A_3}$ est un cercle,
- Si $|h| > \sqrt{2}$, alors $Q_h \cap \sum_{A_3} = \emptyset$.

III.1.1 • Si $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, A est réelle symétrique donc diagonalisable dans une base orthonormale. Cela signifie qu'il existe une matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ et une matrice orthogonale P telles que $D = P^{-1}AP$. De plus le caractère défini positif de A assure que toutes les valeurs propres λ_i sont strictement positives. Posons $\Delta = \operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n}\right)$. On a $D = \Delta^2$ et

$$A = P\Delta^2 P^{-1} = \left(P\Delta P^{-1}\right)\left(P\Delta P^{-1}\right) = {}^t MM$$

en posant $M = P\Delta P^{-1}$ et en remarquant que M est symétrique. En effet

$${}^t M = {}^t\left(P^{-1}\right).{}^t\Delta.{}^t P = P\Delta P^{-1} = M$$

puisque ${}^t P = P^{-1}$. Enfin, M est clairement inversible comme produit de matrices inversibles.

• Réciproquement, $A \doteq {}^t MM$ sera symétrique car ${}^t\left({}^t MM\right) = {}^t MM$, et définie positive car si X désigne un vecteur-colonne de $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{array}{ll} \forall X & {}^t X\left({}^t MM\right)X = {}^t(MX)(MX) = \|MX\|^2 \geq 0 \Rightarrow A \text{ est positive} \\ \forall X \neq 0 & {}^t X\left({}^t MM\right)X = \|MX\|^2 = 0 \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow X = 0 \text{ (car } M \text{ est inversible)} \end{array}$$

III.1.2 • Si $\sum \alpha_i v_i = 0$, alors $M\,{}^t(\alpha_1,...,\alpha_n) = 0$ et donc $(\alpha_1,...,\alpha_n) = (0,...,0)$ puique M est inversible. Les n vecteurs $v_1,...,v_n$ forment ainsi un système libre de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ de dimension n, donc une base de cet espace.

• Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt permet de construire une base orthonormale $\mathcal{W} = (w_1,...,w_n)$ à partie de la base $\mathcal{V} = (v_1,...,v_n)$ en posant :

$$\begin{cases} w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \\ w_{k+1} = \frac{p_{E_k^\perp}(v_k)}{\left\|p_{E_k^\perp}(v_k)\right\|} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}_{n-1} \end{cases}$$

où E_k désigne l'espace engendré par $v_1,...,v_k$, et $E_k^\perp$ l'orthogonal de cet espace dans $\mathbb{R}^n$.

La base orthonormale obtenue jouit de la propriété remarquable

$$\forall k \qquad \text{Vect}\,(v_1,...,v_k) = \text{Vect}\,(w_1,...,w_k)\,. \qquad (*)$$

Comme la k-ième colonne de la matrice de passage $T = P_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{W}$ vers $\mathcal{V}$ est formée des coordonnées de v_k dans la base $\mathcal{W}$, $(*)$ prouve que T est triangulaire supérieure.

• O est orthogonale car peut être considérée comme la matrice d'un endomorphisme qui transforme la base orthonormale $\mathcal{E}$ en la base orthonormale $\mathcal{W}$.

• **Lemme** : Si e, e', e'' désignent trois base de $\mathbb{R}^n$, si X, X', X'' désignent les vecteur-colonnes formés des coordonnées d'un vecteur x dans chacune de ces bases, et si P_e^f représente la matrice de passage de la base e vers la base f, alors

$$P_e^{e''} = P_e^{e'} P_{e'}^{e''}.$$

Preuve du lemme : $P_e^{e''}$ est l'unique matrice qui exprime les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles ainsi : $X = P_e^{e''} X''$. On a

$$X = P_e^{e'} X' \quad \text{et} \quad X' = P_{e'}^{e''} X'' \quad \Rightarrow X = \left(P_e^{e'} P_{e'}^{e''}\right) X''$$

d'où $P_e^{e''} = P_e^{e'} P_{e'}^{e''}$. ■

Il suffit d'appliquer ce lemme au matrice T, O et M en remarquant que M est la matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{V}$. On obtient

$$P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{V}} = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{W}} P_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} \quad \text{i.e.} \quad M = OT.$$

III.1.3 On trouve $A = {}^tMM = {}^t(OT)\,OT = {}^tT\,{}^tOOT = {}^tTT$ puisque ${}^tO = O^{-1}$ (O étant orthogonale).

III.2 • On a $a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} t_{ki} t_{kj}$. Comme T est triangulaire supérieure, $t_{ij} = 0$ dès que $i > j$ et

$$a_{ii} = \sum_{k=1}^{i} t_{ki}^2 \geq t_{ii}^2. \qquad (*)$$

T étant inversible, on aura $\det T = t_{11}...t_{nn} \neq 0$, donc $t_{ii}^2 > 0$ et les inégalités demandées

$$0 < t_{ii}^2 \leq a_{ii}. \qquad (**)$$

- $\det A = (\det T)^2 = (t_{11}...t_{nn})^2 > 0$ car $\det T \neq 0$, et $\det A = (\det T)^2 = (t_{11}...t_{nn})^2 \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.
- On aura

$$\begin{aligned} \det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} & \Leftrightarrow \forall i \quad (t_{11}...t_{nn})^2 = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \\ & \Leftrightarrow \forall i \quad t_{ii}^2 = a_{ii} \qquad (\text{d'après } (**)) \\ & \Leftrightarrow \forall i \quad \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2 = 0 \qquad (\text{d'après } (*)) \\ & \Leftrightarrow \forall i \quad \forall k < i \quad t_{ki} = 0 \Leftrightarrow T \text{ diagonale} \end{aligned}$$

III.3.1 • Dire que $A = {}^tTT$ équivaut à dire que

$$Q_A(x) = {}^tX\left({}^tTT\right)X = {}^t(TX)\,TX = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{i\leq j\leq n} t_{ij}x_j\right)^2$$

puisque

$$TX = {}^t(b_1, ..., b_n) \qquad \text{avec} \quad b_i = \sum_{i\leq j\leq n} t_{ij}x_j.$$

• Il est toujours possible d'imposer la condition $t_{ii} > 0$, car la matrice T obtenue en III.1 via le procédé de Schmidt vérifie $t_{ii} = 1$.

III.3.2 • La forme quadratique $Q_A(x)$ s'écrit

$$\begin{aligned} Q_A(x) &= \sum_{1\leq i\leq n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j \\ &= a_{11}x_1^2 + 2\left(\sum_{1<j\leq n} a_{1j}x_j\right)x_1 + \sum_{2\leq i\leq n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{2\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j \\ &= a_{11}\left(x_1 + \sum_{1<j\leq n}\frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j\right)^2 - a_{11}\left(\sum_{1<j\leq n}\frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j\right)^2 \\ &\qquad + 2\left(\sum_{1<j\leq n} a_{1j}x_j\right)x_1 + \sum_{2\leq i\leq n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{2\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j \\ &= \left(\sum_{1\leq j\leq n} t_{1j}x_j\right)^2 + Q_{\widetilde{A}}(\widetilde{x}). \end{aligned}$$

• $\widetilde{A} \in S_{n-1}^+(\mathbb{R})$ sinon il existerait un vecteur non nul $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que $Q_{\widetilde{A}}(\widetilde{x}) \leq 0$, et il serait facile de construire un vecteur $x = (x_1, \widetilde{x}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $Q_A(x) < 0$ (en effet, $Q_A(x) \leq 0$ dès que $\left(\sum_{1\leq j\leq n} t_{1j}x_j\right)^2 = 0$, ie dès que $x_1 = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\left(\sum_{2\leq j\leq n} t_{1j}x_j\right)$), ce qui contredit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.

III.3.3 • Si $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, a_{11} n'est pas nul (sinon, $0 < \det A \leq 0$ d'après III.2, absurde) et l'algorithme continue. Le même argument montre que $a_{ii} \neq 0$ à chaque pas. De plus l'unique terme de A_n sera strictement positif puisque $A_n \in S_1^+(\mathbb{R})$.

• Réciproquement, si l'algorithme s'arrête pour $k = n$ avec un dernier terme A_n positif, on peut écrire (cf III.3.2)

$$Q_A(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{i \leq j \leq n} t_{ij} x_j \right)^2 \qquad (*)$$

et clairement $Q_A(x) \geq 0$ et $Q_A(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Donc $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.

• T n'est autre que la matrice des t_{ij} définie par $(*)$ ci-dessus.

III.4.1 •

$$A(n;a) = \begin{pmatrix} a & 1 & & 0 \\ 1 & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & a \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} Q_{A(n;a)}(x) &= ax_1^2 + ... + ax_n^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + ... + 2x_{n-1}x_n \\ &= ax_1^2 + 2x_1x_2 + ax_2^2 + ... + ax_n^2 + 2x_2x_3 + ... + 2x_{n-1}x_n \\ &= \left(\sqrt{a}x_1 + \tfrac{x_2}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(a - \tfrac{1}{a}\right) x_2^2 + ax_3^2 + ... + ax_n^2 + 2x_2x_3 + ... + 2x_{n-1}x_n \end{aligned}$$

ce qui prouve la formule demandée lorsque $k = 1$. Montrons maintenant la formule au rang $k + 1$ sachant qu'elle est vraie au rang k : on a

$$\begin{aligned} Q_{A(n;a)}(x) &= \textstyle\sum_{1 \leq i \leq k} \left(u_i x_i + \frac{x_{i+1}}{u_i}\right)^2 + \left(a - \frac{1}{u_k^2}\right) x_{k+1}^2 + a \sum_{k+2 \leq i \leq n} x_i^2 + 2x_{k+1}x_{k+2} + ... + 2x_{n-1}x_n \\ &= \textstyle\sum_{1 \leq i \leq k} \left(u_i x_i + \frac{x_{i+1}}{u_i}\right)^2 + \left(\sqrt{a - \frac{1}{u_k^2}}\, x_{k+1} + \frac{x_{k+2}}{\sqrt{a - \frac{1}{u_k^2}}}\right)^2 + \left(a - \frac{1}{a - \frac{1}{u_k^2}}\right) x_{k+2}^2 \\ &\quad \textstyle + a \sum_{k+3 \leq i \leq n} x_i^2 + 2x_{k+2}x_{k+3} + ... + 2x_{n-1}x_n \end{aligned}$$

qui est bien de la forme voulue en posant

$$u_{k+1} = \sqrt{a - \frac{1}{u_k^2}}.$$

• Tous les u_k sont définis et positifs puisqu'on est parvenu à la k-ième itération. La fonction $f(x) = \sqrt{a - \frac{1}{x^2}}$ est croissante sur $[\frac{1}{\sqrt{a}}, +\infty[$ et l'on a $u_i = f(u_{i-1})$ pour tout i. Comme $u_1 > u_2$ (en effet, $\sqrt{a} > \sqrt{a - \frac{1}{a}}$ car $a > 0$), on déduit $u_2 = f(u_1) > u_3 = f(u_2)$ et, par récurrence que $u_{i-1} > u_i$ pour tout $2 \leq i \leq k$.

• La $(k+1)$-ième itération sera possible ssi $a - \frac{1}{u_k^2} > 0$.

III.4.2 • $A(n;a) \in S_n^+(\mathbb{R})$ si, et seulement si, l'algorithme du (III.3.3) peut être construit jusqu'à $k = n$ et si le dernier terme correspondant à la dernière forme quadratique obtenue est strictement positif. Cela signifie que

$$\forall k \in \mathbb{N}_{n-1} \qquad u_1, ..., u_k \text{ définis et } a - \frac{1}{u_k^2} > 0 \qquad (*)$$

où $u_{k+1} = f(u_k)$ et en posant $f(x) = \sqrt{a - \frac{1}{x^2}}$. f est paire, définie et strictement croissante sur $[\frac{1}{\sqrt{a}}, +\infty[$ (puisque la composée des deux fonctions décroissantes $\frac{1}{x^2}$ et $a - x$ et de la fonction croissante $\sqrt{x}$).

Si $(u_k)_k$ est définie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et converge vers une limite l, cette limite vérifie

$$f(l) = l \Leftrightarrow \sqrt{a - \frac{1}{l^2}} = l \Leftrightarrow l^4 - al^2 + 1 = 0.$$

Le discriminant de cette équation bicarrée est $\Delta = a^2 - 4$.

Supposons $a \geq 2$. La limite éventuelle de $(u_k)_k$ ne peut être que

$$l = \sqrt{\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}}.$$

On vérifie que pour les deux valeurs possibles de l,

$$u_1 = \sqrt{a} \geq l > \frac{1}{\sqrt{a}}$$

de sorte que $u_2 = f(u_1)$ soit défini et que, f étant croissante,

$$u_1 \geq l \Rightarrow u_2 = f(u_1) \geq f(l) = l > \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Il est alors facile de voir par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad u_1, ..., u_k \text{ sont définis} \quad \text{et} \quad u_k \geq l > \frac{1}{\sqrt{a}} > 0$$

ce qui prouve $(*)$.

Conclusion : si $a \geq 2$, (u_k) est défini et strictement positive pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et l'on a $A(n; a) \in S_n^+(\mathbb{R})$ pour tout n.

III.4.3 • Si $a < 2$, il existe k tel que u_k n'appartienne pas à l'intervalle $[\frac{1}{\sqrt{a}}, +\infty[$ de définition de f sur $\mathbb{R}_+$, i.e tel que u_{k+1} ne soit pas défini. Dans le cas contraire, (u_k) serait définie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, décroissante et bornée par 0, donc convergerait vers une limite finie l racine de $f(l) = l$. C'est absurde car cette équation n'admet aucune solution réelle. (voir III.4.3 c).

Il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$a - \frac{1}{u_k^2} \leq 0$$

et la partie

$$F = \left\{ k \in \mathbb{N}^* / \ u_1, ..., u_k \text{ définis et } a - \frac{1}{u_k^2} > 0 \right\}$$

de $\mathbb{N}$ est finie.

⋆ <u>1er cas</u> : Si $F = \emptyset$, $a - \frac{1}{u_1^2} \leq 0$ donc

$$n = 1 \Leftrightarrow A(n; a) \in S_n^+(\mathbb{R})$$

et $N(a) = 1$.

$\star$ 2ème cas : Si $F \neq \emptyset$, posons

$$K = \max \left\{ k \in \mathbb{N}^* \ / \ u_1, ..., u_k \text{ définis et } a - \frac{1}{u_k^2} > 0 \right\} \qquad \text{et} \qquad N(a) = K + 1.$$

On a

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}_{N(a)-1} \qquad u_1, ..., u_k \text{ définis} \quad \text{et} \quad a - \frac{1}{u_k^2} > 0 \\ u_{N(a)} \text{ soit non défini, soit tel que } a - \frac{1}{u_{N(a)}^2} \leq 0 \end{cases}$$

et d'après $(*)$ de (III.4.2)

$$n \leq N(a) \Leftrightarrow A(n; a) \in S_n^+(\mathbb{R})$$

- Si $a = 1$, $a - \frac{1}{u_1^2} = 0$ et l'on est dans le premier cas : $N(1) = 1$,
- Si $a = \sqrt{2}$,

$$\begin{array}{lll} u_1 = 2^{\frac{1}{4}} & a - \frac{1}{u_1^2} = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0 & \\ u_2 = \sqrt{a - \frac{1}{u_1^2}} = 2^{-\frac{1}{4}} & a - \frac{1}{u_2^2} = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 & \text{Stop} \end{array}$$

on se trouve dans le deuxième cas : $K = 1$ et $N\left(\sqrt{2}\right) = 2$,

- Si $a = 1,9$, le programme suivant donné en basic permet le calcul de $u_1, u_2, ..., u_8$, mais non de u_9 (on trouve $u_8 \simeq 0,703$ et $1,9 - \frac{1}{u_8^2} \simeq -0.123 < 0$), donc $K = 7$ et $N(1,9) = 8$.

Programme en basic :

```
5   u=sqr1.9
10  for k=2 to 12
15  u=sqr(1.9-1/(u^2))
20  print k,u
25  next k
30  end
```

Programme en pascal :

```
program suite;
var
k : longint;
u : real;

function f(x : real) : real;
begin
f := sqrt(1.9-(1/(x*x)));
end;

begin
u := sqrt(1.9);
k := 0;
  repeat
```

```
  k := k+1; u:= f(u);
  writeln('k=',k+1,'  u=',u);
  until 1.9-(1/(x*x)<=0;
  writeln('k=',k+1,' est le nombre cherché');
end.
```

<u>Résultats</u> :

$$\begin{array}{cccc} u_1 \simeq 1.378 & u_2 \simeq 1.172 & u_3 \simeq 1.083 & u_4 \simeq 1.023 \\ u_5 \simeq 0.972 & u_6 \simeq 0.917 & u_7 \simeq 0.843 & u_8 \simeq 0.703 \end{array}$$

III.4.4 Si $a = 2$, on obtient

$$Q_{A(n;a)}(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} \left(u_i x_i + \frac{x_{i+1}}{u_i} \right)^2$$

d'où

$$\begin{cases} t_{ii} = u_i \\ t_{i,i+1} = \frac{1}{u_i} \\ t_{ij} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

avec les notation de (III.3.1). On trouve

$$T = \begin{pmatrix} u_1 & \frac{1}{u_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_2 & \frac{1}{u_2} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & u_{n-1} & \frac{1}{u_{n-1}} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & u_n \end{pmatrix}.$$

OBJET ET NOTATIONS DU PROBLÈME

Ce problème a pour objet l'étude de propriétés de majoration et de minoration de solutions d'équations différentielles linéaires du second ordre.

$I = [\alpha, \beta]$ désigne un intervalle de $\mathbf{R}$. On note $C(I)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues définies sur I. Pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, on note $C^p(I)$ le sous-espace de $C(I)$ formé des fonctions p fois continûment dérivables et $C_0^p(I)$ le sous-espace de $C^p(I)$ formé des fonctions nulles en α et β.

Trois fonctions u, v et w appartenant à $C(I)$ étant fixées, on leur associe le problème différentiel **(P)** suivant :

> Étant donné $(\lambda, \mu, f) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times C(I)$, trouver $y \in C^2(I)$ vérifiant :
>
> $$\begin{cases} \forall t \in I, \quad u(t)\,y''(t) + v(t)\,y'(t) + w(t)\,y(t) = f(t) \\ y(\alpha) = \lambda, \quad y(\beta) = \mu. \end{cases}$$

On dira que **(P)** vérifie la propriété **(P.M)** si :

> Il existe des fonctions positives $a \in C(I)$ et $b \in C(I)$ et des réels positifs A et B tels que, quelle que soit la donnée (λ, μ, f), toute solution y de **(P)** vérifie :
>
> $$\forall t \in I, \quad y(t) \leqslant a(t) \max\left(A\lambda,\ B\mu,\ \sup_{s \in I}\,(b(s)\,f(s))\right).$$

I. ÉTUDE D'UNE ÉQUATION À COEFFICIENTS CONSTANTS

On pose $I = [0, 1]$ et on considère le problème différentiel **($\mathbf{P}_1$)** associé aux fonctions u, v et w définies par $u(t) = -1$, $v(t) = 0$ et $w(t) = c^2$, avec $c > 0$.

I.1. Résolution de l'équation homogène.

Montrer que les fonctions Y_0 et Y_1 définies par $Y_0(t) = \operatorname{sh}(ct)$ et $Y_1(t) = \operatorname{sh}(c(1-t))$ forment une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $-y'' + c^2 y = 0$.

I.2. Résolution du problème ($\mathbf{P}_1$).

I.2.1. Une fonction $f \in C(I)$ étant fixée, déterminer en fonction de Y_0 et Y_1 les solutions de l'équation différentielle $-y'' + c^2 y = f(t)$. [On pourra utiliser la méthode de variation des constantes. On rappelle que $\operatorname{sh}(p+q) = \operatorname{sh}(p)\operatorname{ch}(q) + \operatorname{ch}(p)\operatorname{sh}(q)$].

I.2.2. Montrer que **($\mathbf{P}_1$)** a une unique solution qui se met sous la forme :

$$y(t) = \frac{\operatorname{sh}(ct)}{\operatorname{sh} c}\left[\mu + \frac{1}{c}\int_t^1 f(s)\operatorname{sh}(c(1-s))\,\mathrm{d}s\right] + \frac{\operatorname{sh}(c(1-t))}{\operatorname{sh} c}\left[\lambda + \frac{1}{c}\int_0^t f(s)\operatorname{sh}(cs)\,\mathrm{d}s\right].$$

I.3. Démonstration de la propriété (P.M) pour le problème $(\mathbf{P}_1)$.

On note M la borne supérieure de f sur I.

I.3.1. Utiliser le résultat du I.2.2. pour établir l'inégalité suivante :

$$\forall t \in I, \quad y(t) \leqslant \frac{\operatorname{sh}(c(1-t)) + \operatorname{sh}(ct)}{\operatorname{sh} c} \max(\lambda, \mu) + \left(1 - \frac{\operatorname{sh}(c(1-t)) + \operatorname{sh}(ct)}{\operatorname{sh} c}\right) \frac{M}{c^2}.$$

I.3.2. Exprimer $\operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q$ en fonction de $\operatorname{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right)$ et $\operatorname{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right)$ ainsi que $\operatorname{sh}(2p)$ en fonction de $\operatorname{sh} p$ et $\operatorname{ch} p$.

I.3.3. Pour $t \in I$, montrer que $\frac{\operatorname{sh}(c(1-t)) + \operatorname{sh}(ct)}{\operatorname{sh} c}$ reste compris entre 0 et 1. En déduire que $(\mathbf{P}_1)$ vérifie la propriété (P.M) avec $a = 1$, $b = \frac{1}{c^2}$, $A = B = 1$.

I.3.4. Étant donné une fonction $h \in C(I)$, comparer $\inf_{s \in I} (-h(s))$ avec $\sup_{s \in I} (h(s))$. En déduire une propriété de minoration des solutions de $(\mathbf{P}_1)$ sur le modèle de (P.M).

I.4. Extension à un intervalle quelconque.

On considère plus généralement un problème différentiel $(\hat{\mathbf{P}}_1)$ de même type, avec $u(t) = -1$, $v(t) = 0$ et $w(t) = c^2$, mais défini sur $I = [\alpha, \beta]$.

Montrer, en faisant le changement de variable affine $t = \alpha + (\beta - \alpha)s$, que $(\hat{\mathbf{P}}_1)$ vérifie (P.M).

II. ÉTUDE D'UNE ÉQUATION À COEFFICIENTS NON CONSTANTS

On prend $I = [\alpha, \beta]$, avec $0 < \alpha < \beta$, et on considère le problème différentiel $(\mathbf{P}_2)$ associé aux fonctions u, v et w définies par $u(t) = -t^2$, $v(t) = -2t$ et $w(t) = 1$.

II.1. Démonstration de la propriété (P.M) pour le problème $(\mathbf{P}_2)$.

II.1.1. Déterminer $\gamma \in \mathbf{R}$ tel que, si y est solution de l'équation différentielle

$$-t^2 y'' - 2ty' + y = f(t),$$

alors la fonction z définie par $z(x) = e^{-\gamma x} y(e^x)$ est solution d'une équation différentielle de la forme $-z'' + c^2 z = g(x)$. On précisera la valeur de la constante c et la relation entre les fonctions f et g.

II.1.2. Déduire du I.4. que le problème $(\mathbf{P}_2)$ vérifie (P.M) (on précisera les fonctions a et b et les constantes A et B).

II.1.3. Formuler et démontrer une propriété de minoration des solutions de $(\mathbf{P}_2)$.

Tournez la page S.V.P.

II.2. **Solution développable en série entière.**

On cherche à déterminer et à majorer les solutions de l'équation différentielle

$$-t^2y'' - 2ty' + y = \arctan t$$

qui sont développables en série entière au voisinage de 0.

II.2.1. On suppose qu'une solution y de l'équation différentielle est, sur un intervalle $]-R, R[$, somme d'une série entière $\sum_{p \geq 0} a_p t^p$.

Montrer que $a_{2k} = 0$ et exprimer a_{2k+1} en fonction de k.

II.2.2. Quel est le rayon de convergence de la série ainsi obtenue ?

Conclure sur l'existence d'une solution développable en série entière au voisinage de 0.

II.2.3. La série est-elle uniformément convergente sur $[-1, 1]$? Les fonctions dérivées y' et y'' sont-elles sommes des séries dérivées sur $[-1, 1]$?

II.2.4. Pour n donné et $t \in]0, 1[$, trouver un majorant indépendant de t de l'erreur commise en remplaçant $y(t)$ par la somme partielle $\sum_{0 \leq k \leq n} a_{2k+1} t^{2k+1}$. Déterminer une valeur de n qui assure que cette erreur reste inférieure à 10^{-5}. Calculer une valeur approchée à 10^{-5} près de $\lambda = y\left(\frac{1}{3}\right)$ et $\mu = y\left(\frac{2}{3}\right)$.

II.2.5. Utiliser II.1. pour obtenir un majorant et un minorant de y sur $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$.

III. UNE FAMILLE DE PROBLÈMES VÉRIFIANT (P.M)

On considère dans cette partie les problèmes différentiels **(P)** sur $I = [\alpha, \beta]$, pour lesquels les fonctions u et v sont définies par $u(t) = -1$, $v(t) = 0$ et la fonction w est strictement positive. On notera $(\mathbf{P}_3)$ un tel problème.

III.1. **Existence et unicité d'une solution d'un problème $(\mathbf{P}_3)$.**

III.1.1. Justifier que l'équation différentielle $-y'' + w(t)y = 0$ admet une unique solution Y_0 définie sur I vérifiant $Y_0(\alpha) = 0$ et $Y_0'(\alpha) = 1$ ainsi qu'une unique solution Y_1 définie sur I vérifiant $Y_1(\alpha) = 1$ et $Y_1'(\alpha) = 0$.

III.1.2. Montrer, en étudiant l'intégrale $\int_\alpha^\beta (-Y_0''(s) + w(s)\,Y_0(s))\,Y_0(s)\,\mathrm{d}s$, que $Y_0(\beta)$ n'est pas nul.

III.1.3. Montrer que la fonction $Y_0 Y_1' - Y_1 Y_0'$ est constante sur I.

III.1.4. Soit $f \in C(I)$. Exprimer en fonction de Y_0, Y_1 et f la solution générale de l'équation différentielle $-y'' + w(t)y = f(t)$.

III.1.5. Démontrer que, quelle que soit la donnée (λ, μ, f), le problème $(\mathbf{P}_3)$ a toujours une solution unique.

III.2. **Démonstration de la propriété (P.M) pour un problème ($\mathbf{P}_3$).**

On note y la solution du problème ($\mathbf{P}_3$) correspondant à une donnée (λ, μ, f).

III.2.1. Montrer que, quelle que soit la fonction $z \in C_0^1(I)$, on a :

$$\int_\alpha^\beta y'(s)\, z'(s)\, ds + \int_\alpha^\beta w(s)\, y(s)\, z(s)\, ds = \int_\alpha^\beta f(s)\, z(s)\, ds.$$

III.2.2. Soit G une fonction réelle, définie et de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, nulle sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Vérifier que $t\,G(t) \geqslant 0$ quel que soit $t \in \mathbf{R}$. Montrer que, si la constante réelle K vérifie $K \geqslant \max(\lambda, \mu)$, alors la fonction z définie sur I par $z(t) = G(y(t) - K)$ appartient à $C_0^1(I)$.

III.2.3. Montrer que, si K vérifie $K \geqslant \max(\lambda, \mu)$, on a :

$$\int_\alpha^\beta y'^2(s)\, G'(y(s) - K)\, ds + \int_\alpha^\beta w(s)\,(y(s) - K)\, G(y(s) - K)\, ds$$
$$= \int_\alpha^\beta (f(s) - Kw(s))\, G(y(s) - K)\, ds.$$

En déduire que, si K est assez grand pour que $f(t) - Kw(t) \leqslant 0$ quel que soit $t \in I$, alors on a $y(t) \leqslant K$ quel que soit $t \in I$.

III.2.4. Démontrer que ($\mathbf{P}_3$) vérifie **(P.M)** (on précisera les fonctions a et b et les constantes A et B). Formuler et démontrer une propriété de minoration des solutions de ($\mathbf{P}_3$).

III.3. **D'autres problèmes vérifiant (P.M).**

On considère dans cette question des problèmes différentiels **(P)** sur $I = [\alpha, \beta]$ pour lesquels les fonctions u et v sont toujours définies par $u(t) = -1$, $v(t) = 0$, mais pour lesquels la fonction w est de signe quelconque. On note ($\mathbf{P}_4$) un tel problème.

On fixe h une fonction strictement positive appartenant à $C^2(I)$ et telle que $h(\alpha) = h(\beta) = 1$. On note k une primitive de $\frac{1}{h^2}$, $\alpha' = k(\alpha)$ et $\beta' = k(\beta)$.

III.3.1. Justifier que k admet une fonction réciproque k^{-1} et faire dans ($\mathbf{P}_4$) le changement de fonction défini par $y(t) = h(t)\, z(k(t))$.

III.3.2. Démontrer que, si h est telle que la fonction $-h'' + wh$ soit strictement positive, alors ($\mathbf{P}_4$) vérifie **(P.M)** et a, quelle que soit la donnée (λ, μ, f), une solution unique.

III.3.3. *Application :* on suppose que la fonction $w + \dfrac{\pi^2}{(\beta - \alpha)^2}$ est strictement positive.

Montrer qu'il existe un réel $m > 0$ tel que l'on ait simultanément $m < \dfrac{\pi}{\beta - \alpha}$ et $w + m^2 > 0$.

Montrer que la fonction h définie par $h(t) = \dfrac{\cos m\left(t - \dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\cos m \dfrac{\beta - \alpha}{2}}$ vérifie toutes les conditions précédentes. Conclure.

IV. UNICITÉ DES SOLUTIONS DES PROBLÈMES VÉRIFIANT (P.M)

IV.1. Unicité des solutions.

Soit **(P)** un problème différentiel sur $I = [\alpha, \beta]$ vérifiant **(P.M)**.

IV.1.1. On note y_1 et y_2 des solutions de **(P)** correspondant à des données (λ_1, μ_1, f_1) et (λ_2, μ_2, f_2). Montrer que si $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$, $\mu_1 \leqslant \mu_2$ et $f_1 \leqslant f_2$, on a alors $y_1 \leqslant y_2$.

IV.1.2. En déduire que si **(P)** a une solution pour une donnée (λ, μ, f), alors cette solution est unique.

IV.2. Un contre-exemple.

Montrer que le problème différentiel **(P)** sur $I = [\alpha, \beta]$ associé aux fonctions u, v et w définies par $u(t) = -1$, $v(t) = 0$ et $w(t) = -\dfrac{\pi^2}{(\beta - \alpha)^2}$ ne vérifie pas **(P.M)**.

IUFM ANTILLES GUYANE
PLC1 - Mathématiques

Corrigé de Antoine DELCROIX

CAPES 1996-PREMIERE EPREUVE
Corrigé

N.B. On abrégera équation différentielle en E.D. Une lettre de l'alphabet latin ou grec désignera une fonction ou une constante. S'il y a ambiguité, on notera la fonction f sous la forme $f(\cdot)$. On notera $(\mathbf{E}_i)$ l'équation différentielle qui intervient dans le problème $(\mathbf{P}_i)$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.

I. ETUDE D'UNE EQUATION A COEFFICIENTS CONSTANTS

I.1. Résolution de l'équation homogène

Les fonctions Y_0 et Y_1 vérifient clairement l'équation différentielle $-y'' + c^2 y = 0$. De plus, elles forment une famille libre. Soit en effet α et β deux scalaires tels que, pour tout $t \in I$, on ait $\alpha Y_0(t) + \beta Y_1(t) = 0$. Pour $t = 0$ et $t = 1$, on a respectivement $\beta \operatorname{sh} c = 0$ et $\alpha \operatorname{sh} c = 0$. Comme c est non nul, il vient $\alpha = \beta = 0$.
L'ensemble des solutions définies sur I de l'E.D. $-y'' + c^2 y = 0$ étant un espace vectoriel de dimension 2, le couple de fonctions (Y_0, Y_1) en forme une base.

I.2. Résolution du problème $(\mathbf{P}_1)$

I.2.1. Toute solution Y de l'E.D. $(\mathbf{E}_1) - y'' + c^2 y = f(t)$ s'écrit

$$Y(\cdot) = \gamma_0 Y_0(\cdot) + \gamma_1 Y_1(\cdot) + \Phi(\cdot),$$

où γ_0 et γ_1 sont deux constantes réelles et $\Phi(\cdot)$ une solution ‹‹particulière›› de l'E.D. $(\mathbf{E}_1)$. On cherche Φ sous la forme $\Phi(\cdot) = \gamma_0(\cdot)Y_0(\cdot) + \gamma_1(\cdot)Y_1(\cdot)$ où $\gamma_0(\cdot)$ et $\gamma_1(\cdot)$ sont deux fonctions inconnues de classe C^2. On a alors

$$\Phi'(\cdot) = \gamma_0'(\cdot)Y_0(\cdot) + \gamma_1'(\cdot)Y_1(\cdot) + \gamma_0(\cdot)Y_0'(\cdot) + \gamma_1(\cdot)Y_1'(\cdot).$$

On impose (classiquement) la condition supplémentaire $\gamma_0'(\cdot)Y_0(\cdot) + \gamma_1'(\cdot)Y_1(\cdot) = 0$. D'où

$$\Phi''(\cdot) = \gamma_0'(\cdot)Y_0'(\cdot) + \gamma_1'(\cdot)Y_1'(\cdot) + \gamma_0(\cdot)Y_0''(\cdot) + \gamma_1(\cdot)Y_1''(\cdot).$$

En remplacant dans $(\mathbf{E}_1)$, il vient

$$\gamma_0'(\cdot)Y_0'(\cdot) + \gamma_1'(\cdot)Y_1'(\cdot) = -f(\cdot)$$

Le couple de fonctions $\gamma_0'(\cdot)$ et $\gamma_1'(\cdot)$ est solution du système

$$\forall t \in I \quad \begin{cases} \gamma_0'(t)Y_0(t) + \gamma_1'(t)Y_1(t) & = & 0 \\ \gamma_0'(t)Y_0'(t) + \gamma_1'(t)Y_1'(t) & = & -f(t) \end{cases} \qquad (1)$$

Le déterminant D du système (1) est non nul pour tout $t \in I$ (pourquoi ? *Indication :* penser au wronskien !). Dans ce cas particulier, il est constant : $D = -c \operatorname{sh} c$. On en déduit

$$\gamma_0'(\cdot) = -(1/c \operatorname{sh} c)Y_1(\cdot)f(\cdot) \qquad \gamma_1'(\cdot) = (1/c \operatorname{sh} c)Y_0(\cdot)f(\cdot).$$

On peut donc choisir de définir Φ par l'expression

$$\forall t \in I \quad \Phi(t) = -(1/c \operatorname{sh} c)Y_0(t)\int_0^t Y_1(s)f(s)\,\mathrm{d}s + (1/c \operatorname{sh} c)Y_1(t)\int_0^t Y_0(s)f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Remarque.- Un choix plus judicieux peut être fait pour Φ si, à ce stade, on a lu le résultat de la question suivante (ce qui est conseillé !). On prendra

$$\Phi(t) = (1/c\,\mathrm{sh}\,c)Y_0(t)\int_t^1 Y_1(s)f(s)\,\mathrm{d}s + (1/c\,\mathrm{sh}\,c)Y_1(t)\int_0^t Y_0(s)f(s)\,\mathrm{d}s,$$

en choisissant la primitive de $\gamma_0'(\cdot)$ qui s'annule pour $t=1$.
Une fonction Y est donc solution de $(\mathbf{E}_1)$ si, et seulement si, il existe deux constantes réelles δ_0 et δ_1 telles que, pour tout $t \in I$, on ait

$$Y(t) = (1/\mathrm{sh}\,c)Y_0(t)\left(\delta_0 - (1/c)\int_0^t Y_1(s)f(s)\,\mathrm{d}s\right) + (1/\mathrm{sh}\,c)Y_1(t)\left(\delta_1 + (1/c)\int_0^t Y_0(s)f(s)\,\mathrm{d}s\right). \tag{2}$$

I.2.2. Le problème $(\mathbf{P}_1)$ admet une solution si, et seulement si, il existe un couple de constantes (δ_0, δ_1) telles que, la fonction Y définie par (2) vérifie $Y(0) = \lambda$ et $Y(1) = \mu$. Or étant données δ_0 et δ_1, on a

$$Y(0) = \delta_1 \quad Y(1) = \delta_0 - (1/c)\int_0^1 Y_1(s)f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Il existe donc un unique couple (δ_0, δ_1) solution, à savoir

$$\delta_0 = \mu + (1/c)\int_0^1 Y_1(s)f(s)\,\mathrm{d}s \qquad \delta_1 = \lambda.$$

En remplacant Y_0 et Y_1 par leurs valeurs et en utilisant la relation de Chasles, la solution y du problème $(\mathbf{P}_1)$ s'écrit, pour $t \in [0,1]$

$$y(t) = \frac{\mathrm{sh}\,ct}{\mathrm{sh}\,c}\left(\mu + \frac{1}{c}\int_t^1 \mathrm{sh}(c(1-s))f(s)\,\mathrm{d}s\right) + \frac{\mathrm{sh}\,c(1-t)}{\mathrm{sh}\,c}\left(\lambda + \frac{1}{c}\int_0^t \mathrm{sh}(cs)f(s)\,\mathrm{d}s\right). \tag{3}$$

I.3. Démonstration de la propriété (P.M) pour le problème $(\mathbf{P}_1)$

I.3.1. Posons, pour les questions I.3.1. à I.3.4., $m = \max(\lambda, \mu)$ et $M = \sup_{s\in I}(f(s))$. La fonction $u \mapsto \mathrm{sh}\,u$ étant positive sur $\mathbb{R}^+$, il vient pour $t \in [0,1]$

$$\int_t^1 \mathrm{sh}(c(1-s))f(s)\,\mathrm{d}s \leq M\int_t^1 \mathrm{sh}(c(1-s))\,\mathrm{d}s = (M/c)(\mathrm{ch}(c(1-t)) - 1).$$

De même, on obtient

$$\forall t \in [0,1] \qquad \int_0^t \mathrm{sh}(cs)f(s)\,\mathrm{d}s \leq (M/c)(\mathrm{ch}(ct) - 1).$$

En remplacant dans (3), pour $t \in [0,1]$, il vient

$$y(t) \leq \frac{m\,(\mathrm{sh}(ct) + \mathrm{sh}(c(1-t)))}{\mathrm{sh}\,c} + \frac{M}{c^2\,\mathrm{sh}\,c}\left(\mathrm{sh}(ct)\,(\mathrm{ch}(c(1-t)) - 1) + \mathrm{sh}(c(1-t))\,(\mathrm{ch}(ct) - 1)\right).$$

Comme $\mathrm{sh}(ct)\,\mathrm{ch}(c(1-t)) + \mathrm{sh}(c(1-t))\,\mathrm{ch}(ct) = \mathrm{sh}(ct + c(1-t)) = \mathrm{sh}\,c$, on a

$$\forall t \in [0,1] \qquad y(t) \leq m\frac{\mathrm{sh}(ct) + \mathrm{sh}(c(1-t))}{\mathrm{sh}\,c} + \frac{M}{c^2}\left(1 - \frac{\mathrm{sh}(ct) + \mathrm{sh}(c(1-t))}{\mathrm{sh}\,c}\right). \tag{4}$$

I.3.2. Rappelons les égalités, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(y)\,\mathrm{ch}(x) \qquad \mathrm{sh}(x-y) = \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) - \mathrm{sh}(y)\,\mathrm{ch}(x). \tag{5}$$

D'où $\operatorname{sh}(x+y)+\operatorname{sh}(x-y)=2\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y)$. En posant $p=x+y$ et $q=x-y$, soit $x=(p+q)/2$ et $y=(p-q)/2$, il vient

$$\forall (p,q)\in\mathbb{R}^2 \quad \operatorname{sh}(p)+\operatorname{sh}(q)=2\operatorname{sh}((p+q)/2)\operatorname{ch}((p-q)/2).$$

Par ailleurs, pour tout $p\in\mathbb{R}$, on a directement $\operatorname{sh}(2p)=2\operatorname{sh}(p)\operatorname{ch}(p)$, en faisant $x=y=p$ dans (5).

I.3.3. Dans les questions I.3.3. et I.3.4., on notera, pour $t\in[0,1]$,

$$S_c(t)=\left(\operatorname{sh}(ct)+\operatorname{sh}\left(c(1-t)\right)\right)/\operatorname{sh}c.$$

D'après I.3.2., il vient

$$\forall t\in[0,1] \quad S_c(t)=\frac{2\operatorname{sh}(c/2)\operatorname{ch}(c(1/2-t))}{2\operatorname{sh}(c/2)\operatorname{ch}(c/2)}=\frac{\operatorname{ch}(c(1/2-t))}{\operatorname{ch}(c/2)},$$

quantité clairement positive. En outre, $\sup_{t\in[0,1]}\operatorname{ch}(c(1/2-t))=\operatorname{ch}(c/2)$,comme le montre une rapide étude de la fonction $u\mapsto\operatorname{ch}u$. Il vient donc $(\operatorname{ch}c(1/2-t))/\operatorname{ch}(c/2)\leq 1$, pour $t\in[0,1]$. D'où

$$\forall t\in[0,1] \quad 0\leq S_c(t)\leq 1.$$

Pour $t\in[0,1]$, $S_c(t)$ et $1-S_c(t)$ sont donc positifs. L'inégalité (4) entraine alors

$$\forall t\in[0,1] \quad y(t)\leq\max(m,M/c^2)S_c(t)+\max(m,M/c^2)\left(1-S_c(t)\right)=\max(\lambda,\mu,M/c^2).$$

Le problème $(\mathbf{P}_1)$ vérifie donc la propriété $(\mathbf{P}.\mathbf{M})$ avec $a=1$, $b=1/c^2$ et $A=B=1$.

I.3.4. *Préliminaire.*- Soit S un réel, on a les équivalences

$$\begin{aligned} S=\sup\nolimits_{s\in I}h(s) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon>0,\ \exists t\in I, \quad S-\varepsilon<h(t)\leq S,\\ &\Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon>0,\ \exists t\in I, \quad -S\leq -h(t)<-S+\varepsilon,\\ &\Leftrightarrow \quad -S=\inf\nolimits_{s\in I}(-h(s)).\end{aligned}$$

De manière générale, l'E.D. $(\mathbf{E})$ associée au problème différentiel $(\mathbf{P})$ étant linéaire, une fonction y est solution du problème $(\mathbf{P})$ avec le triplet de données (λ,μ,f) si, et seulement si, la fonction $-y$ est solution du problème $(\mathbf{P})$ avec le triplet de données $(-\lambda,-\mu,-f)$. Si le problème $(\mathbf{P})$ vérifie la propriété $(\mathbf{P}.\mathbf{M})$, il existe des fonctions positives a et b et des réels positifs A et B, indépendants du triplet $(-\lambda,-\mu,-f)$ tels que

$$\forall t\in[\alpha,\beta] \quad -y(t)\leq a(t)\max(-A\lambda,-B\mu,\sup\nolimits_{s\in I}\left(b(s)(-f(s))\right).$$

D'après le préliminaire de cette question, comme b est positive, on a $\sup_{s\in I}\left(b(s)(-f(s))\right)=-\inf_{s\in I}\left(b(s)(f(s))\right)$. Comme les constantes A et B et la fonction a sont positives, pour tout réel ν, on a $a(t)\max(-A\lambda,-B\mu,-\nu)=-a(t)\min(A\lambda,B\mu,\nu))$. On en déduit pour y la minoration

$$\forall t\in[\alpha,\beta] \quad a(t)\min(A\lambda,B\mu,\inf\nolimits_{s\in I}\left(b(s)(f(s))\right)\leq y(t). \tag{6}$$

Dans le cas particulier de cette première partie, il vient

$$\forall t\in[0,1] \quad \min(\lambda,\mu,\inf\nolimits_{s\in I}\left((1/c^2)(f(s))\right)\leq y(t).$$

I.4. Extension à un intervalle quelconque

Pour toute fonction h de classe C^2 sur $[\alpha,\beta]$, la fonction $\widetilde{h} : s \mapsto h(\alpha+(\beta-\alpha)s)$ est de classe C^2 sur $[0,1]$, et vérifie $\widetilde{h}''(s) = (\beta-\alpha)^2 h''(\alpha+(\beta-\alpha)s)$. Il en résulte l'équivalence entre les deux propriétés suivantes.
1. La fonction y est solution du problème $(\widehat{\mathbf{P}}_1)$

$$\forall t \in [\alpha,\beta] \quad -y''(t)+c^2y(t) = f(t) \quad ; \quad y(\alpha)=\lambda \quad y(\beta)=\mu.$$

2. La fonction $\widetilde{y}$ est solution du problème $(\widetilde{\mathbf{P}}_1)$

$$\forall s \in [0,1] \quad -\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}\widetilde{y}''(s)+c^2\widetilde{y}(s) = f(\alpha+(\beta-\alpha)s) \quad ; \quad y(0)=\lambda \quad y(1)=\mu.$$

D'après le I.3., le problème $(\widetilde{\mathbf{P}}_1)$ vérifie la propriété $(\mathbf{P}.\mathbf{M})$ avec $a=1$, $b=1/(c(\beta-\alpha))^2$ et $A=B=1$. On a donc

$$\forall s \in [0,1] \quad \widetilde{y}(s) \le \max\left(\lambda, \mu, \frac{1}{(c(\beta-\alpha))^2}\sup\nolimits_{u\in[0,1]}\left((\beta-\alpha)^2 f(\alpha+(\beta-\alpha)u)\right)\right).$$

On en déduit, pour le problème $(\widehat{\mathbf{P}}_1)$, la majoration

$$\forall t \in [\alpha,\beta] \quad y(t) \le \max\left(\lambda,\mu,(1/c^2)\sup\nolimits_{t\in I} f(t)\right).$$

Le problème $(\widetilde{\mathbf{P}}_1)$ vérifie donc la propriété $(\mathbf{P}.\mathbf{M})$ avec $a=1$, $b=1/c^2$ et $A=B=1$.

II ETUDE D'UNE EQUATION A COEFFICIENTS NON CONSTANTS

II.1. Démonstration de la propriété (P.M) pour le problème $(\mathbf{P}_2)$

II.1.1 Notons au préalable que la fonction $x \mapsto e^x$ est un C^∞-difféomorphisme croissant de l'intervalle $[\ln\alpha,\ln\beta]$ sur l'intervalle $[\alpha,\beta]$. Ceci justifie le changement de variable effectué dans l'E.D. $(\mathbf{E}_2)$.
Supposons la fonction y est solution de l'E.D. $(\mathbf{E}_2)$ $-t^2y''-2ty'+y=f(t)$ sur l'intervalle $[\alpha,\beta]$. La fonction $z(x)=e^{-\gamma x}y(e^x)$ est de classe C^2 sur l'intervalle $[\ln\alpha,\ln\beta]$. De l'égalité $y(e^x)=e^{\gamma x}z(x)$, on déduit les relations, valables pour $x\in[\ln\alpha,\ln\beta]$

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\ /\mathrm{d}x)(y(e^x)) &= e^x\, y'(e^x) = e^{\gamma x}(z'(x)+\gamma z(x)),\\ (\mathrm{d}^2\ /\mathrm{d}x^2)(y(e^x)) &= e^x\, y'(e^x)+e^{2x}\, y''(e^x) = e^{\gamma x}(z''(x)+2\gamma z'(x)+\gamma^2 z(x)).\end{aligned}$$

Comme la fonction $t\mapsto y(t)$ est solution de l'E.D. $(\mathbf{E}_2)$, il vient

$$\forall x \in [\ln\alpha,\ln\beta] \quad e^{\gamma x}\left(-z''(x)-(2\gamma+1)z'(x)+(-\gamma^2-\gamma+1)z(x)\right) = f(e^x). \tag{7}$$

Réciproquement, si la fonction $x\mapsto z(x)$ est solution de l'E.D. (7), il est clair que la fonction $t\mapsto y(t)=e^{\gamma\ln t}z(\ln t)=t^\gamma z(\ln t)$ est solution de l'E.D. $(\mathbf{E}_2)$.
Le choix de $\gamma=-1/2$ donne à l'E.D. (7) la forme voulue. La fonction $x\mapsto z(x)$ est alors solution de

$$\forall x \in [\ln\alpha,\ln\beta] \quad -z''(x)+(5/4)z(x) = e^{x/2} f(e^x). \tag{8}$$

On a alors $c^2=5/4$ et $g(x)=e^{x/2}f(e^x)$.

II.1.2. Avec le choix de γ fait au II.1.1., on a les équivalences

$$y(\alpha)=\lambda \Leftrightarrow z(\ln\alpha)=\sqrt{\alpha}\lambda \qquad\qquad y(\beta)=\mu \Leftrightarrow z(\ln\beta)=\sqrt{\beta}\mu.$$

D'après le I.4, le problème différentiel $(\mathbf{P}_1)$ considéré ici sur l'intervalle $[\ln\alpha, \ln\beta]$, possède la propriété $(\mathbf{P}.\mathbf{M})$ avec $a = 1$, $b = 1/c^2 = 4/5$ et $A = B = 1$. D'où la majoration

$$\forall x \in [\ln\alpha, \ln\beta] \quad z(x) \leq \max\left(\sqrt{\alpha}\lambda, \sqrt{\beta}\mu, (1/c^2)\sup_{u\in[\ln\alpha,\ln\beta]}(g(u))\right).$$

La relation entre $x \mapsto z(x)$ et $t \mapsto y(t)$, entraine l'inégalité

$$\forall t \in [\alpha, \beta] \quad y(t) \leq t^{-1/2}\max\left(\sqrt{\alpha}\lambda, \sqrt{\beta}\mu, (1/c^2)\sup_{s\in[\alpha,\beta]}(s^{1/2}f(s))\right).$$

Le problème $(\mathbf{P}_2)$ possède donc la propriété $(\mathbf{P}.\mathbf{M})$ avec $a(t) = t^{-1/2}$, $b(t) = 4t^{1/2}/5$, $A = \sqrt{\alpha}$ et $B = \sqrt{\beta}$.

II.1.3. Comme cela a été noté en I.3.4., tout problème vérifiant $(\mathbf{P}.\mathbf{M})$ vérifie aussi une propriété de minoration des solutions analogues. On a ici

$$\forall t \in [\alpha, \beta] \quad t^{-1/2}\min\left(\sqrt{\alpha}\lambda, \sqrt{\beta}\mu, (4/5)\inf_{s\in[\alpha,\beta]}(s^{1/2}f(s))\right) \leq y(t).$$

II.2. Solution développable en série entière

Pour cette question II.2. nous noterons $(\mathbf{E}_2')$ l'E.D. $-t^2y'' - 2ty' + y = \arctan t$

II.2.1. *Préliminaire.*- Montrons que la fonction $t \mapsto \arctan t$ est développable en série entière à l'origine. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\arctan t = 1/(1+t^2)$. Or, pour $x \in]-1,1[$, on a $1/(1-x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$, d'où pour les mêmes valeurs de x, $1/(1+x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^k$. En raison de l'équivalence $|t| < 1 \Leftrightarrow |t|^2 < 1$, pour $t \in \mathbb{R}$, il vient, pour tout $t \in]-1,1[$ $1/(1+t^2) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^{2k}$. En intégrant terme à terme cette série entière, on obtient, puisque $\arctan(0) = 0$

$$\forall t \in]-1,1[\qquad \arctan t = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k/(2k+1)\, t^{2k+1}.$$

On suppose maintenant qu'il existe une série entière $\sum_{p\geq 0} a_p t^p$, de rayon de convergence R non nul, solution de l'E.D. $(\mathbf{E}_2')$. En dérivant terme à terme la série $\sum_{p\geq 0} a_p t^p$ et en remplacant dans $(\mathbf{E}_2')$, il vient la relation

$$\forall t \in]-\min(R,1), \min(R,1)[\qquad \sum_{p=0}^{+\infty}(-p^2-p+1)t^p = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k/(2k+1)\, t^{2k+1}.$$

Remarquons que le terme $(-p^2-p+1)$ est non nul pour tout entier p (les racines de ce trinôme en p sont irrationnelles). L'unicité de l'écriture d'une série entière (de rayon de convergence non nul) entraine alors les égalités

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad a_{2k} = 0 \quad ; \quad a_{2k+1} = (-1)^{k+1}/\left((2k+1)(4k^2+6k+1)\right).$$

II.2.2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $t \neq 0$, le rapport $\left|a_{2k+3}t^{2k+3}/a_{2k+1}t^{2k+1}\right|$ du module de deux termes consécutifs (non nuls) de la série $\sum_{p\geq 0} a_p t^p$ tend vers t^2 pour k tendant vers $+\infty$. La série convergeant pour $t < 1$ et divergeant pour $t > 1$, le rayon de convergence de la série $\sum_{p\geq 0} a_p t^p$ est donc égal à 1. La somme $\widetilde{y}(t)$ de la série entière est donc solution de l'E.D. $(\mathbf{E}_2')$ sur l'intervalle $]-1,1[$.

II.2.3. On remarque que $a_{2k+1} = \mathrm{O}(k^3)$ pour k tendant vers $+\infty$. La série $\sum_{p\geq 0} a_p t^p$ converge donc normalement sur $[-1,1]$. Il en est de même pour la série dérivée $\sum_{p\geq 1} p a_p t^{p-1}$ puisque on aura $(2k+1)a_{2k+1} = \mathrm{O}(k^2)$ pour k tendant vers $+\infty$.

La série dérivée seconde s'écrit

$$\forall t \in]-1,1[\quad \widetilde{y}''(t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}2k}{4k^2+6k+1}t^{2k-1} = t\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m 2(m+1)}{4m^2+14m+11}t^{2m},$$

la dernière égalité étant obtenue en posant $m = k-1$. Il s'agit d'étudier la convergence uniforme de la série $\sum_{m\geq 0}(-1)^m \nu_m t^{2m}$ avec $\nu_m = 2(m+1)/(4m^2+14m+11)$. Cette série est alternée puisque, pour tout t, $\nu_m t^{2m}$ est positif. De plus, la suite $m \mapsto t^{2m}$ est décroissante ou constante, pour $t \in [-1,1]$. La suite $m \mapsto \nu_m$ est décroissante : la fonction $\xi \mapsto 2(\xi+1)/(4\xi^2+14\xi+11)$ est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\xi \mapsto -2(4\xi^2+8\xi+3)/(4\xi^2+14\xi+11)^2$, négative sur $\mathbb{R}^+$. La suite $m \mapsto \nu_m t^{2m}$ est donc décroissante, de limite nulle pour m tendant vers $+\infty$. La série alternée $\sum_{m\geq 0}(-1)^m \nu_m t^{2m}$ converge donc simplement pour tout $t \in [-1,1]$. Si l'on note, pour tout entier $M \geq 0$, $T_M(t) = t\sum_{m=0}^{M}(-1)^m \nu_m t^{2m}$, le théorème des séries alternées donne de plus les majorations

$$\forall t \in [-1,1] \qquad \left|\widetilde{y}''(t) - T_M(t)\right| \leq \nu_{M+1} t^{2M+3} \leq \nu_{M+1}.$$

Comme $\lim_{K\to\infty} \nu_K = 0$, la série $\sum_{m\geq 0}(-1)^m \nu_m t^{2m}$ converge uniformément sur l'intervalle $[-1,1]$.

De la convergence normale (donc simple) de la série $\sum_{p\geq 0} a_p t^p$, de la convergence normale (donc uniforme) de la série dérivée et de la convergence uniforme de la série dérivée seconde, il résulte que les fonctions $\widetilde{y}'(t)$ et $\widetilde{y}''(t)$ sont sommes des séries dérivées sur $[-1,1]$.

Remarque.- Le lecteur vérifiera que la série $\sum_{m\geq 0}(-1)^m \nu_m t^{2m}$ ne converge pas normalement sur l'intervalle $[-1,1]$.

II.2.4. On vérifie par une méthode analogue à celle employée en II.2.3. que la série

$$\sum_{k\geq 0} a_{2k+1} t^{2k+1} = \sum_{k\geq 0}(-1)^{k+1}\lambda_k t^{2k+1} = \sum_{k\geq 0}(-1)^{k+1} / \big((2k+1)(4k^2+6k+1)\big)\, t^{2k+1}$$

définissant $\widetilde{y}$ vérifie les hypothèses du théorème des séries alternées. En notant, pour tout entier $K \geq 0$, $S_K(t) = \sum_{k=0}^{K}(-1)^{k+1}\lambda_k t^{2k+1}$, on a les majorations

$$\forall t \in [-1,1] \qquad |\widetilde{y}(t) - S_K(t)| \leq \lambda_{K+1} t^{2K+3} \leq \lambda_{K+1} \tag{9}$$

Il suffit donc de prendre K tel que λ_{K+1} soit inférieur à 10^{-5} pour que $S_K(t)$ approche uniformément $\widetilde{y}(t)$ à 10^{-5} sur $[-1,1]$ et donc sur $]0,1[$.

On réalise donc un premier programme déterminant le premier entier k tel que $(2k+1)(4k^2+6k+1)$ soit strictement supérieur à 10^5. On trouve pour cette valeur $k_0 = 23$. On calcule alors la somme partielle $S_{k_0-1}(t)$, pour $t = 1/3$ ou $t = 2/3$, à l'aide d'un algorithme très simple, par exemple

$$\begin{array}{ll} S := 0 & k := 0 \\ \text{Répeter} & S := S + (-1)^{k+1}\lambda_K t^{2k+1} \\ & k := k+1 \\ \text{Jusqu'à} & k = k_0 \\ \text{Afficher} & S \end{array}.$$

On trouve, comme valeur approchée de $\widetilde{y}(1/3)$ (*resp.* $\widetilde{y}(2/3)$) -0.332238 (*resp.* -0.658470).

Remarque.- Si l'objectif est de calculer des valeurs approchées de $\widetilde{y}(1/3)$ et $\widetilde{y}(2/3)$, la majoration retenue (voir (9)) est très grossière et ne prend pas en compte la décroissance rapide de $(1/3)^k$ et $(2/3)^k$ vers 0. Ainsi, on constate expérimentalement que les 5 premières décimales de $S_k(1/3)$ (*resp.* de $S_k(2/3)$) sont stabilisées dès $k = 2$ (*resp.* $k = 6$) ! D'ailleurs, un calcul numérique du terme général de la série $\sum_{k\geq 0}(-1)^{k+1}\lambda_k t^{2k+1}$ montre que le premier terme strictement inférieur à 10^{-5} est obtenu avec $k = 3$ pour $t = 1/3$ et avec $k = 5$ pour $t = 2/3$.
Ceci vient du fait que, pour $0 \leq t < 1$ et pour tout $n > 0$, la suite $k \mapsto t^k$ tend vers 0 plus vite que la suite $k \mapsto k^n$ (En effet $\lim_{k\to\infty} t^k/k^n = 0$). Comme la majoration (9) retient la moins bonne des convergences, elle est numériquement médiocre. Un algorithme plus rapide, et

collant d'ailleurs au théorème des séries alternées est le suivant (le lecteur constatera d'ailleurs qu'il effectue une étape en trop)

$$\begin{array}{ll} S := 0 & k := 0 \\ \text{Répéter} & S := S + (-1)^{k+1}\lambda_K t^{2k+1} \\ & k := k+1 \\ \text{Jusqu'à} & \lambda_k t^{2k+1} < 10^{-5} \\ \text{Afficher} & S \end{array}.$$

II.2.5. D'après la question II.1., on a l'encadrement, pour tout $t \in [1/3, 2/3]$

$$t^{-1/2} \min\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\lambda, \sqrt{\frac{2}{3}}\mu, \frac{4}{5}\inf_{s\in[\alpha,\beta]}(s^{1/2}f(s))\right) \leq y(t) \leq t^{-1/2} \max\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\lambda, \sqrt{\frac{2}{3}}\mu, \frac{4}{5}\sup_{s\in[\alpha,\beta]}(s^{1/2}f(s))\right).$$

avec $f(t) = \arctan t$, $\lambda = \widetilde{y}(1/3)$ et $\mu = \widetilde{y}(2/3)$.

Comme $\sqrt{2/3}\mu < \sqrt{1/3}\lambda < 0$ et que la fonction $t \mapsto \sqrt{t}\arctan t$ est positive sur $[1/3, 2/3]$ la double inégalité précédente entraine

$$\forall t \in [1/3, 2/3] \quad t^{-1/2}\sqrt{2/3}\mu \leq y(t) \leq \frac{4}{5}t^{-1/2}\sup_{s\in[\alpha,\beta]}(s^{1/2}\arctan s),$$

Comme $t \mapsto t^{-1/2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$, il vient

$$\forall t \in [1/3, 2/3] \quad \sqrt{2}\mu \leq y(t) \leq (4/5)\sqrt{3}\sup_{s\in[\alpha,\beta]}(s^{1/2}\arctan s).$$

Or $t \mapsto t^{1/2}$ et $t \mapsto \arctan t$ sont croissantes sur $\mathbb{R}_*^+$, donc

$$\forall t \in [1/3, 2/3] \quad \sqrt{2}\mu \leq y(t) \leq (4/5)\sqrt{2}\arctan(2/3).$$

Un majorant de $\arctan(2/3)$ est 0.58801. Avec les calculs approchés du II.2.4, il vient comme encadrement possible

$$-0.93124 \leq y(t) \leq 0.66525.$$

III UNE FAMILLE DE PROBLEMES VERIFIANT (P.M)

III.1. Existence et unicité d'une solution pour le problème $(\mathbf{P}_3)$

III.1.1. Le théorème d'existence et d'unicité des solutions d'une E.D. linéaire s'applique puisque la fonction $t \mapsto w(t)$ est supposée continue sur l'intervalle I. En particulier il existe une unique solution Y_0 de l'E.D. $(\mathbf{E}_3)$ telle que $Y_0(\alpha) = 0$ et $Y_0'(\alpha) = 1$. De même, il existe une unique solution de l'E.D. $(\mathbf{E}_3)$ telle que $Y_0(\alpha) = 1$ et $Y_0'(\alpha) = 0$.

III.1.2. La fonction Y_0 étant solution de l'E.D. $(\mathbf{E}_3)$ l'intégrale $\int_\alpha^\beta(-Y_0''(s) + w(s)Y_0(s))Y_0(s)\,\mathrm{d}s$ est nulle. On a donc, puisque la fonction $s \mapsto w(s)Y_0^2(s)$ est continue, positive et non nulle

$$\int_\alpha^\beta Y_0''(s)Y_0(s)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta w(s)Y_0^2(s)\,\mathrm{d}s > 0.$$

En intégrant par parties le premier membre, il vient (puisque $Y_0(\alpha) = 0$)

$$Y_0'(\beta)Y_0(\beta) = \int_\alpha^\beta (Y_0'(s))^2\,\mathrm{d}s + \int_\alpha^\beta w(s)Y_0^2(s)\,\mathrm{d}s > 0.$$

D'où en particulier $Y_0(\beta) \neq 0$.

III.1.3. La fonction $W : s \mapsto Y_0 Y_1'(s) - Y_1(s) Y_0'(s)$ est dérivable sur I de dérivée

$$W'(s) = Y_0 Y_1''(s) - Y_1(s) Y_0''(s) = w(s)(Y_0 Y_1(s) - Y_1(s) Y_0(s)) = 0.$$

La fonction W est donc constante sur I. Comme $W(\alpha) = -1$, la fonction W est égale à -1 sur I.

III.1.4. Il s'agit ici de reprendre la méthode utilisée dans le I.2.1. On obtient *mutatis mutandis,* l'expression générale des solutions de l'E.D. $(\mathbf{E}_3)$

$$Y(t) = Y_0(t)\left(\delta_0 + \int_t^\beta Y_1(s) f(s)\,\mathrm{d}s\right) + Y_1(t)\left(\delta_1 + \int_\alpha^t Y_0(s) f(s)\,\mathrm{d}s\right). \tag{10}$$

où δ_0 et δ_1 sont deux constantes réelles.

III.1.5. Remarquons que pour toute solution de l'E.D. $(\mathbf{E}_3)$ écrite sous la forme (10) on a

$$Y(\alpha) = \delta_1 \quad Y(\beta) = Y_0(\beta)\delta_0 + Y_1(\beta)\left(\delta_1 + \int_\alpha^\beta Y_0(s) f(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

Il en résulte qu'il existe une, et une seule, solution au problème $(\mathbf{P}_3)$ pour toute donnée (λ, μ, f) si, et seulement si le système suivant (11) de deux équations d'inconnues δ_0 et δ_1 possède une solution, et une seule

$$\lambda = \delta_1 \qquad \mu = Y_0(\beta)\delta_0 + Y_1(\beta)\left(\delta_1 + \int_\alpha^\beta Y_0(s) f(s)\,\mathrm{d}s\right). \tag{11}$$

Ceci est assuré car $Y_0(\beta)$ est non nul d'après la question III.1.2.

III.2. Démonstration de la propriété (P.M) pour un problème $(\mathbf{P}_3)$

III.2.1. Comme y est solution de l'E.D. $(\mathbf{E}_3)$, on a $-y'' + wy = f$. D'où

$$-\int_\alpha^\beta y''(s) z(s)\,\mathrm{d}s + \int_\alpha^\beta w(s) y(s) z(s)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(s) z(s)\,\mathrm{d}s.$$

En intégrant par parties le premier terme de l'égalité précédente, et en tenant compte de $z(\alpha) = z(\beta) = 0$ (le terme "tout intégré" est nul), il vient

$$\int_\alpha^\beta y'(s) z'(s)\,\mathrm{d}s + \int_\alpha^\beta w(s) y(s) z(s)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(s) z(s)\,\mathrm{d}s.$$

III.2.2. *Remarque.-* Il est d'abord clair qu'une telle fonction G existe. On laisse au lecteur le soin d'en construire une.

Comme G est supposée nulle sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ on a

$$\forall t \in \mathbb{R}^- \;\; tG(t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+ \;\; tG(t) \geq 0. \tag{12}$$

Par ailleurs, si $K \geq \max(\lambda, \mu)$, on a $y(\alpha) - K = \lambda - K \leq 0$ et $y(\beta) - K = \mu - K \leq 0$. Donc $z(\alpha) = G(y(\alpha) - K) = 0$ et $z(\beta) = G(y(\beta) - K) = 0$. La fonction z est de classe C^1 sur I comme composée de $t \mapsto y(t) - K$, de classe C^2 sur I, et de G, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Au total, la fonction z est bien un élément de $\mathrm{C}_0^1(I)$.

III.2.3. En appliquant le III.2.1. avec la fonction $z(\cdot) = G(y(\cdot) - K)$, il vient

$$\int_\alpha^\beta (y'(s))^2 G(y(s) - K)\,\mathrm{d}s + \int_\alpha^\beta w(s) y(s) G(y(s) - K)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(s) G(y(s) - K)\,\mathrm{d}s.$$

En soustrayant $\int_\alpha^\beta w(s)KG(y(\cdot)-K)\,\mathrm{d}s$ à chaque membre de l'égalité précédente, on obtient

$$\underbrace{\int_\alpha^\beta (y'(s))^2 G(y(s)-K)\,\mathrm{d}s}_{A} + \underbrace{\int_\alpha^\beta w(s)(y(s)-K)G(y(s)-K)\,\mathrm{d}s}_{B} = \underbrace{\int_\alpha^\beta (f(s)-Kw(s))G(y(s)-K)\,\mathrm{d}s}_{C}. \quad (13)$$

Supposons qu'il existe K assez grand tel que $f(s)-Kw(s)\le 0$, pour tout $s\in I$ (on ne demande pas de vérifier l'existence d'un tel K ici !). Comme la fonction $G(\cdot)$ est positive (au sens large) sur $\mathbb{R}$, le terme (C) de l'égalité (13) est négatif pour un tel K. Le terme (A) de l'égalité (13) étant clairement positif, l'intégrale (B) est négative ou nulle. Or par hypothèse la fonction w est strictement positive sur I et la fonction $t\mapsto tG(t)$ positive sur $\mathbb{R}$ (c'est pour cela qu'on posait cette question évidente dans le III.2.2. !). Il en résulte que l'intégrale (B) est nulle. Comme la fonction sous le signe "intégral" est positive et continue, elle est nécéssairement nulle. Avec les propriétés de signe (12) de la fonction $t\mapsto tG(t)$ on conclut que

$$\forall t\in I \quad y(t)-K\le 0.$$

III.2.4. Comme w est strictement positive sur I, on dispose du réel

$$K=\max(\lambda,\mu,\sup_{t\in I}(f(t)/w(t))$$

On a alors, pour tout $t\in I$, $f(t)-Kw(t)\le 0$, puisque $K\ge f(t)/w(t)$ sur I. D'après la question III.2.3., on a alors

$$\forall t\in I \quad y(t)\le K=\max(\lambda,\mu,M/m).$$

Le problème $(\mathbf{P}_3)$ vérifie donc la propriété $(\mathbf{P}.\mathbf{M})$ avec $a=1$, $b=1//w(\cdot)$, $A=1$ et $B=1$. Selon la remarque faite en question I.3.4. (inégalité (6)), il en résulte la minoration

$$\forall t\in I \quad \min(\lambda,\mu,\inf_{s\in I}(f(t)/w(t)))\le y(t).$$

III.3. D'autres problèmes vérifiant (P.M)

On note que la fonction h est strictement positive sur I et de classe C^2 sur I. La fonction $1/h^2$ est donc définie sur I et de classe C^2. Ceci justifie, en particulier l'existence d'une primitive k de $1/h^2$.

III.3.1. La fonction k, de classe C^3, possède une dérivée (c'est $1/h^2$) strictement positive sur I. Elle est donc continue et strictement monotone sur I. On a donc, d'une part $k(I)=[\alpha',\beta']$ et d'autre part k est un C^3 difféomorphisme de I sur $k(I)$. Par ailleurs, pour tout $t\in I$, on a

$$\begin{aligned} y'(t) &= h'(t)z(k(t))+h(t)z'(k(t))k'(t)=h'(t)z(k(t))+\frac{1}{h(t)}z'(k(t)),\\ y''(t) &= h''(t)z(k(t))+h'(t)z'(k(t))k'(t)-\frac{h'(t)}{h^2(t)}z'(k(t))+\frac{1}{h(t)}z''(k(t))k'(t). \end{aligned}$$

D'où finalement $y''(t)=h''(t)z(k(t))+(1/h^3(t))z''(k(t))$. Si y est solution du problème $(\mathbf{P}_4)$, on obtient en remplacant

$$-(1/h^3(t))z''(k(t))+(-h''(t)+w(t)h(t))z(t)=f(t).$$

Posons alors $\widetilde{w}(x) = h^3(t)(-h''(t) + w(t)h(t))$ et $\widetilde{f}(x) = h^3(t)f(t)$, avec $t = k^{-1}(x)$. On constate donc, que la fonction $x \mapsto z(x)$ est solution du problème

$$(\widetilde{\mathbf{P}}_4) \quad \begin{cases} \forall x \in [\alpha', \beta'] & -z''(x) + \widetilde{w}(x)z(x) = \widetilde{f}(x) \\ z(\alpha') = \lambda & z(\beta') = \mu \end{cases} .$$

Réciproquement, il est clair que si la fonction $x \mapsto z(x)$ est solution du problème $(\widetilde{\mathbf{P}}_4)$ la fonction $t \mapsto y(t) = h(t)z(k(t))$ est solution du problème $(\mathbf{P}_4)$.

III.3.2. La fonction $x \mapsto \widetilde{w}(x)$ est strictement positive et continue sur $[\alpha', \beta']$: selon le III.1., le problème $(\widetilde{\mathbf{P}}_4)$ est un problème de type $(\mathbf{P}_3)$ et admet une unique solution pour tout triplet de données $(\lambda, \mu, \widetilde{f})$. Il en est de même donc du problème $(\mathbf{P}_4)$.
Les problèmes de type $(\mathbf{P}_3)$ vérifiant la propriété $(\mathbf{P}.\mathbf{M})$ avec $a = 1$, $b = 1/(\widetilde{w}(\cdot))$, $A = 1$ et $B = 1$, on a donc

$$\forall x \in [\alpha', \beta'] \quad z(x) \leq \max(\lambda, \mu, \sup_{\xi \in [\alpha', \beta']}(\widetilde{f}(\xi)/\widetilde{w}(\xi)).$$

D'où

$$\forall t \in [\alpha, \beta] \quad y(t) \leq h(t) \max\left(\lambda, \mu, \sup_{s \in [\alpha, \beta]}\left(\frac{f(s)}{-h''(s) + w(s)h(s)}\right)\right).$$

Le problème $(\mathbf{P}_4)$ vérifie donc la propriété $(\mathbf{P}.\mathbf{M})$.

III.3.3. *Application.- 1.* La fonction $t \mapsto w(t) + \pi^2/(\beta - \alpha)^2$ est continue, strictement positive sur $[\alpha, \beta]$. Soit m_0 son minimum (strictement positif) sur $[\alpha, \beta]$. Il existe $k \in]0, 1[$ tel que $\pi^2/(\beta - \alpha)^2 - km_0$ soit strictement positif. On pose alors $m = \sqrt{\pi^2/(\beta - \alpha)^2 - km_0}$. On a clairement $m < \pi/(\beta - \alpha)$ et donc

$$w + m^2 = w + \pi^2/(\beta - \alpha)^2 - km_0 \geq (1 - k)m_0 > 0.$$

2. La fonction h est de classe C^∞ et on constate facilement que $h(\alpha) = h(\beta) = 1$. Pour tout $t \in [\alpha, \beta]$, on a

$$(\alpha - \beta)/2 \leq t - (\alpha + \beta)/2 \leq (\beta - \alpha)/2,$$

puis, comme $0 < m < \pi/(\beta - \alpha)$, il vient

$$\forall t \in [\alpha, \beta] \qquad -\pi/2 < t - (\alpha + \beta)/2 < \pi/2,$$

et donc, pour tout $t \in [\alpha, \beta]$, $\cos(t - (\alpha + \beta)/2) > 0$ et $h(t) > 0$. Enfin, on a clairement $h'' = -m^2 h$. D'où

$$\forall t \in [\alpha, \beta] \qquad -h''(t) + w(t)h(t) = h(t)\left(m^2 + w(t)\right) > 0,$$

d'après le point *1.*de cette question.

3. Du point *2.* de cette question, il résulte que pour un problème $(\mathbf{P}_4)$ dans lequel la fonction w vérifie l'hypothèse de minoration

$$\forall t \in [\alpha, \beta] \quad w(t) > -\pi^2/(\beta - \alpha)^2, \tag{14}$$

il existe une fonction h vérifiant les hypothèses figurant en tête du III.3. et la condition $-h'' + wh > 0$ du III.3.2. : le problème $(\mathbf{P}_4)$ possède une solution unique, pour chaque triplet de données (λ, μ, f) et vérifie la propriété $(\mathbf{P}.\mathbf{M})$.

IV UNICITE DES SOLUTIONS DES PROBLEMES VERIFIANT (P.M)

IV.1. Unicité des solutions.

IV.1.1. Remarquons que l'E.D. (**E**) associée au problème (**P**) est linéaire donc $y = y_1 - y_2$ est une solution du problème (**P**) avec le triplet de données $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, $\mu = \mu_1 - \mu_2$ et $f = f_1 - f_2$. Le problème (**P**) vérifiant la propriété (**P.M**), il existe des fonctions positives a et b, des constantes positives A et B telles que on ait

$$\forall t \in I \qquad y(t) = y_1(t) - y_2(t) \leq a(t) \max\left(A\lambda, B\mu, \sup_{s\in I}(b(s)f(s))\right). \tag{15}$$

Par hypothèse sur les λ_i, μ_i et f_i $(i = 1, 2)$, le membre de droite de l'inégalité (15) est négatif. On a donc $y_1 - y_2 \leq 0$.

IV.1.2. S'il existe pour un triplet de données (λ, μ, f) deux solutions y_1 et y_2, ces deux solutions sont relatives au même triplet de données : selon IV.1.1., ces deux solutions vérifient donc $y_1 - y_2 \leq 0$ et $y_1 - y_2 \geq 0$. On a donc $y_1 = y_2$.

Remarque.- En I.3.4., on a montré qu'un problème vérifiant la propriété (**P.M**) vérifie aussi la propriété de minoration

$$a(t) \min\left(A\lambda, B\mu, \inf_{s\in I}(b(s)f(s))\right) \leq y(t).$$

On constate alors immédiatement que la solution relative au triplet de données $(0, 0, 0)$ est la solution nulle. Ceci donne une réponse plus satisfaisante à cette question IV.1.

IV.2. Un contre-exemple

Le problème (**P**) de cette question IV.2. s'écrit

$$\begin{cases} \forall t \in [\alpha, \beta] & y''(t) + \pi^2/(\beta-\alpha)^2 y(t) = -f(t)) \\ z(\alpha) = \lambda & z(\beta) = \mu \end{cases}.$$

Pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, la fonction *non nulle* $t \mapsto \gamma \sin(\frac{\pi}{\beta-\alpha}(t-\alpha))$ est solution du problème (**P**) relatif aux données $(0, 0, 0)$: pour ce triplet de données, le problème (**P**) possède plusieurs solutions et donc n'a pas la propriété d'unicité. D'après IV.1., le problème (**P**) ne possède alors pas la propriété (**P.M**).

Remarque.- La condition

$$\forall t \in [\alpha, \beta] \quad w(t) > -\pi^2/(\beta-\alpha)^2,$$

est donc optimale, pour qu'un problème (**P**) possède la propriété (**P.M**).

CAPES externe de Mathématiques
session 1996
deuxième composition

Enoncé

[0] [ag37e]

NOTATIONS DU PROBLÈME

Soit Π un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On notera d la distance sur Π. Si $\mathscr{R}$ est un sous-ensemble non vide de Π et M un point de Π, on notera $d(M, \mathscr{R})$ la distance de M à $\mathscr{R}$, définie par $d(M, \mathscr{R}) = \inf_{N \in \mathscr{R}} d(M, N)$. Étant donné un point M de Π et un réel positif r, on notera $\overline{B}(M; r)$ le disque fermé de centre M et de rayon r et $C(M; r)$ le cercle de centre M et de rayon r. Si r est strictement positif, on notera $B(M; r)$ le disque ouvert de centre M et de rayon r. Étant donné deux points A et B de Π, on note $[A, B]$ le segment d'extrémités A et B et on note $]A, B[$ ce segment privé de ses extrémités.

La frontière d'un sous-ensemble $\mathscr{R}$ de Π sera notée $\partial\mathscr{R}$: on rappelle qu'un point M appartient à $\partial\mathscr{R}$ si et seulement si tout disque ouvert de centre M contient au moins un point appartenant à $\mathscr{R}$ et au moins un point n'appartenant pas à $\mathscr{R}$. On a en particulier $\partial\overline{B}(M; r) = \partial B(M; r) = C(M; r)$.

Soit $\mathscr{R}$ un sous-ensemble borné non vide de Π. Pour tout point M de Π, on notera $n(M)$, avec éventuellement $n(M) = \infty$, le nombre des points T de $\partial\mathscr{R}$ tels que $d(M, \partial\mathscr{R}) = d(M, T)$. On appellera squelette de $\mathscr{R}$, et on notera $sq(\mathscr{R})$, le sous-ensemble des points M de $\mathscr{R}$ tels que $n(M) \geqslant 2$.

I. EXEMPLES DE SQUELETTES

I.1. Squelette d'un carré.

Dans cette question on désigne par $\mathscr{R}$ l'ensemble des points M du plan Π dont les coordonnées (x, y) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ vérifient $|x| < 1$ et $|y| < 1$. On note A, B, C et D les points de coordonnées respectives $(1, 1), (-1, 1), (-1, -1)$ et $(1, -1)$.

I.1.1. Démontrer que $\partial\mathscr{R}$ est la réunion des quatre segments $[A, B], [B, C], [C, D]$ et $[D, A]$.

I.1.2. Démontrer que si un point M de coordonnées (x, y) est intérieur au triangle OAD, on a alors $d(M, \partial\mathscr{R}) = 1 - x$ et $n(M) = 1$.

I.1.3. Démontrer que si un point M de coordonnées (x, y) appartient à $]O, A[$, on a alors $d(M, \partial\mathscr{R}) = 1 - x = 1 - y$ et $n(M) = 2$.

I.1.4. Calculer $n(O)$.

I.1.5. Démontrer que $sq(\mathscr{R}) =]A, C[\cup]B, D[$.

I.1.6. Démontrer que le squelette de l'intérieur d'un carré est la réunion de ses diagonales, sommets non compris.

I.2. Squelette d'un disque.

Dans cette question on désigne par $\mathscr{R}$ le disque ouvert $B(A; r)$.

I.2.1. Démontrer que si un point M appartient à $\mathscr{R}$ et est différent de A, on a alors $n(M) = 1$.

I.2.2. Calculer $n(A)$.

I.2.3. Quel est le squelette de $\mathscr{R}$?

I.3. Squelette d'un triangle.

Soit A, B et C trois points non alignés du plan Π. Un point du plan sera repéré par ses coordonnées barycentriques (α, β, γ) relativement aux points A, B et C, normalisées par $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Dans cette question, on désigne par $\mathscr{R}$ l'ensemble des points intérieurs au triangle ABC, c'est-à-dire l'ensemble des points de coordonnées barycentriques strictement positives. On notera $a = d(B, C)$, $b = d(C, A)$, $c = d(A, B)$ et S l'aire du triangle. On admet que $\partial\mathscr{R} = [A, B] \cup [B, C] \cup [C, A]$.

I.3.1. Soit M un point de $\mathscr{R}$ de coordonnées barycentriques (α, β, γ) relativement aux points A, B et C. Exprimer la distance de M à la droite (B, C) en fonction de a, α et S.

I.3.2. En déduire les coordonnées barycentriques du point I, centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

I.3.3. Démontrer qu'un point M appartient à l'intérieur du triangle IBC si et seulement si

$$\frac{\alpha}{a} < \min\left(\frac{\beta}{b}, \frac{\gamma}{c}\right).$$

I.3.4. Démontrer que, si M appartient à l'intérieur du triangle IBC, le produit scalaire $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC}$ est strictement positif. En déduire que $d(M, [B, C]) = d(M, (B, C))$ et que $n(M) = 1$.

I.3.5. Décrire le squelette de $\mathscr{R}$.

I.4. Squelette d'un parallélogramme.

On suppose le plan Π orienté. Soit A, B, C et D quatre points de Π tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $d(A,B) = 2\,d(A,D)$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = 2\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ et $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) > 0$.

I.4.1. Déterminer une mesure des angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD})$.

Dessiner un parallélogramme ABCD en indiquant l'orientation sur la figure.

I.4.2. Soit $\mathscr{R}$ l'ensemble des points intérieurs au parallélogramme ABCD. On admet que $\partial\mathscr{R} = [A, B] \cup [B, C] \cup [C, D] \cup [D, A]$.

Décrire $sq(\mathscr{R})$ sans expliciter votre démonstration et représenter $sq(\mathscr{R})$ sur la figure de la question précédente.

I.4.3. $sq(\mathscr{R})$ est une réunion de 5 segments, privée de 4 points. Calculer la longueur totale de $sq(\mathscr{R})$ en fonction de $l = d(A, D)$.

I.5. Squelette d'un domaine elliptique.

Soit a et b deux nombres réels tels que $a > b > 0$. On désigne par $\mathscr{R}$ l'ensemble des points M de Π dont les coordonnées (x, y) vérifient $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$. On admet que $\partial\mathscr{R}$ est l'ellipse de centre O, de demi-grand axe a et de demi-petit axe b admettant l'axe des x comme axe principal. On désigne par A et A′ les sommets du grand axe de cette ellipse, l'abscisse de A étant positive.

I.5.1. Déterminer le lieu géométrique $\mathscr{V}$ des points d'intersection de la droite (A, A′) avec la normale en M à $\partial\mathscr{R}$ quand M décrit $\partial\mathscr{R} - \{A, A'\}$.

I.5.2. Démontrer que $sq(\mathscr{R})$ est un segment privé de ses extrémités.

I.6. Squelette d'une tête de chat.

Soit B le point de coordonnées (0, 1) et U le point de coordonnées (0, 2). Les tangentes issues de U au cercle C (O; 1) rencontrent C (O; 1) en T et T′, l'abscisse de T étant positive. La parallèle à la droite (U, T′) menée de B coupe (U, T) en K et la parallèle à (U, T) menée de B coupe (U, T′) en K′. On désigne par Γ la courbe simple fermée constituée par les segments [T′, K′], [K′, B], [B, K], [K, T] et l'arc du cercle C (O; 1) d'extrémités T et T′ ne contenant pas B. On note $\mathscr{R}$ la région ouverte intérieure à Γ et on admet que $\partial\mathscr{R} = \Gamma$.

Tournez la page S.V.P.

I.6.1. Démontrer que $sq(\mathscr{R})$ est la réunion de deux segments et de deux arcs de conique, privée de 2 points. Déterminer les excentricités, les foyers et les directrices des deux coniques.

I.6.2. Démontrer que $sq(\mathscr{R})$ admet une tangente en chacun de ses points, sauf un.

I.6.3. Calculer la longueur de $sq(\mathscr{R})$ à 10^{-4} près.

II. UNE PROPRIÉTÉ DES SQUELETTES

Soit $\mathscr{R}$ un ouvert borné non vide de Π.

II.1. Disques contenus dans $\mathscr{R}$.

II.1.1. Démontrer que $\partial\mathscr{R}$ est un compact non vide, que $\mathscr{R} \cap \partial\mathscr{R}$ est vide et que la fermeture $\overline{\mathscr{R}}$ de $\mathscr{R}$ est compacte et est égale à $\mathscr{R} \cup \partial\mathscr{R}$.

II.1.2. On note φ l'application de Π dans l'ensemble des réels, définie par $\varphi(M) = d(M, \partial\mathscr{R})$. Démontrer que φ est continue.

II.1.3. Démontrer que, pour tout point M de $\mathscr{R}$, la boule ouverte $B(M; \varphi(M))$ est contenue dans $\mathscr{R}$.

II.1.4. Démontrer que, pour tout point M de $\mathscr{R}$ et tout réel $r > 0$, si la boule fermée $\overline{B}(M; r)$ est contenue dans $\mathscr{R}$, alors $\varphi(M) > r$.

En déduire que, pour tout point M de $\mathscr{R}$, la boule fermée $\overline{B}(M; \varphi(M))$ rencontre $\partial\mathscr{R}$ en au moins un point F.

II.2. Comment retrouver $\mathscr{R}$ à partir de son squelette et de l'application φ ?

Soit M_0 un point fixé de $\mathscr{R}$ et r un réel strictement positif tel que $\overline{B}(M_0; r) \subset \mathscr{R}$. On note $\mathscr{R}_0$ le sous-ensemble des points M de $\mathscr{R}$ tels que $\overline{B}(M_0; r) \subset \overline{B}(M; \varphi(M))$.

II.2.1. On suppose que M appartient à $\mathscr{R}_0$ et que $\overline{B}(M; \varphi(M)) \cap \partial\mathscr{R}$ ne contient qu'un seul point F. Démontrer que, quel que soit le réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout point P de $C(M; \varphi(M))$ vérifiant $d(F, P) \geqslant \varepsilon$, on ait $\varphi(P) > \alpha$.

En déduire, en choisissant ε assez petit, qu'il existe un point M' de la demi-droite d'origine F passant par M, appartenant à $\mathscr{R}_0$ et tel que $\varphi(M') > \varphi(M)$.

II.2.2 Démontrer que la restriction de l'application φ à $\mathscr{R}_0$ atteint sa borne supérieure en un point S_0 de $\mathscr{R}_0$.

II.2.3. Démontrer que S_0 appartient à $sq(\mathscr{R})$.

II.2.4. Démontrer que $\mathscr{R} = \bigcup_{S \in sq(\mathscr{R})} B(S; \varphi(S))$.

CAPES externe 1996 de Mathématiques deuxième composition

solution proposée par Dany-Jack Mercier

IUFM de Guadeloupe, Morne Ferret,
BP399, Pointe-à-Pitre cedex 97159,
dany-jack.mercier@univ-ag.fr

NB : Le sujet de l'épreuve n'est pas joint à ce document. Il pourra être téléchargé au format pdf sur le site http://perso.wanadoo.fr/megamaths/

[0] [ag37] v1.03

Solution de la deuxième composition du CAPES externe 1996

I.1.1 On se reporte à la figure 1. Par définition

$$\partial\mathcal{R} = \{M \in \Pi \,/\, \forall r > 0 \quad B(M,r) \cap \mathcal{R} \neq \emptyset \quad \text{et} \quad B(M,r) \cap C\mathcal{R} \neq \emptyset\}.$$

On envisage tous les cas :

- Si $M(x,y) \in \mathcal{R}$, alors $-1 < x < 1$ et $-1 < y < 1$. Choisissons

$$r = \inf(1-x, x+1, 1-y, y+1)$$

pour que $]x-r, x+r[\subset]-1,1[$ et $]y-r, y+r[\subset]-1,1[$. Alors la boule ouverte $B(M,r)$ est incluse dans $\mathcal{R}$ et n'interceptera pas $C\mathcal{R}$, de sorte que $M \notin \partial\mathcal{R}$.
Vérifions l'inclusion $B(M,r) \subset \mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} N(x',y') \in B(M,r) \quad &\Rightarrow \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2} < r \Rightarrow |x'-x| < r \text{ et } |y'-y| < r \\ &\Rightarrow N \in]x-r, x+r[\times]y-r, y+r[\subset]-1,1[\times]-1,1[= \mathcal{R}. \end{aligned}$$

NB : On vient de montrer que $\mathcal{R}$ est ouvert, ce qu'on aurait pu faire en écrivant $\mathcal{R}$ comme intersection d'images réciproques d'ouverts de $\mathbb{R}$ par des applications continues. Ici ces images réciproques sont quatre demi-plans ouverts.

- Si $M(x,y)$ vérifie $|x| > 1$ ou $|y| > 1$, on démontre de même l'existence de $r > 0$ tel que $B(M,r) \subset C\mathcal{R}$, ce qui entraîne $M \notin \partial\mathcal{R}$.

- Si $M(x,y) \in [AB] \cup [BC] \cup [CD] \cup [DA]$, supposons par exemple $M \in [AB]$. Pour tout $r \in]0,1[$, si $M \notin \{A,B\}$ on définit

$$N\left(x, y - \frac{r}{2}\right) \in \mathcal{R} \cap B(M,r) \text{ et } S\left(x, y + \frac{r}{2}\right) \in C\mathcal{R} \cap B(M,r)$$

et si $M = A$, on prend par exemple

$$N\left(1 - \frac{r}{2\sqrt{2}}, 1 - \frac{r}{2\sqrt{2}}\right) \in \mathcal{R} \cap B(M,r) \text{ et } S\left(1 + \frac{r}{2\sqrt{2}}, 1 + \frac{r}{2\sqrt{2}}\right) \in C\mathcal{R} \cap B(M,r).$$

Le cas $M = B$ étant identique, on a prouvé que

$$[AB] \cup [BC] \cup [CD] \cup [DA] \subset \partial\mathcal{R}.$$

- Conclusion :

$$\partial\mathcal{R} = [AB] \cup [BC] \cup [CD] \cup [DA].$$

I.1.2 • On aura besoin du lemme suivant :

[0] [ag37] v1.00 Dany-Jack Mercier

Lemme 1 : Si M est un point du plan et si D est une droite donnée, la distance de M à D est MH où H désigne la projection orthogonale de M sur D. De plus

$$\forall N \in D\backslash\{H\} \qquad MH < MN.$$

Preuve du lemme : Le Théorème de Pythagore montre que si $N \in D\backslash\{H\}$, $MN^2 = MH^2 + HN^2 > MH^2$ d'où $MH < MN$. ■

Si $M \in \mathcal{R}$ et si l'on note H_{AB},... les projections orthogonales resp. de M sur les droites (AB),... alors les projetés de M sur les supports des côtés de $\mathcal{R}$ seront dans $\partial\mathcal{R}$ et le lemme implique

$$\forall N \in \partial\mathcal{R}\backslash\{H_{AB}, H_{BC}, H_{CD}, H_{DA}\} \quad \inf(MH_{AB}, MH_{BC}, MH_{CD}, MH_{DA}) < MN$$

d'où

$$d(M, \partial\mathcal{R}) = \inf(MH_{AB}, MH_{BC}, MH_{CD}, MH_{DA}).$$

Cela prouve en particulier que $n(M) \leq 4$. En calculant

$$MH_{AB} = 1 - y, \quad MH_{BC} = x + 1, \quad MH_{CD} = y + 1, \quad MH_{DA} = 1 - x,$$

on obtient

$$d(M, \partial\mathcal{R}) = \inf(1 - y, x + 1, y + 1, 1 - x).$$

• Notons T_{OAD} l'intérieur du triangle OAD. Si $M(x, y) \in T_{OAD}$, alors $M \in \mathcal{R}$ et $-x < y < x$, donc

$$d(M, \partial\mathcal{R}) = \inf(1 - y, x + 1, y + 1, 1 - x) = 1 - x$$

et cette distance est atteint seulement en H_{DA}. Donc $n(M) = 1$. ■

I.1.3 Si $M(x, x)$ avec $0 < x < 1$,

$$d(M, \partial\mathcal{R}) = \inf(1 - y, x + 1, y + 1, 1 - x) = 1 - x = 1 - y$$

et cette borne inférieure est atteinte en exactement deux points H_{AB} et H_{DA} du bord $\partial\mathcal{R}$. Soit $n(M) = 2$.

I.1.4 La distance minimale

$$d(O, \partial\mathcal{R}) = \inf(1 - y, x + 1, y + 1, 1 - x) = \inf(1, 1, 1, 1) = 1$$

est atteinte en 4 points et 4 seulement, à savoir les $H_{AB}, H_{BC}, H_{CD}, H_{DA}$), donc $n(O) = 4$.

I.1.5 Immédiat d'après les questions précédentes : $Sq(\mathcal{R}) =]AC[\cup]BD[$.

I.1.6 Soit $\mathcal{R}'$ l'intérieur d'un carré $A'B'C'D'$que l'on peut supposer direct. Soit O' le centre de ce carré. Il existe une unique similitude directe s transformant O', A' respectivement en O, A. Par conservation des angles

$$\left.\begin{array}{l} \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{Os(B')}\right) = \left(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'}\right) = \frac{\pi}{2} \\ Os(B') = O'B'\frac{OA}{O'A'} = OA = OB \end{array}\right\} \Rightarrow s(B') = B$$

et ainsi de suite. s transforme $\mathcal{R}'$ en $\mathcal{R}$. Comme s conserve les rapports de distances, elle fera se correspondre les squelettes des deux ensembles $\mathcal{R}'$ en $\mathcal{R}$. D'où le résultat.

NB : Détaillons cette dernière affirmation, même si cela prendrai trop du temps en situation de concours... s est affine donc conserve les barycentres, par suite $s(\mathcal{R}') = \mathcal{R}$ et $s(\partial\mathcal{R}') = \partial\mathcal{R}$. Ensuite

$$\begin{aligned}\left(M' \in Sq\mathcal{R}'\right) &\Leftrightarrow \begin{cases} M' \in \mathcal{R}' \\ \exists U', V' \in \partial\mathcal{R}' \quad U' \neq V' \quad d(M', \partial\mathcal{R}') = M'U' = M'V' \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} M = s(M') \in \mathcal{R} \\ \exists U, V \in \partial\mathcal{R} \quad U \neq V \quad d(M, \partial\mathcal{R}) = MU = MV \end{cases} \\ &\Leftrightarrow M = s\left(M'\right) \in Sq\mathcal{R}.\end{aligned}$$

Cela prouve que $s(Sq\mathcal{R}') = Sq\mathcal{R}$ soit

$$Sq\mathcal{R}' = s^{-1}(Sq\mathcal{R}) = s^{-1}([AC] \cup [BD]) = \left[A'C'\right] \cup \left[B'D'\right]. \blacksquare$$

I.2.1 Si $M \in \mathcal{R} = B(A, r)$, notons B l'intersection de la demi-droite $[AM)$ et du cercle $\partial\mathcal{R} = \mathcal{C}(A, r)$. Pour tout $T \in \partial\mathcal{R}\backslash\{B\}$, on a $M \notin [AT]$ donc

$$MT > AT - MA = r - MA = MB.$$

Cela prouve que la distance $d(M, \partial\mathcal{R})$ est atteinte au seul point B, et $n(M) = 1$.

I.2.2 $n(A) = \infty$.

I.2.3 $Sq(\mathcal{R}) = \{A\}$.

I.3.1 (Voir figure 2) Soient H_A le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC, et H le projeté orthogonal de M sur (BC). Notons T le projeté orthogonal de M sur (AH_A). MTH_AH est un rectangle car possède 3 angles droits. Projetons orthogonalement l'égalité vectorielle

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$$

sur la hauteur (AH_A). On trouve

$$\alpha\overrightarrow{TA} + \beta\overrightarrow{MH} + \gamma\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{0}.$$

Comme $\overrightarrow{TA} = \overrightarrow{TH_A} + \overrightarrow{H_AA} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H_AA}$,

$$(\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MH} + \alpha\overrightarrow{H_AA} = \overrightarrow{0} \Rightarrow MH = \alpha H_AA.$$

Compte tenu de $S = \frac{a.H_AA}{2}$,

$$d(M, (BC)) = MH = \frac{2\alpha S}{a}.$$

I.3.2 I est caractérisé par $d(M, (BC)) = d(M, (CA)) = d(M, (AB))$. Les coordonnées (α, β, γ) de I vérifieront donc

$$\frac{2\alpha S}{a} = \frac{2\beta S}{b} = \frac{2\gamma S}{c}$$

et (α,β,γ) sera proportionnel à (a,b,c). I admet les coordonnées barycentriques (a,b,c) dans le repère affine (A,B,C).

I.3.3 M est à l'intérieur du triangle IBC si, et seulement si, M est barycentre de I,B,C affectés de coefficients strictement positifs. Supposons que M soit barycentre de $I(\alpha')$, $B(\beta')$, $C(\gamma')$. $M\in T_{ABC}$ donc $\alpha'\neq 0$ et quitte à diviser tous les coefficients par α', on peut supposer

$$M \text{ barycentre de } I(1),\ B(\beta'),\ C(\gamma').$$

Comme I est barycentre de $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, on déduit

$$\begin{array}{ll} \overrightarrow{MI}+\beta'\overrightarrow{MB}+\gamma'\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0} & \\ \frac{a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}}{a+b+c}+\beta'\overrightarrow{MB}+\gamma'\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0} & \\ a\overrightarrow{MA}+\left(b+\beta's\right)\overrightarrow{MB}+\left(c+\gamma's\right)\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0} & \quad\text{en posant } s=a+b+c \end{array}$$

et la proportionnalité

$$\frac{a}{\alpha}=\frac{b+\beta's}{\beta}=\frac{c+\gamma's}{\gamma}$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l}\beta'=\frac{a\beta-\alpha b}{\alpha s}\\ \gamma'=\frac{a\gamma-\alpha c}{\alpha s}.\end{array}\right.$$

On peut donc affirmer

$$M\in T_{IBC}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\beta'>0\\ \gamma'>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{\beta}{b}>\frac{\alpha}{a}\\ \frac{\gamma}{c}>\frac{\alpha}{a}\end{array}\right.\Leftrightarrow\frac{\alpha}{a}<\min\left(\frac{\beta}{b},\frac{\gamma}{c}\right).$$

NB : Comme $d(M,(BC))=\frac{2\alpha S}{a}$ ..., on vient de prouver que si M appartient à T_{IBC}, alors $d(M,(BC))<\min\left(d(M,(AB)),d(M,(AC))\right)$ ce que nous utiliserons dans la question suivante. Cela montre aussi le lemme ci-dessous qui permet de se représenter les squelettes du parallélogramme et de la tête de chat :

Lemme 2 : Une bissectrice $[BI)$ du couple de demi-droites $([BA),[BC))$ partage le secteur angulaire $\left[\widehat{ABC}\right]$ contenant $[BI)$ en deux secteurs ouverts, l'un formé des points strictement plus proches de la droite (BA) que de (BC), et l'autre formé des points strictement plus proches de la droite (BC) que de (BA).

I.3.4 Si $M\in T_{IBC}$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC} &= \left(\alpha\overrightarrow{BA}+\gamma\overrightarrow{BC}\right).\overrightarrow{BC}=\alpha\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}+\gamma\overrightarrow{BC}^2\\ &= \alpha ca\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)+\gamma a^2\\ &= a^2c\left(\frac{\alpha}{a}\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)+\frac{\gamma}{c}\right)\geq a^2c\left(-\frac{\alpha}{a}+\frac{\gamma}{c}\right)>0\quad\text{d'après I.3.3.}\end{aligned}$$

On déduit

$$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC}>0$$

donc $H \in]BC)$. On montrerait de même que $H \in]CB)$, de sorte que $H \in]BC[$ et que la distance de M au segment $[BC]$ soit atteinte en H et soit égale à $d(M,(BC))$. Compte tenu des lemmes 1 et 2, on déduit $n(M) = 1$.

I.3.5 • D'après la question précédente,

$$Sq(\mathcal{R}) \subset [IA[\cup [IB[\cup [IC[.$$

• Les projetés orthogonaux de I sur les côtés du triangle ABC appartiennent à ces côtés : pour le voir, on procède comme en I.3.4 mais cette fois-ci avec $(\alpha,\beta,\gamma) = (a,b,c)$. Si H est le projeté orthogonal de I sur (BC) :

$$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BC} = \left(\frac{a\overrightarrow{BA} + c\overrightarrow{BC}}{a+b+c}\right).\overrightarrow{BC} = \frac{a^2c}{a+b+c}\left(\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) + 1\right) > 0.$$

Ainsi

$$d(M,[BC]) = d(M,(BC)) = \frac{2\alpha S}{a}$$

est atteint seulement en MH. I étant à égale distance des supports des côtés, on déduit $n(I) = 3$.

• Si $M \in]IB[$, comme (IB) est une bissectrice du couple de droites $((BA),(BC))$, I sera à égale distance de (BA) et (BC). Comme les projetés orthogonaux de I sur les côtés du triangle ABC appartiennent à ces côtés (ouverts), le théorème de Thalès prouve que la projection orthogonale H_1 (resp. H_2) de M sur (BC) (resp. (BA)) appartient au segment $]BC[$ (resp. $]BA[$). Donc

$$d(M,[BC]) = d(M,(BC)) = d(M,(BA)) = d(M,[BA]),$$

le minimum étant atteint au moins en H_1 et H_2. Soit $n(M) \geq 2$.

Conclusion : $Sq(\mathcal{R}) = [IA[\cup [IB[\cup [IC[$

NB : Si $M \in]IB[$, $n(M) = 2$ car $d(M,(AC)) > d(M,(BC))$, la bissectrice (CI) partageant le secteur $\left[\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right]$ en deux parties, l'une formée des points strictement plus proches de (BC) que de (CA), et l'autre formée des points strictement plus proches de (CA) que de (BC).

I.4.1 (Voir figure 3) De

$$\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) = \pi \quad (2\pi)$$

et

$$\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right) = 2\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) \quad (2\pi)$$

on tire

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \qquad k \in \mathbb{N}$$

La condition $\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) > 0$ entraîne

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi) \qquad \text{et} \qquad \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right) = \frac{2\pi}{3} \quad (2\pi)$$

Dans le triangle ABD,

$$\left(\frac{AD}{\sin\widehat{B}}=\frac{AB}{\sin\widehat{D}}=\frac{BD}{\sin\widehat{A}}\right)\Rightarrow\frac{AD}{\sin\widehat{B}}=\frac{2.AD}{\sin\left(\pi-\widehat{B}-\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\Rightarrow 2\sin\widehat{B}=\sin\left(\widehat{B}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\widehat{B}\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cos\widehat{B}$$

$$\Rightarrow 2\sin\widehat{B}=\frac{1}{2}\sin\widehat{B}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\widehat{B}\Rightarrow\tan\widehat{B}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \widehat{B}=\frac{\pi}{6}.$$

Comme les mesures principales des angles du triangle direct BDA sont toutes dans $[0,\pi]$, on aura

$$\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}\right)=\frac{\pi}{6}\quad(2\pi).$$

On déduit

$$\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right)=\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)-\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}\right)=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\quad(2\pi)$$

comme le montre la figure 3.

I.4.2 $Sq(\mathcal{R})$ est formé de certains points situés sur les bissectrices des côtés consécutifs du parallèlogramme, où sur la droites des points équidistants des supports des côtés parallèles (AB) et (CD). On obtient la réunion de 5 segments moins 4 points :

$$Sq(\mathcal{R})=]AU]\cup]DU]\cup]BV]\cup]CV]\cup[UV].$$

Ces segments sont dessinés sur la figure 3.

I.4.3 Par symétrie

$$\operatorname{long}(Sq(\mathcal{R}))=2AU+2DU+UV.$$

AMD est équilatéral puisque

$$\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{3}\quad\text{et}\quad\left(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MA}\right)=2\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}\right)=2\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3},$$

la seconde affirmation provenant du théorème de l'angle inscrit dans le triangle rectangle BDA. Ainsi

$$DM=l,\quad DU=\frac{l}{2}\quad\text{et}\quad AU=\frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Comme $UV=MB=l$, on trouve

$$\operatorname{long}(Sq(\mathcal{R}))=\left(2+\sqrt{3}\right)l.$$

I.5.1 $N(x_N,0)$ appartient à $\mathcal{V}$ si et seulement si il existe $M(x,y)\in\partial\mathcal{R}\setminus\{A,A'\}$ tel que (MN) soit la normale à $\partial\mathcal{R}$ en M. Comme l'ellipse $\partial\mathcal{R}$ d'équation $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ admet en $M(x,y)$ une tangente

d'équation $\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}=1$, on obtient

$$\begin{aligned} N(x_N,0)\in\mathcal{V} &\Leftrightarrow \exists M(x,y)\in\partial\mathcal{R}\backslash\{A,A'\} \quad \begin{vmatrix} x_N-x & \dfrac{x}{a^2} \\ -y & \dfrac{y}{b^2}\end{vmatrix}=0 \\ &\Leftrightarrow \exists x\in\,]-a,a[\quad x_N=\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x \\ &\Leftrightarrow \exists x\in\,]-a,a[\quad x_N=\frac{c^2}{a^2}x \\ &\Leftrightarrow x_N\in\,]-\frac{c^2}{a},\frac{c^2}{a}[, \end{aligned}$$

en posant $c=\sqrt{a^2-b^2}$ (demi-distance entre les foyers de l'ellipse). $\mathcal{V}$ est donc un segment ouvert inclus dans l'axe focal (AA').

Remarques : α) Pour retrouver une équation de la tangente à l'ellipse $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ en $M(x,y)$, on peut par exemple :

- utiliser un théorème du cours qui donne la forme générale de l'équation de la tangente à une courbe d'équation $f(X,Y)=0$ en un point régulier, à savoir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)(Y-y)=0.$$

Il suffit alors de remplacer avec $f(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$.

- rappeler que Y est une fonction dérivable de X lorsque X décrit $]-a,a[$. En dérivant $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$, on trouve $\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0$ soit $y'=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$. Comme la tangente en M admet l'équation $Y=y'(X-x)+y$, il suffit de remplacer.

β) Une autre façon de répondre à la question consiste à utiliser des équations paramétriques de l'ellipse $\partial\mathcal{R}$, par exemple

$$\begin{cases} x(t)=a\cos t \\ y(t)=b\sin t \quad \text{où } t\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Le vecteur $(-a\sin t,b\cos t)$ dirige la tangente à $\partial\mathcal{R}$ en $M(a\cos t,b\sin t)$, donc $\overrightarrow{MN}$ sera normal à $\partial\mathcal{R}$ en M si

$$\begin{pmatrix} x_N-x \\ -y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t\end{pmatrix}=0$$

c'est-à-dire successivement

$$\begin{aligned} x_N a\sin t &= ax\sin t-by\cos t \\ x_N a\sin t &= a^2\sin t\cos t-b^2\sin t\cos t \\ x_N a\sin t &= c^2\sin t\cos t. \end{aligned}$$

Comme $\sin t\neq 0$ (puisque N distinct de A et A'), on obtient

$$N(x_N,0)\in\mathcal{V}\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}\quad x_N=\frac{c^2}{a}\cos t\Leftrightarrow x_N\in\,]-\frac{c^2}{a},\frac{c^2}{a}[.$$

γ) Attention aux déductions hâtives. Voici l'extrait d'une copie rédigée par une étudiante :

Soit M appartenant à $\partial\mathcal{R}$, donc M appartient à l'ellipse de centre O et de foyers F, F' avec $F(c)$, $c>0$. On sait que la normale en M à l'ellipse est la bissectrice intérieure du triangle MFF', donc coupe (AA') en un point de $[FF']$. La réunion de toutes ces intersections sera donc égale au segment $[FF']$. Ainsi $\mathcal{V}=[FF']$.

Où est l'erreur ?[1]

$\boxed{\text{I.5.2}}$ • Si $N\in\mathcal{V}$, conservons les notations de la question précédente et notons $M(x,y)$ le point de $\partial\mathcal{R}$ tel que (MN) soit normale à $\partial\mathcal{R}$. On rappelle que

$$N\left(\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x,0\right).$$

De façon générale, si A est un point et r un réel positif, notons $B(A,r)$ et $\overline{B}(A,r)$ les boules ouvertes et fermées de centre A et de rayon r. On montre que :

$$B(N,NM)\subset\mathcal{R}\quad\text{et}\quad\overline{B}(N,NM)\cap\partial\mathcal{R}=\{M,s(M)\},$$

où s désigne la réflexion par rapport à (AA').
En effet, si $M'(x',y')$ vérifie $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$,

$$\begin{aligned}
NM^2<NM'^2 &\Leftrightarrow (x-x_N)^2+y^2<\left(x'-x_N\right)^2+y'^2\\
&\Leftrightarrow \frac{b^4}{a^4}x^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)<\left(x'-x+\frac{b^2}{a^2}x\right)^2+b^2\left(1-\frac{x'^2}{a^2}\right)\\
&\Leftrightarrow -b^2\frac{x^2}{a^2}<\left(x'-x\right)^2+2\frac{b^2}{a^2}x\left(x'-x\right)-b^2\frac{x'^2}{a^2}\\
&\Leftrightarrow 0<\left(x'-x\right)^2+\frac{b^2}{a^2}\left(2xx'-x^2-x'^2\right)\\
&\Leftrightarrow 0<\left(x'-x\right)^2-\frac{b^2}{a^2}\left(x'-x\right)^2=\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\left(x'-x\right)^2.
\end{aligned}$$

La dernière inégalité est toujours vraie lorsque $x'\neq x$ (puisque $0<\frac{b}{a}<1$), c'est-à-dire lorsque $M'\in\partial\mathcal{R}\backslash\{M,s(M)\}$. Par suite

$$\forall M'\in\partial\mathcal{R}\backslash\{M,s(M)\}\qquad NM<NM'.$$

Par symétrie, $NM=Ns(M)$, et l'on peut affirmer que la borne inférieure $\operatorname{Inf}\{NM'\,/\,M'\in\partial\mathcal{R}\}$ est atteinte en exactement deux points : M et $s(M)$. Ainsi $N\in Sq(\mathcal{R})$, et l'on a prouvé l'inclusion $\mathcal{V}\subset Sq(\mathcal{R})$.

• Si $T\in\mathcal{R}\backslash(AA')$ il existe un point M de $\partial\mathcal{R}$ tel que la normale Δ à $\partial\mathcal{R}$ en M passe par T, coupe l'axe focal (AA') en $N\in\mathcal{V}$ et vérifie $T\in[MN]$ (FIG. 2.a). Le Lemme 1 montre alors que

$$B(T,TM)\subset B(N,NM)\subset\mathcal{R}\quad\text{et}\quad\overline{B}(T,TM)\cap\partial\mathcal{R}=\{M\}.$$

[1] On a seulement montré l'inclusion $\mathcal{V}\subset[FF']$. La réciproque n'est pas envisagée. On vérifie par ailleurs que $]-c^2/a,c^2/a[\subset[-c,c]$, puisque $c<a$ (l'excentricité $e=c/a$ d'une ellipse est <1), ce qui est heureux car non contradictoire...

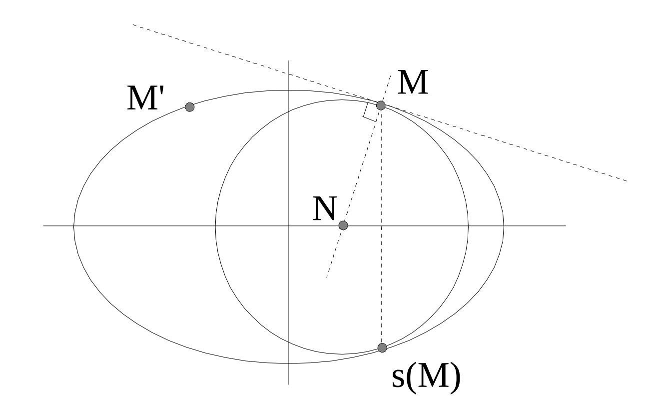


Figure 1: $B(N, NM) \subset \mathcal{R}$

La distance $d(T, \partial\mathcal{R})$ n'est alors atteinte qu'en un point, et $T \notin Sq(\mathcal{R})$.

• Si $T \in]AA'[\backslash\mathcal{V}$, par exemple si $T \in [N_2, A[$ où l'on pose $\mathcal{V} =]N_1, N_2[$ (FIG. 2.b), les Lemmes 1 et 2 donnent

$$B(T, TA) \subset B(N_2, N_2A) \subset \mathcal{R}$$

et

$$\overline{B}(T, TA) \cap \partial\mathcal{R} = \overline{B}(N_2, N_2A) \cap \partial\mathcal{R} = \{A\}.$$

La distance $d(T, \partial\mathcal{R})$ n'est donc atteinte qu'en un point, et $T \notin Sq(\mathcal{R})$.

Conclusion : $Sq(\mathcal{R}) = \mathcal{V}$ est bien un segment ouvert inclus dans l'axe focal.

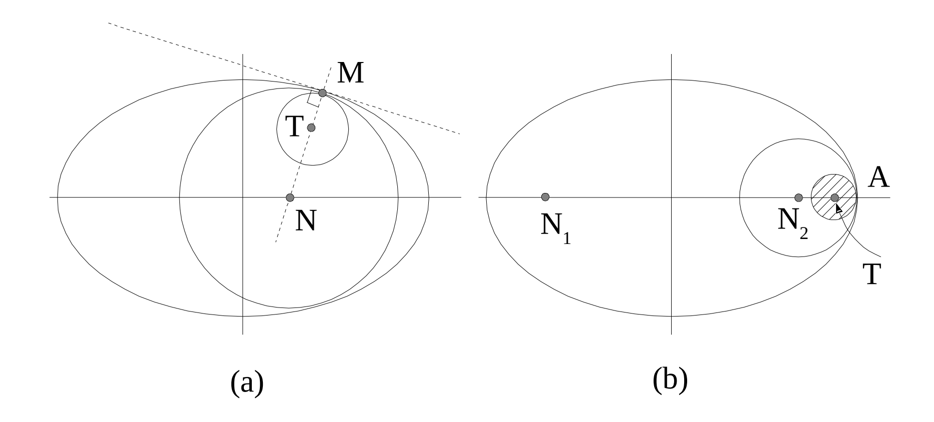


Figure 2: Les deux autres cas

Voici les résultats que nous avons utilisés :

Lemme 1 : Si $C(O, r)$ et $C'(O', r')$ sont des cercles de centres O et O', de rayons r et r', tangents intérieurement en A avec $OO' = r - r'$, alors $B(O', r') \subset B(O, r)$.

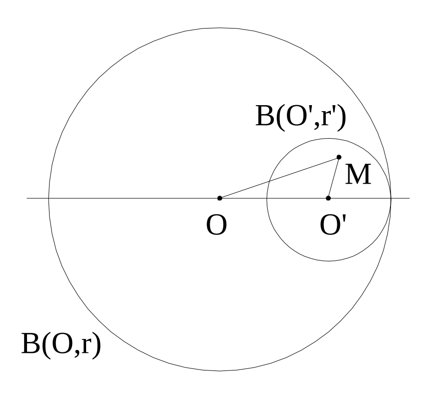


Figure 3: $B(O', r') \subset B(O, r)$

Preuve : On a (FIG. 3)

$$\begin{aligned} M \in B\left(O', r'\right) &\Leftrightarrow O'M < r' \\ &\Rightarrow OM \leq OO' + O'M < \left(r - r'\right) + r' \\ &\Rightarrow OM < r \Leftrightarrow M \in B(O, r) . \blacksquare \end{aligned}$$

Lemme 2 : $B(N_2, N_2A) \subset \mathcal{R}$ et $\overline{B}(N_2, N_2A) \cap \partial\mathcal{R} = \{A\}$.
Preuve : Rappelons que $N_2 = \left(c^2/a, 0\right)$.
• Montrer $B(N_2, N_2A) \subset \mathcal{R}$ revient à montrer l'implication

$$(x, y) \in B(N_2, N_2A) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1.$$

autrement dit, puisque $N_2A^2 = \left(a - \frac{c^2}{a}\right)^2 = \frac{b^4}{a^2}$,

$$\left(x - \frac{c^2}{a}\right)^2 + y^2 < \frac{b^4}{a^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1. \quad (\dagger)$$

Sous l'hypothèse $(x - \frac{c^2}{a})^2 + y^2 < \frac{b^4}{a^2}$, on a toujours

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < \frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{b^2}\left(\frac{b^4}{a^2} - \left(x - \frac{c^2}{a}\right)^2\right),$$

si bien que (†) sera démontré si l'on prouve que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{b^2}\left(\frac{b^4}{a^2} - \left(x - \frac{c^2}{a}\right)^2\right) \leq 1. \quad (\ddagger)$$

Après simplifications, on trouve

$$(\ddagger) \Leftrightarrow c^2x^2 - 2ac^2x + a^2c^2 \geq 0 \Leftrightarrow (cx - ac)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - a)^2 \geq 0,$$

de sorte que (‡) soit vraie et que l'on puisse conclure.

- $M(x,y) \in \overline{B}(N_2, N_2A) \cap \partial\mathcal{R}$ si et seulement si

$$\left(x - \frac{c^2}{a}\right)^2 + y^2 \leq \frac{b^4}{a^2} \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Il suffit d'adapter légèrement les lignes écrites dans la preuve du Lemme 1 pour conclure. Sous l'hypothèse $(x - \frac{c^2}{a})^2 + y^2 \leq \frac{b^4}{a^2}$, on a toujours

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{b^2}\left(\frac{b^4}{a^2} - \left(x - \frac{c^2}{a}\right)^2\right),$$

et l'on a vu que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{b^2}\left(\frac{b^4}{a^2} - \left(x - \frac{c^2}{a}\right)^2\right) \leq 1 \Leftrightarrow (x-a)^2 \geq 0$, de sorte que l'on ait toujours

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{b^2}\left(\frac{b^4}{a^2} - \left(x - \frac{c^2}{a}\right)^2\right) \leq 1,$$

et que l'égalité $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ soit vraie si et seulement si

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{b^2}\left(\frac{b^4}{a^2} - \left(x - \frac{c^2}{a}\right)^2\right) = 1.$$

On vérifie encore que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{b^2}\left(\frac{b^4}{a^2} - \left(x - \frac{c^2}{a}\right)^2\right) = 1 \;\Leftrightarrow\; (x-a)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = a,$$

et l'on en déduit

$$M(x,y) \in \overline{B}(N_2, N_2A) \cap \partial\mathcal{R} \quad \Leftrightarrow \quad x = a \quad \Leftrightarrow \quad M = A. \blacksquare$$

I.6.1 (Voir figure 4) Les points du squelette de la tête de chat sont ceux dont la distance au bord est atteinte en au moins deux points du bord : on trouve

- un segment $]K', A]$ situé sur la bissectrice du couple de demi-droites $([K'T'[, [K'B[)$, où A est le point de cette bissectrice qui se projette orthogonalement sur B,

- les points situés à égale distance de B et de la droite $(T'U)$ tout en appartenant à l'intérieur du triangle $OT'B$. Il s'agit de l'arc $\mathcal{C}$ de la parabole $\mathcal{P}$ de foyer B et de directrice $(T'U)$ délimité par les points A et O. C'est une conique d'excentricité $e = 1$,

- les symétriques des deux ensembles ci-dessus par rapport à (Oy).

Ainsi, en notant s la réflexion par rapport à (Oy),

$$Sq(\mathcal{R}) =]K', A] \cup \mathcal{C} \cup s\left(]K', A]\right) \cup s(\mathcal{C}).$$

Cette ensemble est dessiné à la figure 4.

I.6.2 Le seul point anguleux de $Sq(\mathcal{R})$ est O. Pour le voir, on vérifie que $Sq(\mathcal{R})$ admet une tangente en A, seul point de jonction entre le segment et la parabole dans le demi-plan $x \leq 0$.
Notons H_A (resp. H_B) la projection orthogonale de A (resp. B) sur $(T'U)$. La tangente en A à $\mathcal{P}$ est la médiatrice de $[H_A B]$ (propriété des paraboles), c'est donc aussi $(K'A)$.

I.6.3 • Equation de $(T'U)$: Soit $(\Delta) : y = mx+2$ une droite passant par $B(0,2)$. Elle sera tangente au cercle $C(0,1)$ si, et seulement si, elle coupe ce cercle en un unique point. On a

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=mx+2 \end{cases} \Rightarrow \left(1+m^2\right)x^2+4mx+3=0. \qquad (*)$$

Le discriminant réduit vaut $\Delta' = m^2-3$, et s'annule pour $m = \pm\sqrt{3}$. L'équation de $(T'U)$ sera

$$\left(T'U\right): \quad y = \sqrt{3}x+2.$$

Si $m=\sqrt{3}$, l'unique solution de $(*)$ est $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où

$$T'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Ainsi $\overrightarrow{u}\left(1,\sqrt{3}\right)$ (resp. $\overrightarrow{u'}\left(1,-\sqrt{3}\right)$) est un vecteur directeur de $(T'U)$ (resp. (TU)).

• Coordonnées de K' : $K'\left(x, \sqrt{3}x+2\right)$ vérifie

$$\det\left(\overrightarrow{BK'}, \overrightarrow{u}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 \\ \left(\sqrt{3}x+2\right)-1 & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{6},$$

donc

$$K'\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{3}{2}\right).$$

• Coordonnées de A : comme $(K'A)$ est verticale, $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, y\right)$ avec

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{BA} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ y-1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{6}$$

donc

$$A\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{5}{6}\right).$$

• Coordonnées de H_A : H_A et B ont même ordonnée, donc $H_A(x,1)$ avec

$$1 = \sqrt{3}x+2 \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

donc

$$H_A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right).$$

• Longueur de $[K'A]$:

$$K'A = \frac{2}{3}.$$

• Longueur de $\mathcal{C}$:

Lemme : La longueur de la portion de la parabole d'équation $y^2 = 2px$ dans un repère orthonormal située entre les points d'ordonnées t_1 et t_2 $(t_1 < t_2)$ est

$$l = \frac{p}{2}\left[u + \frac{\operatorname{sh} 2u}{2}\right]_{u_1}^{u_2} \qquad \text{où} \quad t_i = p \operatorname{sh} u_i$$

Preuve du lemme : On paramètre la parabole par

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \left(\frac{t^2}{2p}, t\right) \end{array}$$

d'où $f'(t) = \left(\frac{t}{p}, 1\right)$ et

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \left\|f'(t)\right\| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \frac{t^2}{p^2}}\, dt = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 u}\, p \operatorname{ch} u \, du$$

avec le changement de variable $t = p \operatorname{sh} u$. Soit

$$l = p \int_{u_1}^{u_2} \operatorname{ch}^2 u \, du = p\left[\frac{u}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2u}{4}\right]_{u_1}^{u_2}.$$

et le résultat. ■

La longueur $l(\mathcal{C})$ de notre portion de parabole sera obtenue pour

$$\begin{cases} t_1 = H_B H_A \\ t_2 = H_B T' \\ p = H_B B = \text{ paramètre de } \mathcal{P}. \end{cases}$$

On calcule les coordonnées de H_B : $H_B\left(x, x\sqrt{3} + 2\right)$ satisfait

$$\overrightarrow{BH_B}.\overrightarrow{u'} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ x\sqrt{3} + 2 - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

et

$$H_B\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{5}{4}\right).$$

On calcule encore

$$\begin{cases} t_1^2 = H_B H_A^2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{4} - 1\right)^2 = \frac{1}{12} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ t_2^2 = H_B T'^2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow t_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ p^2 = H_B B^2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{4} - 1\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow p = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ainsi, en posant

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{sh} u_1 \quad \text{et} \quad \sqrt{3} = \operatorname{sh} u_2,$$

$$l(\mathcal{C}) = \frac{p}{2}\left[u + \frac{\operatorname{sh} 2u}{2}\right]_{u_1}^{u_2} = \frac{1}{4}\left(\operatorname{argsh}\sqrt{3} - \operatorname{argsh}\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}(\operatorname{sh} 2u_2 - \operatorname{sh} 2u_1)\right).$$

Comme

$$\operatorname{sh} 2u = 2\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u = 2\operatorname{sh} u\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u},$$

on trouve

$$\begin{cases} \operatorname{sh} 2u_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{1+\frac{1}{3}} = \frac{4}{3} \\ \operatorname{sh} 2u_2 = 2\sqrt{3}\sqrt{1+3} = 4\sqrt{3}. \end{cases}$$

En prenant $\operatorname{argsh}\sqrt{3} \simeq 1,316958$ et $\operatorname{argsh}\frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0,549306$, on trouve $l(\mathcal{C}) \simeq 0,891271$.

• Longueur de $Sq(\mathcal{R})$: Ensuite

$$l(Sq(\mathcal{R})) \simeq 2\left(l(\mathcal{C}) + \frac{2}{3}\right) \simeq 3,115874 \simeq 3,1159$$

où cette longueur est exprimée en "unités de mesures" données par le repère orthonormal. Cela semble correspondre au dessin.

II.1.1 Notons tout d'abord que pour toute partie $\mathcal{R}$ du plan :

$$\partial\mathcal{R} = \left\{M \in \Pi \,/\, \forall r > 0 \quad B(M,r) \cap \mathcal{R} \neq \emptyset \text{ et } B(M,r) \cap \complement\mathcal{R} \neq \emptyset\right\},$$

de sorte que $\partial\mathcal{R} = \overline{\mathcal{R}} \cap \overline{\complement\mathcal{R}} = \overline{\mathcal{R}} \cap \complement\overset{o}{\mathcal{R}} = \overline{\mathcal{R}} \setminus \overset{o}{\mathcal{R}}$.

• $\partial\mathcal{R} = \overline{\mathcal{R}} \cap \overline{C\mathcal{R}}$ est fermé comme réunion de deux fermés. Comme $\mathcal{R}$ est borné, il existe $R > 0$ tel que $\mathcal{R} \subset \overline{B}(O,R)$. $\overline{\mathcal{R}}$ étant par définition le plus petit fermé contenant $\mathcal{R}$, on obtient $\overline{\mathcal{R}} \subset \overline{B}(O,R)$, donc $\partial\mathcal{R} \subset \overline{\mathcal{R}} \subset \overline{B}(O,R)$, et $\partial\mathcal{R}$ est borné. Finalement $\partial\mathcal{R}$ est un fermé borné de Π, donc un compact de Π.

Remarque : $\partial\mathcal{R} = \overline{\mathcal{R}} \cap \overline{\complement\mathcal{R}}$ entraîne $\complement\partial\mathcal{R} = \complement\overline{\mathcal{R}} \cup \complement(\overline{\complement\mathcal{R}}) = \overset{o}{\overbrace{\complement\mathcal{R}}} \cup \overset{o}{\mathcal{R}}$. Par définition, l'intérieur du complémentaire de $\mathcal{R}$ est appelé "extérieur de $\mathcal{R}$ " et noté $\overset{\bullet}{\mathcal{R}}$. L'intérieur, la frontière et l'extérieur de $\mathcal{R}$ définissent donc une partition de Π, et l'on retient :

$$\Pi = \overset{o}{\mathcal{R}} \bigsqcup \partial\mathcal{R} \bigsqcup \overset{\bullet}{\mathcal{R}} \qquad \text{où} \quad \overset{\bullet}{\mathcal{R}} = \overset{o}{\overbrace{\complement\mathcal{R}}}.$$

• $\partial\mathcal{R}$ n'est pas vide, sinon $\partial\mathcal{R} = \overline{\mathcal{R}} \cap \overline{\complement\mathcal{R}} = \overline{\mathcal{R}} \setminus \overset{o}{\mathcal{R}} = \varnothing$ entraîne $\overline{\mathcal{R}} = \overset{o}{\mathcal{R}}$. Comme $\mathcal{R}$ est ouvert, on obtient $\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{R}$, et $\mathcal{R}$ est aussi fermé. C'est absurde puisque les seuls ouverts fermés de Π sont Π et $\varnothing$ (Π est connexe), et que $\mathcal{R}$ ne peut être égal ni à Π ($\mathcal{R}$ est borné !), ni à $\varnothing$ (par hypothèse, $\mathcal{R}$ est un ouvert non vide).

• Si $M \in \mathcal{R} \cap \partial\mathcal{R}$, $\mathcal{R}$ étant ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(M,r) \subset \mathcal{R}$, en contradiction avec $B(M,r) \cap \complement\mathcal{R} \neq \varnothing$ pour tout $r > 0$. Donc $\mathcal{R} \cap \partial\mathcal{R} = \varnothing$.

• $\overline{\mathcal{R}}$ est fermé. Il est borné puisque

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{R}\subset\overline{B}\,(O,R)\\ \overline{\mathcal{R}}\text{ plus petit fermé contenant }\mathcal{R}\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \overline{\mathcal{R}}\subset\overline{B}\,(O,R)\,.$$

Ainsi $\overline{\mathcal{R}}$ est un fermé borné de Π, c'est-à-dire un compact de Π.

- Comme $\mathcal{R}$ est ouvert, $\partial\mathcal{R}=\overline{\mathcal{R}}\setminus\overset{o}{\mathcal{R}}=\overline{\mathcal{R}}\setminus\mathcal{R}$, donc $\overline{\mathcal{R}}=\partial\mathcal{R}\cup\mathcal{R}$.

$\boxed{\text{II.1.2}}$ Posons $\Gamma=\partial\mathcal{R}$. On a $\varphi\,(M)=d\,(M,\Gamma)=\operatorname{Inf}\{d\,(M,T)\ /T\in\Gamma\}$, et l'on montre que φ est lipschitzienne, donc continue. Pour tout $T\in\Gamma$ et $M,N\in\Pi$, $|d\,(M,T)-d\,(N,T)|\leq d\,(M,N)$ donc

$$d\,(N,T)-d\,(M,N)\leq d\,(M,T)\leq d\,(N,T)+d\,(M,N)\,.\qquad(*)$$

La première inégalité de $(*)$ permet d'écrire

$$\forall T\in\Gamma\qquad d\,(N,\Gamma)-d\,(M,N)\leq d\,(N,T)-d\,(M,N)\leq d\,(M,T)$$

ce qui entraîne, en passant à la borne inférieure (c'est-à-dire en utilisant que la borne inférieure est plus grande que n'importe quel minorant),

$$d\,(N,\Gamma)-d\,(M,N)\leq d\,(M,\Gamma)\,.\qquad(\natural)$$

On recommence avec la seconde inégalité de $(*)$, à savoir

$$\forall T\in\Gamma\qquad d\,(M,T)\leq d\,(N,T)+d\,(M,N)$$

pour obtenir

$$\forall T\in\Gamma\qquad d\,(M,\Gamma)-d\,(M,N)\leq d\,(M,T)-d\,(M,N)\leq d\,(N,T)\,,$$

puis, en passant à la borne inférieure :

$$d\,(M,\Gamma)-d\,(M,N)\leq d\,(N,\Gamma)\,.\qquad(\flat)$$

$(\natural)$ et $(\flat)$ donnent

$$d\,(N,\Gamma)-d\,(M,N)\leq d\,(M,\Gamma)\leq d\,(N,\Gamma)+d\,(M,N)$$

autrement dit

$$\forall M,N\in\Pi\qquad|d\,(M,\Gamma)-d\,(N,\Gamma)|\leq d\,(M,N)\,.$$

$\boxed{\text{II.1.3}}$ S'il existait un point N appartenant à $B\,(M,\varphi\,(M))\cap\complement\mathcal{R}$, le segment $[MN]$ relierait un point M de $\mathcal{R}$ à un point N de $\complement\mathcal{R}$, donc couperait la frontière $\partial\mathcal{R}$ en au moins un point T (cf Théorème de passage des douanes). On aurait $MT<MN<\varphi\,(M)$, ce qui est absurde.

Remarque : Rappelons le Théorème de passage des douanes : "Si Γ est une partie quelconque d'un espace topologique, tout chemin continu joignant un point de l'intérieur de Γ à un point de l'extérieur de Γ coupe la frontière $\partial\Gamma$ de Γ".
La preuve mérite d'être retenue : Notons $\gamma:[0,1]\to E$ un chemin continu d'extrémités

$$\gamma\,(0)=a\in\overset{o}{\Gamma}\quad\text{et}\quad\gamma\,(1)=b\in\overset{\bullet}{\Gamma}=\overset{o}{\overbrace{\complement\Gamma}}\,.$$

Le support $\gamma([0,1])$ de ce chemin est connexe comme image du connexe $[0,1]$ par une application continue. Si $\gamma([0,1])$ ne rencontrait pas la frontière, on disposerait de la partition

$$\gamma([0,1]) = \left(\gamma([0,1]) \cap \overset{o}{\Gamma}\right) \dot\cup \left(\gamma([0,1]) \cap \overset{\bullet}{\Gamma}\right)$$

de $\gamma([0,1])$ en deux ouverts non vides, ce qui contredit la connexité de $\gamma([0,1])$.

II.1.4 • Soit $\overline{B}(M,r) \subset \mathcal{R}$. Supposons par l'absurde que $\varphi(M) \leq r$. De deux choses l'une :

▷ Si $\varphi(M) < r$, par définition de la borne inférieure il existe $N \in \partial\mathcal{R}$ tel que $\varphi(M) \leq d(M,N) < r$, d'où $N \in \overline{B}(M,r) \cap \partial\mathcal{R} \subset \mathcal{R} \cap \partial\mathcal{R}$. C'est absurde car $\mathcal{R} \cap \partial\mathcal{R} = \varnothing$.

▷ Si $\varphi(M) = r$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists N_n \in \partial\mathcal{R} \quad r \leq d(M,N_n) < r + \frac{1}{n}.$$

$\partial\mathcal{R}$ étant compact, de la suite (N_n) on peut extraire une sous-suite $(N_{n_k})_k$ convergente vers $N \in \partial\mathcal{R}$. Par continuité de l'application $S \mapsto d(M,S)$, et en passant à la limite dans les inégalités ci-dessus, on tire $r \leq d(M,N) \leq r$, d'où $d(M,N) = r$ et finalement $N \in \overline{B}(M,r) \subset \mathcal{R}$. C'est absurde car $\mathcal{R} \cap \partial\mathcal{R} = \varnothing$.

• Si $\overline{B}(M,\varphi(M))$ ne rencontrait pas $\partial\mathcal{R}$, comme $B(M,\varphi(M)) \subset \mathcal{R}$, on déduirait $\overline{B}(M,\varphi(M)) \subset \mathcal{R}$ (on utilise encore ici le Théorème de passage des douanes : si $\overline{B}(M,\varphi(M))$ contient un point N de l'extérieur de $\mathcal{R}$, le segment $[MN]$ coupe la frontière $\partial\mathcal{R}$ en un point T, et T appartiendrait simultanément à $\partial\mathcal{R}$ et à $B(M,\varphi(M)) \subset \mathcal{R}$, absurde). Mais ce qui précède entraînerait alors $\varphi(M) > \varphi(M)$, ce qui est impossible. Donc $\overline{B}(M,\varphi(M)) \cap \partial\mathcal{R} \neq \varnothing$.

II.2.1 • A montrer

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall P \in C(M,\varphi(M)) \quad FP \geq \varepsilon \Rightarrow \varphi(P) > \alpha.$$

On raisonne par l'absurde : si le contraire a lieu,

$$\exists \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists P_n \in C(M,\varphi(M)) \quad FP_n \geq \varepsilon \quad \text{et} \quad \varphi(P_n) \leq \frac{1}{n}.$$

(P_n) est une suite du compact $C(M,\varphi(M))$ dont on peut extraire une sous-suite $(P_{n_k})_k$ convergente vers $P \in C(M,\varphi(M))$. En passant à la limite :

$$d(F,P) \geq \varepsilon \quad \text{et} \quad \varphi(P) = 0,$$

d'où $P \in \left(\overline{B}(M,\varphi(M)) \cap \partial\mathcal{R}\right) \setminus \{F\}$, ce qui est absurde.

• (cf figure 5) Fixons pour l'instant $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B}(M_0,r) \cap B(F,\varepsilon) = \emptyset$ et associons-lui α comme ci-dessus. La demi-droite $[FM)$ coupe le cercle $C(M,\varphi(M)+\alpha)$ en V. Soit M' le milieu de $[VF]$. On a $M' \in [FM) \setminus [FM]$ et

$$M'F = M'V = \frac{FV}{2} = \frac{2MF+\alpha}{2} \Rightarrow M'F = MF + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow M'M = M'F - MF = \frac{\alpha}{2}.$$

Par construction, le cercle $C(M',M'F)$ de diamètre $[VF]$ est tangent intérieurement au cercle $C(M,\varphi(M))$ et au cercle $C(M,\varphi(M)+\alpha)$, donc situé dans la couronne $\mathcal{K}$ de frontière ces deux cercles. Cela entraîne :

(1) Tout $N \in \partial\mathcal{R}\backslash B(F,\varepsilon)$ vérifie $N \notin \mathcal{K}$, donc $M'N \geq M'F$ et

$$M'N \geq M'F = M'M + MF = M'M + \varphi(M) = \frac{\alpha}{2} + \varphi(M).$$

(2) Pour tout $N \in \partial\mathcal{R} \cap B(F,\varepsilon)$,

$$M'N \geq \inf M'P,$$

la borne inférieure étant prise sur les $P \in C(M,\varphi(M)) \cap B(F,\varepsilon)$. Travaillons dans le repère orthonormal $\left(M, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ avec

$$M(0,0) \quad F(\rho,0) \quad M'(-a,0),$$

où $\rho = \varphi(M)$ et $a = \frac{\alpha}{2}$.

$$\begin{aligned}
(P(x,y) \in C(M,\varphi(M)) \cap B(F,\varepsilon)) &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\rho^2 \\ FP^2 < \varepsilon^2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\rho^2 \\ (x-\rho)^2+y^2 < \varepsilon^2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\rho^2 \\ 2\rho^2 - 2\rho x < \varepsilon^2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\rho^2 \\ x > \rho - \frac{\varepsilon^2}{2\rho}, \end{cases}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\inf M'P &= \inf \sqrt{(x+a)^2+y^2} \\
&= \inf_{x>\rho-\frac{\varepsilon^2}{2\rho}} \sqrt{\rho^2+2ax+a^2} \\
&= \sqrt{\rho^2+2a\left(\rho-\frac{\varepsilon^2}{2\rho}\right)+a^2} = \sqrt{\rho^2+a^2+a\frac{2\rho^2-\varepsilon^2}{\rho}}.
\end{aligned}$$

(3) Les résultats obtenus en (1) et (2) entraînent que pour tout $N \in \partial\mathcal{R}$

$$M'N \geq \inf\left(\varphi(M)+\frac{\alpha}{2}, \sqrt{\rho^2+a^2+a\frac{2\rho^2-\varepsilon^2}{\rho}}\right)$$

où $\rho = \varphi(M)$ et $a = \frac{\alpha}{2}$, soit

$$\varphi(M') \geq \inf\left(\varphi(M)+\frac{\alpha}{2}, \sqrt{\rho^2+a^2+a\frac{2\rho^2-\varepsilon^2}{\rho}}\right). \qquad (*)$$

En prenant $\varepsilon \leq \rho\sqrt{2}$, $(*)$ entraîne

$$\varphi(M') \geq \inf\left(\varphi(M)+\frac{\alpha}{2}, \sqrt{\rho^2+a^2}\right) > \varphi(M)$$

comme demandé.

• Attention ! on n'a pas démontré que $\overline{B}(M_0,r) \subset \overline{B}(M',\varphi(M'))$, ce qui semble compromis d'après la tentative suivante :

Vu la position de ces cercles tangents, $\overline{B}(M_0,r) \subset \overline{B}(M,\varphi(M)) \subset \overline{B}(M',M'F)$ et l'on aura $\overline{B}(M_0,r) \subset \overline{B}(M',\varphi(M'))$ si l'on a $M'F \leq \varphi(M')$, ce qui est assuré si l'on trouve ε tel que (cf $(*)$) :

$$M'F \leq \inf\left(\varphi(M) + \frac{\alpha}{2}, \sqrt{\rho^2 + a^2 + a\frac{2\rho^2 - \varepsilon^2}{\rho}}\right).$$

$M'F = \varphi(M) + \frac{\alpha}{2}$ par construction, et il reste à avoir

$$M'F \leq \sqrt{\rho^2 + a^2 + a\frac{2\rho^2 - \varepsilon^2}{\rho}}$$

ce qui équivaut successivement à $a + \rho \leq \sqrt{\rho^2 + a^2 + a\frac{2\rho^2-\varepsilon^2}{\rho}}$ et malheureusement à $0 \leq -a\frac{\varepsilon^2}{\rho}$ qui n'est jamais vérifié... Aussi toutes les suggestions concernant cette question seront les bienvenues. Une idée serait de prendre $MM' \leq \frac{\alpha}{2}$ au lieu de $MM' = \frac{\alpha}{2}$, ce qui ne change rien au points (1) et (2) car $C(M',M'F)$ est toujours situé dans la couronne $\mathcal{K}$.

II.2.2 $\varphi|_{\mathcal{R}_0} : \mathcal{R}_0 \to \mathbb{R}$ et le lemme ci-dessous montre que $\mathcal{R}_0$ est compact. On déduit que φ atteint son maximum en un points S_0 de $\mathcal{R}_0$:

$$\max_{S\in\mathcal{R}_0} \varphi(S) = \varphi(S_0)$$

Lemme : $\mathcal{R}_0$ est compact.

Preuve : $\mathcal{R}_0 = \left\{M \in \mathcal{R} / \overline{B}(M_0,r) \subset \overline{B}(M,\varphi(M))\right\}$ est inclus dans $\mathcal{R}$, donc borné comme $\mathcal{R}$. Montrons que $\mathcal{R}_0$ est fermé, ce qui achèvera la preuve. Si (N_n) est une suite de $\mathcal{R}_0$ convergent vers $N \in \Pi$, il s'agit de montrer que $N \in \mathcal{R}_0$. Pour tout n

$$\overline{B}(M_0,r) \subset \overline{B}(N_n,\varphi(N_n)).$$

Si $T \in \overline{B}(M_0,r)$, alors $TN_n \leq \varphi(N_n)$ et l'on peut passer à la limite dans cette inégalité puisque φ et l'application $S \mapsto TS$ sont continues). On trouve $TN \leq \varphi(N)$ soit $T \in \overline{B}(N,\varphi(N))$. On a montré l'inclusion $\overline{B}(M_0,r) \subset \overline{B}(N,\varphi(N))$ qui signifie que $N \in \mathcal{R}_0$. ■

II.2.3 $S_0 \in \mathcal{R}_0$ donc $\overline{B}(M_0,r) \subset \overline{B}(S_0,\varphi(S_0))$. Si $\overline{B}(S_0,\varphi(S_0)) \cap \partial\mathcal{R}$ ne contenait qu'un seul point F, II.2.1 montrerait l'existence de $M' \in \mathcal{R}_0$ tel que $\varphi(M') > \varphi(S_0)$, ce qui contredit la définition de S_0. Donc

$$\#\left(\overline{B}(S_0,\varphi(S_0)) \cap \partial\mathcal{R}\right) \geq 2$$

Comme $B(S_0,\varphi(S_0)) \subset \mathcal{R}$ (cf II.1.3) on aura $n(S_0) \geq 2$ et donc $S_0 \in Sq\mathcal{R}$.

II.2.4 • Si $S \in Sq\mathcal{R}$, alors II.1.3 entraîne $B(S,\varphi(S)) \subset \mathcal{R}$, et donc

$$\mathcal{R} \supset \bigcup_{S\in Sq\mathcal{R}} B(S,\varphi(S)).$$

• Réciproquement, si $M_0 \in \mathcal{R}$, $\mathcal{R}$ étant ouvert, il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}(M_0, r) \subset \mathcal{R}$ et l'on applique II.2.1 : en notant S_0 un point de $\mathcal{R}_0$ tel que $\max_{S \in \mathcal{R}_0} \varphi(S) = \varphi(S_0)$, on sait que $S_0 \in Sq\mathcal{R}$ (cf II.2.3) et

$$M_0 \in \overline{B}(M_0, r) \subset \overline{B}(S_0, \varphi(S_0))$$

d'où

$$\mathcal{R} \subset \bigcup_{S \in Sq\mathcal{R}} B(S, \varphi(S)),$$

et l'égalité est prouvée.

$-\bullet\bullet-$ FIN $-\bullet\bullet-$

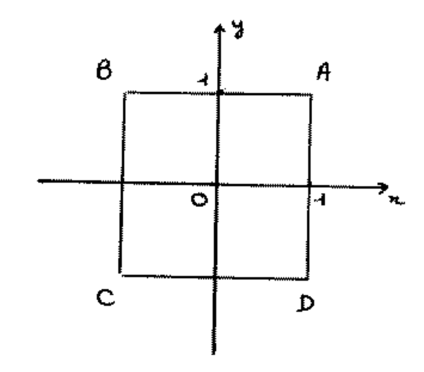


fig.1 du I.1

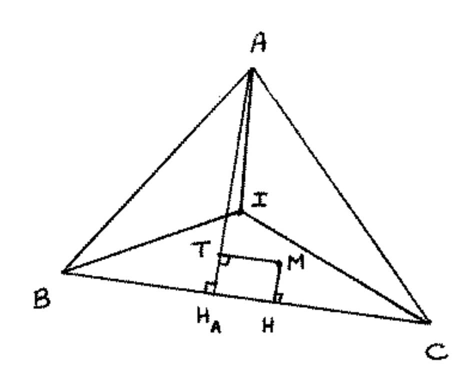


fig 2 du I.3

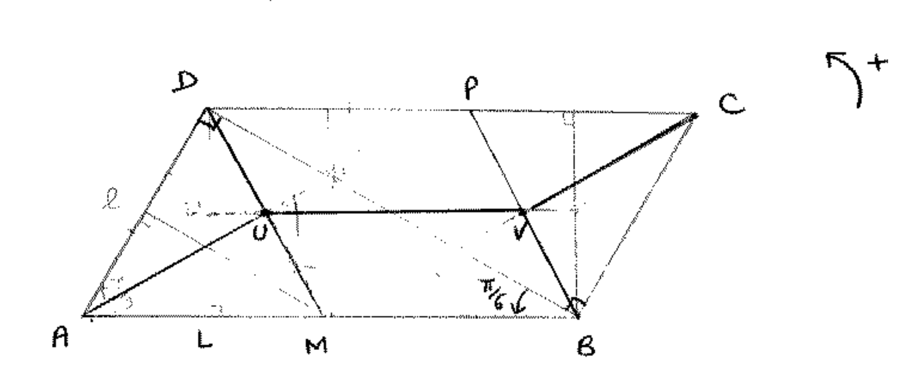


fig.3 du I.4.2

$$\begin{cases} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \dfrac{\pi}{3} \quad (2\pi) \\ (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}) = \dfrac{\pi}{6} \quad (2\pi) \\ (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \dfrac{2\pi}{3} \quad (2\pi) \end{cases}$$

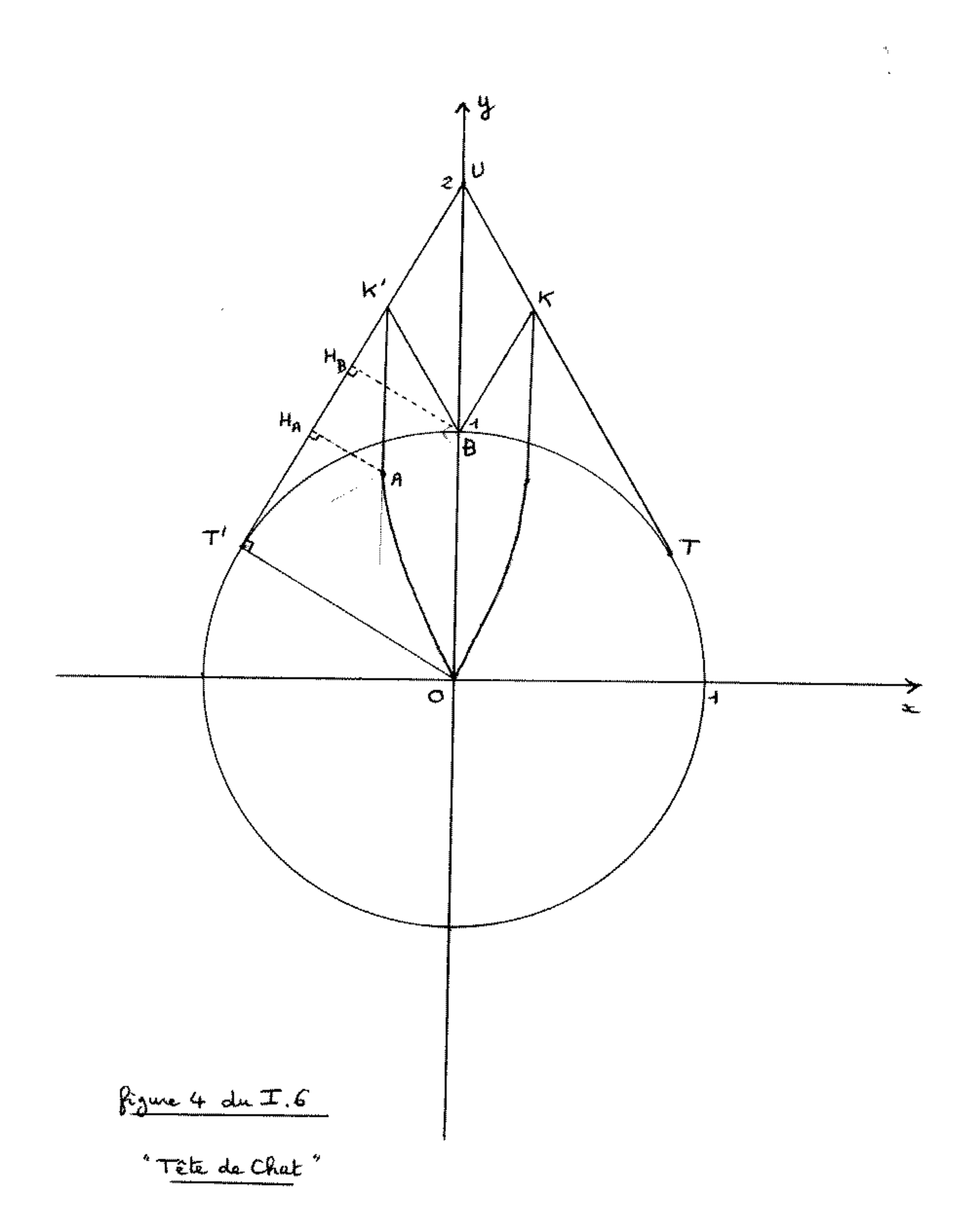
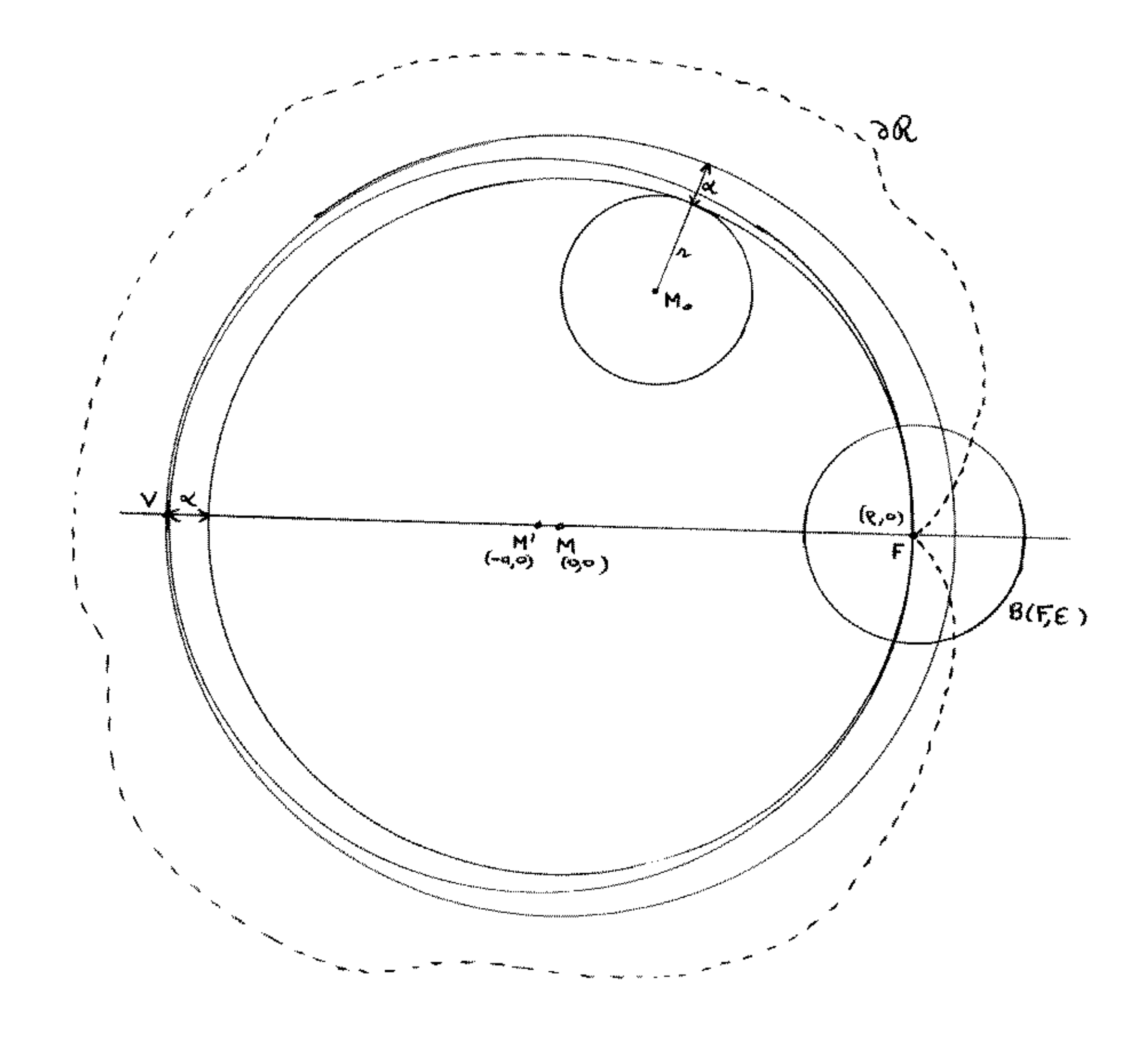


figure 4 du I.6

« Tête de Chat »



MF = φ(M)

figure 5 du II.2.1 : cas limite où C(M₀, r) est tangent intérieurement à C(M, φ(M))

43.0.1
52.0.8

J. 5170

SESSION DE 1997

concours externe de recrutement de professeurs certifiés et concours d'accès à des listes d'aptitude (CAFEP)

sections : mathématiques breton

première composition de mathématiques

Durée : 5 heures

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche - éventuellement programmable et alphanumérique - à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Documents interdits.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Tournez la page S.V.P.

OBJET ET NOTATIONS DU PROBLÈME

Dans tout le problème, α désigne un nombre réel strictement positif. On notera S_α la somme de la série de Riemann $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}}$, $\sigma_\alpha(n)$ la somme partielle $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha+1}}$ et $\rho_\alpha(n)$ la somme de la série reste $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}}$.

L'objet du problème est l'étude de la fonction S, définie sur $\mathbf{R}_+^*$, qui à α associe S_α, et la détermination de développements asymptotiques pour $\rho_\alpha(n)$.

Pour chaque calcul numérique, on décrira la méthode de calcul utilisée et on justifiera le résultat en tenant compte des erreurs d'arrondi.

Les dérivées successives d'une fonction f seront notées $f^{(r)}$; par convention, on pose $f^{(0)} = f$.

I. ÉTUDE DE LA FONCTION S

I.1. **Régularité et variations de la fonction S.**

Pour tout entier $k \geq 1$, on note f_k la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par

$$\forall \alpha \in \mathbf{R}_+^*, \quad f_k(\alpha) = \frac{1}{k^{\alpha+1}}.$$

I.1.1. Montrer que, pour tout entier $r \geq 1$, la série de fonctions de terme général $f_k^{(r)}$ est normalement convergente sur tout intervalle de la forme $[\alpha_0, +\infty[$ avec $\alpha_0 > 0$.

I.1.2. En déduire que la fonction S est de classe C^∞.

I.1.3. Montrer que la fonction S est décroissante et convexe.

I.2. **Étude aux bornes de la fonction S.**

I.2.1. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, on a les inégalités

$$\frac{1}{(k+1)^{\alpha+1}} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{k^{\alpha+1}}.$$

En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \rho_\alpha(n) \leq \frac{1}{\alpha} \frac{1}{n^\alpha}. \qquad (1)$$

I.2.2. Montrer que, pour n fixé, on a

$$S_\alpha = \sigma_\alpha(n) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

quand α tend vers $+\infty$. On a en particulier $\lim_{\alpha \to \infty} S_\alpha = 1$.

I.2.3. *a.* Montrer que $S_\alpha - \dfrac{1}{\alpha}$ est borné au voisinage de 0.

b. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^{\alpha+1}}$ est décroissante sur $[3, +\infty[$. En déduire un minorant de la dérivée de la fonction $\alpha \mapsto \rho_\alpha(3)$, puis la croissance de la fonction $\alpha \mapsto \rho_\alpha(3) - \dfrac{1}{\alpha}$.

c. En écrivant $S_\alpha - \dfrac{1}{\alpha} = \sigma_\alpha(3) + \left(\rho_\alpha(3) - \dfrac{1}{\alpha}\right)$, montrer qu'il existe une constante γ telle que

$$S_\alpha = \frac{1}{\alpha} + \gamma + o(1)$$

quand α tend vers 0 par valeurs supérieures.

d. En utilisant l'encadrement (1), montrer que pour tout $n \geq 1$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \leq \gamma \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n).$$

En déduire que $\gamma = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right)$.

[Ce nombre γ est appelé la constante d'Euler.]

I.3. **Valeurs numériques approchées de S_α et de γ.**

I.3.1. *a.* En utilisant l'encadrement (1), déterminer la valeur décimale par défaut à 10^{-3} près de S_α pour $\alpha = 0{,}5$.

b. Peut-on raisonnablement espérer trouver de la même manière la valeur décimale par défaut à 10^{-7} près de $S_{0,5}$? Pourquoi ?

I.3.2. On cherche un meilleur encadrement de $\rho_\alpha(n)$ dans l'espoir d'en déduire une meilleure approximation de S_α.

a. Pour tout $\alpha > 0$, on note h_α la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad h_\alpha(t) = \frac{1}{t^{\alpha+1}}.$$

Montrer que h_α est convexe.

b. Montrer, en utilisant la méthode des trapèzes, qu'on a

$$\forall k \geq 1, \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^{\alpha+1}} + \frac{1}{(k+1)^{\alpha+1}}\right).$$

En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, la minoration

$$\frac{1}{\alpha}\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^{\alpha+1}} \leq \rho_\alpha(n). \qquad (2)$$

c. Montrer, en utilisant la méthode du milieu, qu'on a

$$\forall k \geq 1, \frac{1}{k^{\alpha+1}} \leq \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{\alpha+1}}.$$

En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, la majoration

$$\rho_\alpha(n) \leq \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^\alpha}. \qquad (3)$$

Tournez la page S.V.P.

I.3.3. En utilisant l'encadrement résultant de (2) et (3), déterminer la valeur décimale par défaut à 10^{-7} près de $S_{0,5}$.

I.3.4. *a.* Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \frac{1}{2n} \leq \gamma \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

b. Déterminer la valeur décimale par défaut à 10^{-6} près de γ.

II. DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES DE $\rho_\alpha(n)$

Dans toute cette partie, α est un réel strictement positif fixé.

On définit une suite de fonctions définies sur l'intervalle $[0, 1[$ par

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \varphi_0(x) = (1-x)^{-\alpha} - 1$$

et, pour tout entier $j \geq 1$, par

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \varphi_j(x) = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+j-1)\, x^j \left((1-x)^{-(\alpha+j)} - 1\right).$$

Étant donné une suite $(u_j)_{j \in \mathbf{N}}$ de réels, pour tout entier $p \geq 1$, on notera g_p la fonction définie sur $[0, 1[$ par

$$\forall x \in [0, 1[, \quad g_p(x) = \sum_{j=0}^{p-1} u_j\, \varphi_j(x) - x.$$

II.1. Détermination de $(u_j)_{j \in \mathbf{N}}$ pour que $g_p(x) = O(x^{p+1})$ au voisinage de 0.

II.1.1. Montrer que, pour $r \leq j$, on a $\varphi_j^{(r)}(0) = 0$ et que, pour $r > j$, on a

$$\varphi_j^{(r)}(0) = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+r-1)\frac{r!}{(r-j)!}.$$

II.1.2. Montrer que, pour tout entier r vérifiant $1 \leq r \leq p$, on a $g_p^{(r)}(0) = g_r^{(r)}(0)$. En déduire que la condition

$$\forall p \geq 1, \quad g_p(x) = O(x^{p+1}) \tag{4}$$

au voisinage de 0, est équivalente à la condition

$$\forall p \geq 1, \quad g_p^{(p)}(0) = 0.$$

II.1.3. Calculer $g_p^{(p)}(0)$. En déduire que la condition (4) est vérifiée si et seulement si la suite $(u_j)_{j \in \mathbf{N}}$ vérifie

$$u_0 = \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad \forall p \geq 2, \sum_{j=0}^{p-1} \frac{u_j}{(p-j)!} = 0. \tag{5}$$

II.1.4. Montrer qu'il existe une et une seule suite $(u_j)_{j \in \mathbf{N}}$ vérifiant (5), donc telle que la condition (4) soit vérifiée. Quand ces conditions sont vérifiées, montrer que, pour tout $j \in \mathbf{N}$, le nombre $\alpha\, u_j$ est rationnel.

II.2. **Développements asymptotiques de** $\rho_\alpha(n)$.

On suppose maintenant que la suite $(u_j)_{j\in\mathbf{N}}$ vérifie (5).

II.2.1. Montrer que, pour $p \geq 1$ fixé, la série de terme général $\frac{1}{k^\alpha} g_p\left(\frac{1}{k}\right)$, avec $k \geq 2$, est convergente et que la série reste vérifie

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} g_p\left(\frac{1}{k}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha+p}}\right)$$

pour n au voisinage de l'infini.

II.2.2. Montrer que, pour tout $p \geq 1$, il existe un polynôme G_p tel que

$$\forall\, k \geq 2,\quad \frac{1}{k^\alpha} g_p\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{(k-1)^\alpha} G_p\left(\frac{1}{k-1}\right) - \frac{1}{k^\alpha} G_p\left(\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k^{\alpha+1}}.$$

En déduire que

$$\forall\, n \geq 1,\quad \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} g_p\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n^\alpha} G_p\left(\frac{1}{n}\right) - \rho_\alpha(n)$$

et que, pour n au voisinage de l'infini, on a donc

$$\rho_\alpha(n) = \frac{1}{n^\alpha} G_p\left(\frac{1}{n}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha+p}}\right).$$

II.3. **Propriétés de la suite** $(u_j)_{j\in\mathbf{N}}$ **vérifiant la récurrence** (5).

On suppose encore que la suite $(u_j)_{j\in\mathbf{N}}$ vérifie (5).

Soit θ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\theta(0) = 1$ et

$$\forall\, x \in \mathbf{R}^*,\quad \theta(x) = \frac{x}{\exp(x) - 1}.$$

II.3.1.*a*. Montrer que la fonction θ admet au voisinage de 0 des développements limités à tout ordre. Pour tout $p \geq 1$, on notera

$$\theta(x) = v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \ldots + v_p x^p + \mathrm{o}\,(x^p)$$

ce développement limité.

b. Expliciter v_0, v_1, v_2 et v_3.

II.3.2. Montrer que, pour tout $j \geq 0$, on a $v_j = \alpha\, u_j$.

II.3.3.*a*. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, on a

$$\theta(x) = \frac{x}{2}\left(\coth\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right).$$

b. En déduire que pour tout $i \geq 1$, on a $v_{2i+1} = 0$.

II.3.4.*a*. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, on a l'égalité

$$\mathrm{th}(x) + \coth(x) = 2\coth(2x) .$$

b. Exprimer les coefficients des développements limités de la fonction th au voisinage de 0 en fonction de ceux de la fonction θ .

c. Montrer que pour tout entier $i \geq 1$, la dérivée $\mathrm{th}^{(2i-1)}(0)$ est non nulle et du signe de $(-1)^{i-1}$. [On pourra raisonner par récurrence et dériver, à l'aide de la formule de Leibniz, l'identité $\mathrm{th}' = 1 - \mathrm{th}^2$.]

d. En déduire que, pour tout $i \geq 1$, le coefficient v_{2i} est du signe de $(-1)^{i-1}$.

II.4. **Développements asymptotiques de $\rho_\alpha(n)$ (suite).**

On suppose toujours que la suite $(u_j)_{j \in \mathbf{N}}$ vérifie (5).

II.4.1. Montrer que, pour tout $p \geq 1$, on a $g_{2p+1} = g_{2p+2}$.

II.4.2. En déduire que, pour tout $p \geq 1$, on a

$$\rho_\alpha(n) = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^{\alpha+1}} + \sum_{i=1}^{p} (\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+2i-1)\frac{v_{2i}}{n^{\alpha+2i}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha+2p+2}}\right)$$

pour n au voisinage de l'infini.

III. NON-CONVERGENCE DES DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES DE $\rho_\alpha(n)$

Dans toute cette partie, α est un réel strictement positif fixé. On se propose de montrer que la partie régulière des développements asymptotiques de $\rho_\alpha(n)$ n'a pas de limite finie lorsque p tend vers l'infini.

III.1. Pour $x \in \mathbf{R}^*$ fixé, on considère la fonction 2π-périodique f telle que pour $t \in]-\pi, \pi]$ on ait $f(t) = \mathrm{ch}(xt)$.

III.1.1. Montrer que la fonction f est paire, continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbf{R}$.

III.1.2. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

III.1.3. Justifier l'égalité entre f et la somme de sa série de Fourier. En écrivant cette égalité pour $t = \pi$, montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, on a

$$\pi\coth(\pi x) - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2+n^2} .$$

III.2. On rappelle que, pour tout entier N et pour tout réel $X \neq -1$, on a

$$\frac{1}{1+X} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k X^k + (-1)^{N+1} \frac{X^{N+1}}{1+X}. \tag{6}$$

III.2.1. En appliquant (6) aux quantités

$$\frac{2x}{x^2+n^2} = \frac{2x}{n^2}\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)^{-1},$$

montrer qu'au voisinage épointé de 0 on a

$$\pi \coth(\pi x) - \frac{1}{x} = 2 \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} S_{2i-1}\, x^{2i-1} + O(x^{2p+1}).$$

III.2.2. En déduire que, pour tout $i \geq 1$, on a

$$v_{2i} = 2(-1)^{i-1} \frac{S_{2i-1}}{(2\pi)^{2i}}.$$

III.3. Déduire des questions précédentes que, pour $\alpha > 0$ et $n > 0$ fixés, on a

$$\lim_{p \to \infty} \left[(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+2p-1) \frac{|v_{2p}|}{n^{\alpha+2p}} \right] = +\infty.$$

Conclure.

CAPES externe de Mathématiques
session 1997
deuxième composition

Enoncé

http://perso.wanadoo.fr/megamaths

[0] [ag42e]

OBJET ET NOTATIONS DU PROBLÈME

Le plan affine euclidien orienté est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Un point du plan sera repéré soit par ses coordonnées (x, y) dans ce repère, soit par son affixe $x + iy$. La norme euclidienne d'un vecteur $\vec{V}$ sera notée $\|\vec{V}\|$. La droite passant par deux points distincts M et N sera notée (M,N).

On rappelle qu'une droite coupe une hyperbole en au plus deux points et que la tangente en un point M de cette hyperbole est la limite des sécantes (M,M′) lorsque M′ tend vers M en restant sur l'hyperbole. On admettra qu'une conique quelconque coupe une hyperbole en au plus quatre points ou est confondue avec elle.

On réservera le nom de triangle aux triangles non dégénérés, c'est-à-dire dont les trois sommets sont distincts et non alignés. Un tel triangle sera dit inscrit dans une courbe si ses trois sommets appartiennent à la courbe.

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés des triangles inscrits dans une hyperbole équilatère.

I. TRIANGLE INSCRIT DANS UNE HYPERBOLE ÉQUILATÈRE ET DONT UN CÔTÉ PASSE PAR LE CENTRE DE L'HYPERBOLE

I.1. Dans cette question, P désigne un point fixé du plan, différent de l'origine, Q le symétrique de P par rapport à l'origine O et M un point du plan différent des points P et Q.

I.1.1. Montrer que les bissectrices des droites (M,P) et (M,Q) sont parallèles aux axes de coordonnées si et seulement si

$$(\vec{u},\overrightarrow{MP}) + (\vec{u},\overrightarrow{MQ}) = 0 \qquad [\pi]\,.$$

I.1.2. On note (x, y) les coordonnées de M et (a, b) les coordonnées du point P. Montrer que

$$\sin\left((\vec{u},\overrightarrow{MP}) + (\vec{u},\overrightarrow{MQ})\right) = \frac{2\,(xy - ab)}{\|\overrightarrow{MP}\|\,\|\overrightarrow{MQ}\|}\,.$$

I.1.3. En déduire le lieu des points M du plan tels que les bissectrices des droites (M,P) et (M,Q) soient parallèles aux axes de coordonnées.

I.2. Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole équilatère de centre O, soit P un point de $\mathcal{H}$ et soit $\mathcal{D}$ une droite passant par P.

I.2.1. On suppose que $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{H}$ en deux points distincts P et P′ et on note I le milieu du segment [P,P′]. Montrer que les bissectrices des droites (I,O) et (P,P′) sont parallèles aux asymptotes de $\mathcal{H}$. [On pourra introduire le symétrique Q de P par rapport à O et utiliser le résultat du I.1.3.]

I.2.2. On suppose que $\mathcal{D}$ est la tangente $\mathcal{T}_P$ à $\mathcal{H}$ au point P. Montrer que les bissectrices des droites (P,O) et $\mathcal{T}_P$ sont parallèles aux asymptotes de $\mathcal{H}$.

I.3. Soit (A,B,C) un triangle inscrit dans $\mathcal{H}$. Montrer que les bissectrices de l'angle en A de ce triangle sont parallèles aux asymptotes de $\mathcal{H}$ si et seulement si B et C sont symétriques par rapport à O.

I.4. Soit (A,B,C) un triangle inscrit dans $\mathcal{H}$, tel que B et C soient symétriques par rapport à O. Montrer que le cercle circonscrit au triangle recoupe $\mathcal{H}$ en le point diamétralement opposé à A.

II. TRIANGLE ÉQUILATÉRAL INSCRIT DANS UNE HYPERBOLE ÉQUILATÈRE

Dans cette partie, $\mathcal{H}$ désigne une hyperbole équilatère ayant les axes de coordonnées pour asymptotes.

II.1. Soit Ω un point de $\mathcal{H}$ d'affixe $\omega = a + ib$ et soit $\mathcal{S}$ le cercle centré en Ω et passant par le point Ω' symétrique de Ω par rapport à O.

II.1.1. Montrer que $\mathcal{H}$ est l'ensemble des points dont l'affixe $z = x + iy$ est telle que $z^2 - \omega^2$ soit réel.

II.1.2. Montrer que les affixes des points de l'intersection de $\mathcal{H}$ et de $\mathcal{S}$ sont les racines de l'équation :

$$(z + \omega)\left[(z - \omega)^3 - 8\omega\overline{\omega}^2\right] = 0.$$

II.1.3. En déduire qu'en général le cercle $\mathcal{S}$ coupe l'hyperbole $\mathcal{H}$ en quatre points distincts A, B, C, Ω' et que les points A, B, C sont les sommets d'un triangle équilatéral.
Quand ce résultat est-il en défaut ? Décrire alors la configuration.

II.2. Soit (A,B,C) un triangle équilatéral inscrit dans $\mathcal{H}$ et soit Ω le centre du cercle circonscrit à ce triangle. On note α, β, γ, ω les affixes des points A, B, C, Ω.

II.2.1. Montrer qu'il existe un nombre complexe ρ tel que α, β, γ soient les racines de l'équation :

$$(z - \omega)^3 = \rho^3.$$

En déduire la relation :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3\omega^2.$$

II.2.2. Montrer que le centre du cercle circonscrit au triangle (A,B,C) appartient à l'hyperbole $\mathcal{H}$.

II.2.3. Déterminer une équation du troisième degré ayant les nombres $\alpha^2 - \omega^2$, $\beta^2 - \omega^2$, $\gamma^2 - \omega^2$ pour racines.
En déduire que les nombres $\omega\rho^3$ et $(8\omega^3 + \rho^3)\,\rho^3$ sont réels.

II.2.4. Montrer que $\rho^3 = 8\omega\overline{\omega}^2$. En déduire que le cercle circonscrit au triangle (A,B,C) passe par le symétrique du point Ω par rapport à l'origine.

III. ORTHOCENTRE D'UN TRIANGLE INSCRIT DANS UNE HYPERBOLE ÉQUILATÈRE

Dans cette partie, $\mathcal{H}$ désigne l'hyperbole équilatère d'équation $xy = k$, avec $k > 0$, et (A,B,C) un triangle quelconque inscrit dans $\mathcal{H}$. On notera a, b et c les abscisses respectives des points A, B et C.

III.1. Soit $\mathcal{D}_A$ la hauteur issue de A du triangle (A,B,C).

III.1.1. Écrire une équation de $\mathcal{D}_A$ et déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{D}_A$ avec l'hyperbole $\mathcal{H}$. En déduire que l'orthocentre D du triangle appartient à l'hyperbole.

III.1.2. Montrer que D est confondu avec A si et seulement si la hauteur $\mathcal{D}_A$ est tangente à l'hyperbole.

III.1.3. Montrer que si deux hyperboles équilatères distinctes se coupent en quatre points distincts, alors chacun de ces points est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres points.

III.1.4. Décrire l'intersection de deux hyperboles équilatères distinctes, tangentes en un point et se coupant en deux autres points distincts.

Tournez la page S.V.P.

III.2. Soit $\mathcal{S}$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2r\,x - 2s\,y + t = 0$.

III.2.1. Écrire une équation du quatrième degré donnant les abscisses des points d'intersection de l'hyperbole $\mathcal{H}$ et du cercle $\mathcal{S}$.
Quel est le produit des racines (réelles ou complexes) de cette équation ?

III.2.2. Montrer que si $\mathcal{S}$ est le cercle circonscrit au triangle (A,B,C), alors ce cercle passe par D′, symétrique de l'orthocentre du triangle par rapport à l'origine O.

III.2.3. En déduire une nouvelle démonstration des résultats des questions II.1.3., II.2.2. et II.2.4.

III.3. On suppose que le triangle (A,B,C) n'est pas rectangle. On note D son orthocentre et $\mathcal{C}$ une conique passant par les points A, B, C et D.

III.3.1. Montrer que $\mathcal{C}$ n'est pas un couple de deux droites parallèles aux axes et que, si $\mathcal{C}$ est une hyperbole équilatère d'asymptotes parallèles aux axes, on a $\mathcal{C} = \mathcal{H}$.

III.3.2. Soit E un point du plan, non situé sur $\mathcal{H}$. Montrer qu'il existe soit une unique hyperbole équilatère, soit un unique couple de deux droites perpendiculaires, passant par les quatre points A, B, C et E. Montrer que, dans les deux cas, cette conique passe aussi par D.

III.3.3. Déduire de ce qui précède que $\mathcal{C}$ est soit une hyperbole équilatère, soit un couple de deux droites perpendiculaires.

III.3.4. Montrer que le centre de $\mathcal{C}$ est cocyclique avec les milieux des côtés du triangle (A,B,C). [On pourra utiliser I.2.1.]

IV. UNE CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE

Dans cette partie, on considère la configuration du III.2., c'est-à-dire un triangle (A,B,C) inscrit dans l'hyperbole équilatère $\mathcal{H}$, le cercle $\mathcal{S}$, de centre Ω, circonscrit à ce triangle, l'orthocentre D du triangle et le point D′, symétrique de D par rapport à l'origine (on rappelle que D′ appartient à $\mathcal{S}$). On notera respectivement $\mathcal{T}_A$ et $\mathcal{N}_A$ la tangente et la normale en A à l'hyperbole $\mathcal{H}$. Dans les questions IV.2. et IV.3., la position limite d'un point M (resp. d'une droite $\mathcal{D}$) sera encore notée M (resp. $\mathcal{D}$).

IV.1. Montrer que l'isobarycentre G des points A, B, C et D′ est le milieu du segment [O,Ω].

IV.2. Les points A et B restant fixes, on fait tendre le point C vers le point A, en restant sur l'hyperbole $\mathcal{H}$.

IV.2.1. Quelles sont les positions limites de la droite (A,C) et de la hauteur $\mathcal{D}_A$ issue de A ?

IV.2.2. Quelles sont les positions limites des points D, D′, G et Ω ? Caractériser la position limite du cercle $\mathcal{S}$.

IV.3. Le point A restant fixe, on fait, dans la configuration du IV.2., tendre B vers A, en restant sur l'hyperbole $\mathcal{H}$.

IV.3.1. Quelles sont les positions limites de la droite $\mathcal{D}_A$ et des points D, D′, G et Ω ? Caractériser la position limite du cercle $\mathcal{S}$.

IV.3.2. Montrer que les droites (A,O) et (A,D′) (avec (A,D′) = $\mathcal{T}_A$ si D′ = A) sont perpendiculaires.

IV.3.3. Donner une construction géométrique simple du centre de courbure en un point d'une hyperbole équilatère.

CAPES externe 1997 de Mathématiques deuxième composition

solution proposée par Dany-Jack Mercier

IUFM de Guadeloupe, Morne Ferret,
BP399, Pointe-à-Pitre cedex 97159,
dany-jack.mercier@univ-ag.fr

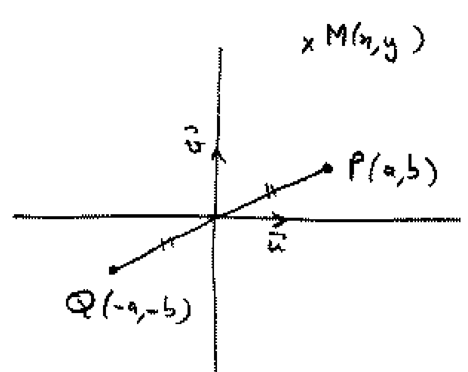
NB : Le sujet de l'épreuve n'est pas joint à ce document. Il pourra être téléchargé au format pdf sur le site http://perso.wanadoo.fr/megamaths/

[0] [ag42s] v1.00

CAPES externe 97, 2e composition

I.1.1 Les bissectrices d'un couples de droites sont toujours perpendiculaires entre elles, de sorte que les droites $\mathbb{R}\vec{u}$ et $\mathbb{R}\vec{v}$ soient bissectrices de (MP, MQ) ssi $\mathbb{R}\vec{u}$ est l'une des bissectrices de (MP, MQ), ce qui se traduit par $(MP, \mathbb{R}\vec{u}) = (\mathbb{R}\vec{u}, MQ)$, ou encore par

$$(\vec{u}, \overrightarrow{MP}) + (\vec{u}, \overrightarrow{MQ}) = 0 \quad (\pi)$$



I.1.2

$$A = \sin\left((\vec{u}, \overrightarrow{MP}) + (\vec{u}, \overrightarrow{MQ})\right)$$

$$= \sin(\vec{u}, \overrightarrow{MP}) \cos(\vec{u}, \overrightarrow{MQ}) + \sin(\vec{u}, \overrightarrow{MQ}) \cos(\vec{u}, \overrightarrow{MP})$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & a-x \\ 0 & b-y \end{vmatrix}}{MP} \cdot \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a-x \\ -b-y \end{pmatrix}}{MQ} + \frac{\begin{vmatrix} 1 & -a-x \\ 0 & -b-y \end{vmatrix}}{MQ} \cdot \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-x \\ b-y \end{pmatrix}}{MP}$$

$$= \frac{(b-y)(-a-x) + (-b-y)(a-x)}{MP.MQ} = \frac{2(xy-ab)}{\|\overrightarrow{MP}\|.\|\overrightarrow{MQ}\|}$$

I.1.3 Vu les questions préc., ce lieu admet pour équation

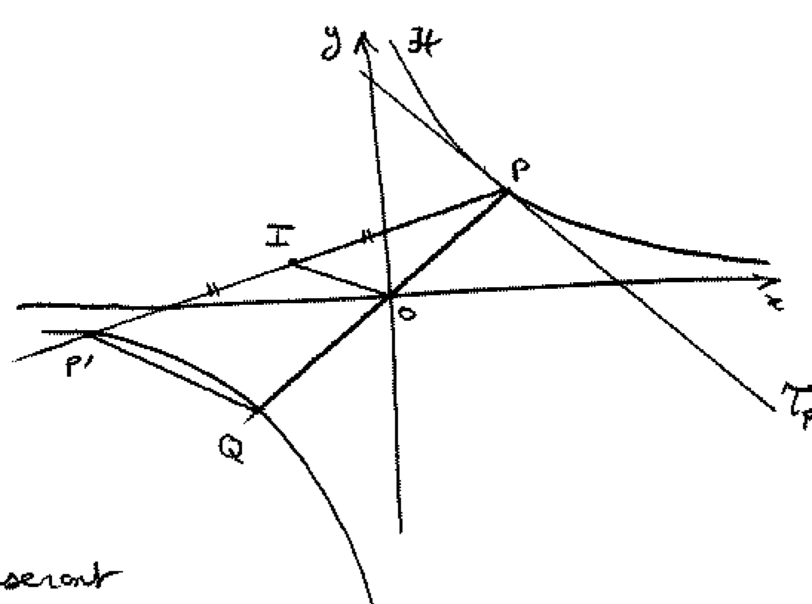
$$\mathcal{C} \iff \frac{2(xy-ab)}{MP.\,MQ} = 0 \iff xy = ab$$

Le lieu cherché est l'hyperbole équilatère d'équation $xy = ab$

I.2.1 $\mathcal{H}$ est une hyperbole équilatère de centre O, donc il est toujours possible de se ramener à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ dont les axes sont les asymptotes (orthogonales entre elles) de l'hyperbole. L'équation de $\mathcal{H}$ est alors dans ce repère :

$$\mathcal{H} : \quad xy = k \qquad (k \in \mathbb{R}^*)$$

Par la réciproque de Thalès, $(IO) // (P'Q)$ si bien que les bissectrices des couples (IO, PP') et $(P'P, P'Q)$ aient les mêmes directions.



Les bissectrices de (IO, PP') seront donc parallèles aux axes de coordonnées ssi le point P' appartient à l'hyperbole d'équation $xy = ab$ où (a,b) désignent les coordonnées de P (cf I.1). Ici, $P'(x',y')$ est sur l'hyperbole $\mathcal{H}$ par construction, donc $x'y' = k$, et comme $P \in \mathcal{H}$, $k = ab$.

La condition est bien réalisée.

I.2.2

$P(a,b)$ et l'équation de $\mathcal{H}$ est $xy = ab$. La pente de la tangente T_P en P est $-\frac{b}{a}$ puisque $y' = -\frac{ab}{x^2}$. Un vecteur directeur $\vec{t}$ de T_P est donc $\vec{t}\left(1, -\frac{b}{a}\right)$. Une des 2 bissectrices du couple (PO, T_P) est dirigée par le vecteur

$$\vec{d} = \frac{\vec{OP}}{\|\vec{OP}\|} + \frac{\vec{t}}{\|\vec{t}\|} = \frac{a\vec{u} + b\vec{v}}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{\vec{u} - \frac{b}{a}\vec{v}}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = \frac{2a\vec{u}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(on peut supposer $a > 0$ quitte à changer l'orientation de Ox)

qui est bien colinéaire à $\vec{u}$. Les bissectrices de (PO, T_P) seront donc bien parallèles aux axes de coordonnées, ie aux asymptotes de $\mathcal{H}$.

<u>Autre solution</u> : Prenons P' sur la m̂ branche de l'hyperbole $\mathcal{H}$ que P. Avec les notations de I.2.1, le couple (IO, PP') admet les asymptotes comme bissectrice. En passant à la limite pour P' tendant vers P, la droite (IO) tend vers (PO), et la droite (PP') tend vers T_P. Par suite le couple (PO, T_P) admettra les asymptotes commes bissectrices.

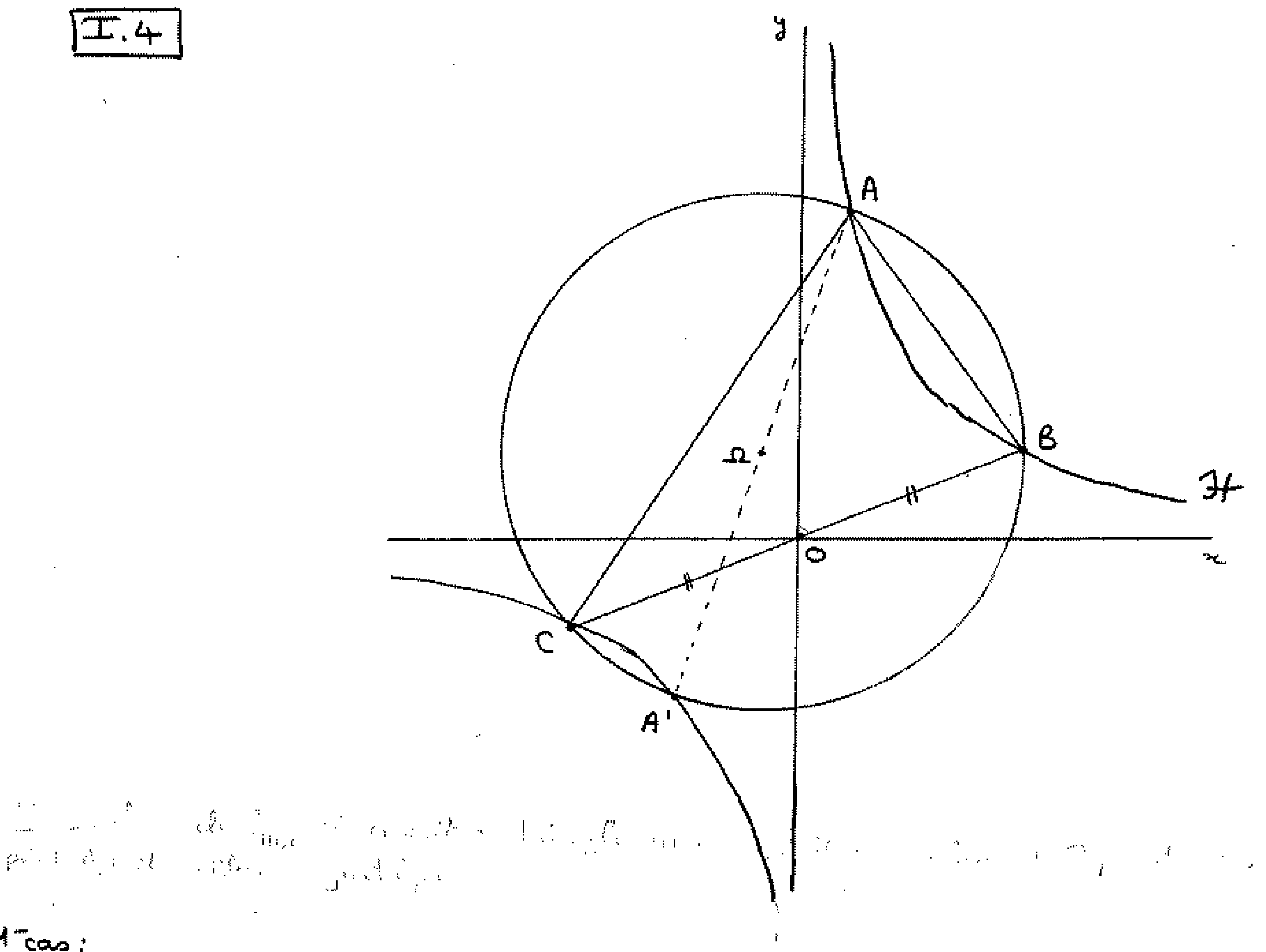
I.3

• Si B et C sont symétriques /à O, I.2.1 appliqué avec A, B, C à la place de P', P, Q montre que les bissectrices en A de ABC sont parallèles aux asymptotes.

• Réc., si ABC est inscrit dans $\mathcal{H}$ et si les bissectrices en A de (AB, AC) sont parallèles aux asymptotes, notons B' le symétrique de B /à O. On peut supposer $B' \neq A$ quitte à prendre C ! (en effet, $B' = A = C$ entraînerait $B = C$ absurde) ABB' est aussi inscrit dans $\mathcal{H}$ et le sens direct déjà démontré prouve que les bissectrices de (AB, AB') sont parallèles aux asymptotes.

Par suite si Δ désigne l'une de ces asymptotes et s la réflexion /à Δ, $s((AB)) = (AC) = (AB')$ et les points A, B', C sont alignés. Comme la droite $(AB'C)$ coupe l'hyperbole $\mathcal{H}$ en au plus 2 points, on aura $B' = C$.

I.4



• 1er cas :

Supposons que le cercle $\mathcal{C}_{ABC}$ circonscrit au triangle ABC coupe ℋ en 4 points distincts {A, B, C, A'}. On a $A' \in \mathcal{C}_{ABC} \cap \mathcal{H}$.

Comme $A, A' \in \mathcal{H}$, et comme O est milieu de [BC], I.3 montre que les bissectrices de ABC (resp. A'BC) issues de A (resp. A') sont parallèles aux axes de coord., et I.1.1 traduit cela par :

$$\begin{cases} (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AC}) = 0 & (\pi) \\ (\vec{u}, \overrightarrow{A'B}) + (\vec{u}, \overrightarrow{A'C}) = 0 \end{cases}$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'C}) = 0 \qquad (1)$$

Comme A, B, C, A' sont cocycliques, on a $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA'}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CA'}) \ (\pi) \quad (2)$.

(1) et (2) entraînent $2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CA'}) = 0 \ (\pi)$ soit $(CA, CA') = k\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$,

et cela prouve que le triangle AA'C est rectangle en C (en effet, $(CA, CA') = 0 \ (\pi)$ est impossible, sinon la droite (AC) couperait l'hyperbole en 3 pts distincts ...)

Ainsi C appartient au cercle de diamètre [AA']. Les cercles circonscrits aux triangles AA'C et AA'BC coïncident, donc [AA'] sera un diamètre de $\mathcal{C}_{ABC}$.

• 2^e cas : Si $\mathcal{C}_{ABC}$ coupe $\mathcal{H}$ seulement en A, B et C, alors $\mathcal{C}_{ABC}$ est tangent à $\mathcal{H}$ en B ou C, disons en C. La tangente $\mathcal{T}_c$ à $\mathcal{H}$ en C coïncide avec la tangente en $\mathcal{C}_{ABC}$ en C, et on relit la démonstration du 1^er cas avec A' = C cette fois-ci :

Les bissectrices de ABC issues de A sont parallèles aux axes de coordonnées d'après I.3. Les bissectrices de $(CO, \mathcal{T}_c)$ sont aussi parallèles aux axes de coordonnées d'après I.2.2. I.1.1 traduit cela par :

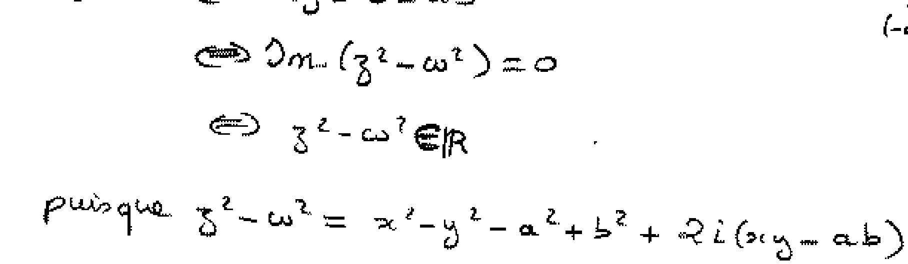
$$\begin{cases} (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AC}) = 0 & (\pi) \\ (\vec{u}, \overrightarrow{CO}) + (\vec{u}, \mathcal{T}_c) = 0 & (\pi) \end{cases}$$

$$(CO, AB) + (\mathcal{T}_c, AC) = 0$$

Par cocyclicité, $(CO, AB) = (CB, AB) = (BC, BA) = (\mathcal{T}_c, AC) \quad (\pi)$ donc $2(\mathcal{T}_c, AC) = 0$ puis $(\mathcal{T}_c, AC) = 0 \; (\frac{\pi}{2})$. Les droites (AC) et $\mathcal{T}_c$ sont perpendiculaires et donc (AC) est un diamètre du cercle $\mathcal{C}_{ABC}$.

Dans ce cas particulier on peut encore dire que $\mathcal{C}_{ABC}$ recoupe $\mathcal{H}$ en un pt diamétralement opposé à A.

II.1.1 $\mathcal{H} : xy = k = ab$



$$M(x,y) \in \mathcal{H} \iff xy = k = ab$$
$$\iff \mathcal{I}m\,(z^2 - \omega^2) = 0$$
$$\iff z^2 - \omega^2 \in \mathbb{R}$$

puisque $z^2 - \omega^2 = x^2 - y^2 - a^2 + b^2 + 2i(xy - ab)$

II.1.2

$$M(z) \in \mathcal{H} \cap \mathcal{S} \iff \begin{cases} z^2 - \omega^2 \text{ réel} \\ |z - \omega| = 2|\omega| \end{cases} \iff \begin{cases} z^2 - \omega^2 - (\bar{z}^2 - \bar{\omega}^2) = 0 \\ (z - \omega)(\bar{z} - \bar{\omega}) = 4\omega\bar{\omega} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z^2 - \omega^2 - \bar{z}^2 + \bar{\omega}^2 = 0 \\ \bar{z} = \bar{\omega} + \dfrac{4\omega\bar{\omega}}{z - \omega} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z^2 - \omega^2 - \frac{16\omega^2\bar{\omega}^2}{(z-\omega)^2} - 8\frac{\omega\bar{\omega}^2}{z - \omega} = 0$$

$$\Rightarrow (z+\omega)(z-\omega)^3 - 16\omega^2\bar{\omega}^2 - 8(z-\omega)\omega\bar{\omega}^2 = 0$$

$$\Rightarrow (z+\omega)(z-\omega)^3 - 8(z+\omega)\omega\bar{\omega}^2 = 0$$

$$\Rightarrow (z+\omega)\left[(z-\omega)^3 - 8\omega\bar{\omega}^2\right] = 0 \qquad (*)$$

Réc., il faut vérifier que (*) entraîne $M(z) \in \mathcal{H} \cap \mathcal{S}$. Si (*) est vraie, et si $z = -\omega$, alors $\begin{cases} z^2 - \omega^2 \text{ réel} \\ |z-\omega| = 2|\omega| \end{cases}$ est trivial.

Supposons donc $z \neq -\omega$. On a :

$$(z-\omega)^3 = 8\omega\bar{\omega}^2 \qquad (**)$$

donc $|z-\omega|^3 = 8|\omega|^3$ ce qui entraîne déjà $|z-\omega| = 2|\omega|$.

Il reste à prouver que $z^2-\omega^2$ est réel. Si l'on pose $\omega = re^{i\theta}$, (**) s'écrit :

$$(z-\omega)^3 = 8r^2 . re^{-i\theta} = 8r^3 e^{-i\theta}$$

d'où

$$z = \omega + \underbrace{2r\, e^{-i\frac{\theta}{3} + ik\frac{2\pi}{3}}}_{\xi} \qquad (0 \leq k \leq 2)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} z^2-\omega^2 &= (\omega+\xi)^2 - \omega^2 \\ &= \xi^2 + 2\omega\xi \\ &= 4r^2 e^{-i\frac{2\theta}{3} + ik\frac{4\pi}{3}} + 2re^{i\theta} . 2r\, e^{-i\frac{\theta}{3} + ik\frac{2\pi}{3}} \\ &= 4r^2 \left(e^{-i\frac{2\theta}{3} + ik\frac{4\pi}{3}} + e^{i\frac{2\theta}{3} - ik\frac{4\pi}{3}} \right) \\ &= 8r^2 \cos\left(\frac{2\theta}{3} - \frac{4\pi}{3}\right) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

La réciproque a abouti.

II.1.3

Soit a un complexe tel que $(a-\omega)^3 - 8\omega\bar{\omega}^2 = 0$. Alors

$$(*) \quad (z-\omega)^3 = 8\omega\bar{\omega}^2 \iff \left(\frac{z-\omega}{a-\omega}\right)^3 = 1 \iff z-\omega = e^{ik\frac{2\pi}{3}}(a-\omega)$$

$(0 \leq k \leq 2)$

L'équation $(*)$ admet donc toujours 3 racines distinctes a, b, c qui sont les affixes des sommets d'un triangle équilatéral ABC. En effet, quitte à permuter les notations b et c, on a :

$$b-\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}(a-\omega) \quad \text{et} \quad c-\omega = e^{i\frac{4\pi}{3}}(a-\omega)$$

ce qui traduit que l'image de A par la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ (resp. $\frac{4\pi}{3}$) est B (resp. C).

Cela étant, la résolution de l'équation du II.1.2 donne :

$$(z+\omega)\left[(z-\omega)^3 - 8\omega\bar{\omega}^2\right] = 0 \iff \begin{cases} z = -\omega \\ \text{ou} \\ z \in \{a, b, c\} \end{cases}$$

$-\omega$ est l'une des racines a, b ou c ssi

$$(-2\omega)^3 = 8\omega\bar{\omega}^2$$

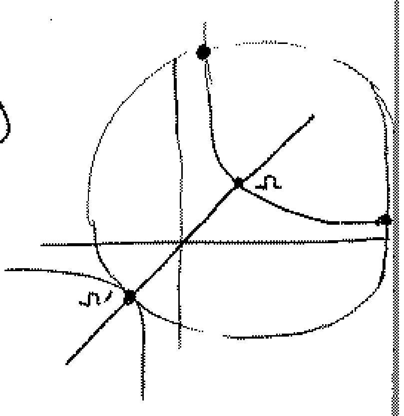
$$-\omega^2 = \bar{\omega}^2$$

$$\omega^2 + \bar{\omega}^2 = 0$$

$$\cos 2\theta = 0 \quad (\text{où } \omega \doteq re^{i\theta})$$

$$2\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$



Ccl : • Si Ω n'est pas sur la 1-bissectrice, $\mathcal{S}$ coupe $\mathcal{H}$ en 4 pts distincts A, B, C, Ω' et ABC est équilatéral.

• Sinon $\mathcal{S}$ coupe $\mathcal{H}$ en 3 pts distincts sommets d'un triangle équilatéral et $\mathcal{S}$ est tangent à $\mathcal{H}$ en Ω'.

II.2.1 ABC est équilatéral ssi la rotation r de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ (ou $-\frac{2\pi}{3}$) vérifie $r(A)=B$ et $r^2(A)=C$, ie

$$\begin{cases} \beta-\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}(\alpha-\omega) \\ \gamma-\omega = e^{i\frac{4\pi}{3}}(\alpha-\omega) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \beta-\omega = e^{-i\frac{2\pi}{3}}(\alpha-\omega) \\ \gamma-\omega = e^{-i\frac{4\pi}{3}}(\alpha-\omega) \end{cases}$$

cela équivaut à dire que α, β, γ vérifient

$$(\gamma-\omega)^3 = (\beta-\omega)^3 = (\alpha-\omega)^3$$

ou encore à α, β, γ solutions de l'équation

$$\boxed{(z-\omega)^3 = \rho^3}$$

où $\rho \in \mathbb{C}$.

D'où α, β, γ solution de

$$z^3 - 3\omega z^2 + 3\omega^2 z - \omega^3 - \rho^3 = 0$$

Les relation entre coeff. et racines d'un polynôme donnent

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 3\omega \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = 3\omega^2 \\ \alpha\beta\gamma = \omega^3+\rho^3 \end{cases} \qquad (R)$$

d'où $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$$= 9\omega^2 - 6\omega^2$$

$$\boxed{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 3\omega^2}$$

II.2.2

- On a vu en II.1.1 que si $A(\alpha) \in \mathcal{H}$, alors
$$z \in \mathcal{H} \iff z^2 - \alpha^2 \in \mathbb{R}$$

Ici, on note que $A, B, C \in \mathcal{H}$ donc :
$$z \in \mathcal{H} \iff z^2 - \alpha^2 \in \mathbb{R} \iff z^2 - \beta^2 \in \mathbb{R} \iff z^2 - \gamma^2 \in \mathbb{R}$$

- Par ailleurs :
$$\omega^2 - \alpha^2 = \frac{1}{3}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \alpha^2 = \frac{1}{3}\underbrace{(\beta^2 - \alpha^2)}_{\in \mathbb{R}} + \frac{1}{3}\underbrace{(\gamma^2 - \alpha^2)}_{\in \mathbb{R}}$$

donc $\omega^2 - \alpha^2 \in \mathbb{R}$, ce qui équivaut à $\Omega(\omega) \in \mathcal{H}$.

NB : Autre solution (analytique). On pose $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \dots, \omega = \omega_1 + i\omega_2$ et l'on identifie les parties imaginaires de $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3\omega^2$ pour obtenir $3\omega_1\omega_2 = \underbrace{\alpha_1\alpha_2}_{k} + \underbrace{\beta_1\beta_2}_{k} + \underbrace{\gamma_1\gamma_2}_{k} \Rightarrow \omega_1\omega_2 = k \Rightarrow \Omega \in \mathcal{H}$

II.2.3

On détermine les coefficients du polynôme
$$P(z) = (z - \alpha^2 + \omega^2)(z - \beta^2 + \omega^2)(z - \gamma^2 + \omega^2)$$
grâce aux relations entre coeff. et racines. On a, en posant
$$\begin{cases} z_\alpha = \alpha^2 - \omega^2 \\ z_\beta = \beta^2 - \omega^2 \\ z_\gamma = \gamma^2 - \omega^2 \end{cases}$$

$$z_\alpha + z_\beta + z_\gamma = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 3\omega^2 = 0$$

$$\begin{aligned}
z_\alpha z_\beta + z_\beta z_\gamma + z_\gamma z_\alpha &= (\alpha^2 - \omega^2)(\beta^2 - \omega^2) + (\beta^2 - \omega^2)(\gamma^2 - \omega^2) + (\gamma^2 - \omega^2)(\alpha^2 - \omega^2) \\
&= \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 - \omega^2 . 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 3\omega^4 \\
&= (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2(\alpha\beta^2\gamma + \alpha^2\beta\gamma + \alpha\beta\gamma^2) - 6\omega^4 + 3\omega^4 \\
&= 9\omega^4 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) - 3\omega^4 \\
&= 6\omega^4 - 2(\omega^3 + \rho^3) . 3\omega \\
&= -6\omega\rho^3
\end{aligned}$$

(on utilise les relations (R) du II.2.1)

$$\Im\alpha\,\Im\beta\,\Im\gamma = (\alpha^2-\omega^2)(\beta^2-\omega^2)(\gamma^2-\omega^2)$$

$$= \alpha^2\beta^2\gamma^2 - \omega^2(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2) + \omega^4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) - \omega^6$$

$$= (\omega^3+\rho^3)^2 - \omega^2\underbrace{\left[(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\right]}_{9\omega^4 - 2(\omega^3+\rho^3).3\omega} + 3\omega^6 - \omega^6$$

$$= \omega^6 + \rho^6 + 2\omega^3\rho^3 - \omega^2[3\omega^4 - 6\rho^3\omega] + 2\omega^6$$

$$= 3\omega^6 + \rho^6 + 2\omega^3\rho^3 - 3\omega^6 + 6\omega^3\rho^3$$

$$= \rho^6 + 8\omega^3\rho^3$$

$$= (8\omega^3+\rho^3)\rho^3$$

Finalement

$$\boxed{P(z) = z^3 - 6\omega\rho^3 z - (8\omega^3+\rho^3)\rho^3}$$

On a vu (II.2.2) que $\Im\alpha, \Im\beta, \Im\gamma$ étaient réelles. Les relations ci-dessus imposent donc à $\omega\rho^3$ et $8\omega^3+\rho^3$ d'être réels.

II.2.4

- On traduit le fait que $\omega\rho^3$ et $8\omega^3+\rho^3$ sont réels par

$$\begin{cases} \omega\rho^3 = \overline{\omega}\,\overline{\rho}^3 \\ (8\omega^3+\rho^3)\rho^3 = (8\,\overline{\omega}^3+\overline{\rho}^3)\,\overline{\rho}^3 \end{cases}$$

Posons $\rho^3 = X$, on aura

$$\begin{cases} \omega X = \overline{\omega}\,\overline{X} \quad \Rightarrow \overline{X} = \frac{\omega}{\overline{\omega}} X \\ (8\omega^3+X)X = (8\overline{\omega}^3+\overline{X})\overline{X} \end{cases}$$

Soit $8\omega^3 X + X^2 = 8\bar{\omega}^3 \frac{\omega}{\bar{\omega}} X + \frac{\omega^2}{\bar{\omega}^2} X^2$

Ici $X \neq 0$, donc

$$8\omega^3\bar{\omega}^2 + \bar{\omega}^2 X = 8\bar{\omega}^4\omega + \omega^2 X$$

$$8\omega^3\bar{\omega}^2 - 8\bar{\omega}^4\omega = (\omega^2 - \bar{\omega}^2)X$$

$$8\omega\bar{\omega}^2(\omega^2 - \bar{\omega}^2) = (\omega^2 - \bar{\omega}^2)X$$

$$X = 8\omega\bar{\omega}^2$$

ie $\boxed{\rho^3 = 8\omega\bar{\omega}^2}$

<u>NB</u> : On a pu diviser par $\omega^2 - \bar{\omega}^2$ car $\omega^2 \neq \bar{\omega}^2$. En effet, $\omega^2 = \bar{\omega}^2$ équivaut à $\sin 2\theta = 0$ (où $\omega \doteq r e^{i\theta}$), soit à $\theta = k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Cela entraîne que Ω est sur l'un des axes de coordonnées, en désaccord avec $\Omega \in \mathcal{H}$ prouvé au II.2.2.

- D'après II.2.1, une équation du cercle $\mathcal{C}_{ABC}$ circonscrit à ABC est $|z - \omega| = |\rho|$. Montrer que le symétrique Ω' de Ω par rapport à O appartient à $\mathcal{C}_{ABC}$ revient donc à montrer que $|-2\omega| = |\rho|$.

On a :

$$|-2\omega| = |\rho| \Leftrightarrow 4\omega\bar{\omega} = \rho\bar{\rho}$$

$$\Leftrightarrow (4\omega\bar{\omega})^3 = \rho^3\bar{\rho}^3 \quad \text{(puisque les 2 membres sont réels)}$$

$$\Leftrightarrow 64\omega^3\bar{\omega}^3 = (8\omega\bar{\omega}^2)(8\bar{\omega}\omega^2)$$

Cette dernière affirmation est triviale.

III.1.1

$\mathcal{D}_A : \quad \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0 \iff \begin{pmatrix} x-a \\ y-\frac{k}{a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c-b \\ \frac{k}{c}-\frac{k}{b} \end{pmatrix} = 0 \iff (c-b)(x-a) + k\left(\frac{b-c}{bc}\right)\left(y-\frac{k}{a}\right) = 0$

$\iff x - a - \frac{k}{bc}y + \frac{k^2}{abc} = 0$

A
B
C
$\mathcal{D}_A$

$$\boxed{\mathcal{D}_A : \quad x - \frac{k}{bc}y - a + \frac{k^2}{abc} = 0}$$

$M(x,y) \in \mathcal{D}_A \cap \mathcal{H} \iff \begin{cases} y = \frac{k}{x} \\ x - \frac{k}{bc}\cdot\frac{k}{x} - a + \frac{k^2}{abc} = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y = \frac{k}{x} \\ abcx^2 + (k^2 - a^2bc)x - ak^2 = 0 \end{cases}$ (a est racine)

$\iff \begin{cases} y = \frac{k}{x} \\ abc(x-a)\left(x + \frac{k^2}{abc}\right) = 0 \end{cases}$

$$\boxed{\mathcal{D}_A \cap \mathcal{H} = \left\{ \left(a, \frac{k}{a}\right), \left(-\frac{k^2}{abc}, -\frac{abc}{k}\right) \right\}}$$

En faisant une permutation circulaire et en notant $\mathcal{D}_B$ la hauteur issue de B, on trouve encore :

$\mathcal{D}_B \cap \mathcal{H} = \left\{ \left(b, \frac{k}{b}\right), \left(-\frac{k^2}{abc}, -\frac{abc}{k}\right) \right\}$

Le point $D\left(-\frac{k^2}{abc}, -\frac{abc}{k}\right)$ est donc sur $\mathcal{D}_A \cap \mathcal{D}_B$. C'est l'orthocentre de ABC, et il appartient à $\mathcal{H}$.

III.1.2

1^re^ solution : $\mathcal{D}_A$ coupe $\mathcal{H}$ exactement en A et D (orthocentre de ABC) et n'est jamais parallèle à une asymptote de $\mathcal{H}$ (sinon 2 pts de [illegible] la m̂ ordonnée ou la m̂ abscisse).
Dire que $A = D$ revient à dire que $\mathcal{D}_A$ coupe $\mathcal{H}$ en un seul point A ie que $\mathcal{D}_A$ est la tangente à $\mathcal{H}$ en A.

2^e^ solution : Analytique

$$D = A \iff -\frac{k^2}{abc} = a \iff a^2bc = -k^2 \qquad (1)$$

$\mathcal{D}_A$ admet le vecteur directeur $\vec{u}_A\left(\frac{k}{bc}, 1\right)$ donc la pente $\frac{1}{\frac{k}{bc}} = \frac{bc}{k}$

La tangente à $\mathcal{H}$ en A admet la pente $-\frac{k}{a^2}$.

Ainsi $\mathcal{D}_A$ est tangente à $\mathcal{H}$ ssi $\frac{bc}{k} = -\frac{k}{a^2}$, ie ssi (1) est vraie.

III.1.3

- Si les 2 hyperboles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ se coupent en 4 pts distincts A, B, C, D, alors ABC est un triangle inscrit dans $\mathcal{H}$, donc son orthocentre H appartient à $\mathcal{H}$ d'après III.1.1.

  ABC est aussi un triangle inscrit dans $\mathcal{H}'$, donc $H \in \mathcal{H}'$ pour les m̂ raisons.

- De plus $H \notin \{A, B, C\}$, sinon l'on aurait par ex. $H = A$ et III.1.2 montrerait que la hauteur $\mathcal{D}_A$ est tangente à $\mathcal{H}$ <u>et</u> à $\mathcal{H}'$.

  2 hyperboles qui passent par 4 pts distincts A, B, C, D et qui admettent la même tangente en A, sont nécessairement égales(*). D'où l'absurdité.

- Comme $H \in (\mathcal{H} \cap \mathcal{H}') \setminus \{A, B, C\}$, on aura bien $H = D$ et le résultat annoncé.

(*) Ce lemme peut être admis au concours. Il est démontré en ucon 0010.

III.1.4 Ici $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}' = \{A, B, C\}$ et $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ sont tangentes en A. L'orthocentre D du triangle ABC sera dans $\{A, B, C\}$ d'après III.1.1. Si l'on avait $D = B$ ou C, les 2 hyperboles se couperaient en 3 points et admettraient la même tangente en 2 de ces points (si $D = B$, ce serait $\mathcal{D}_B$ ...), donc seraient confondues (cf ucon 0010). Donc $D = A$, le triangle ABC sera rectangle en A et (III.1.2) la hauteur $\mathcal{D}_A$ sera tangente commune à $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$.

III.2.1

$$\begin{cases} \mathcal{S} : & x^2 + y^2 - 2rx - 2sy + t = 0 \\ \mathcal{H} : & xy = k \end{cases}$$

d'où $$x^4 + k^2 - 2rx^3 - 2skx + tx^2 = 0$$

$$x^4 - 2rx^3 + tx^2 - 2skx + k^2 = 0$$

Le produit des racines x_i de cette équation est k^2.

III.2.2

Si $\mathcal{S} = \mathcal{C}_{ABC}$, a, b, c sont 3 racines distinctes de l'équation ci-dessus. La quatrième racine x_4 vérifiera :

$$abc\, x_4 = k^2 \implies x_4 = \frac{k^2}{abc}$$

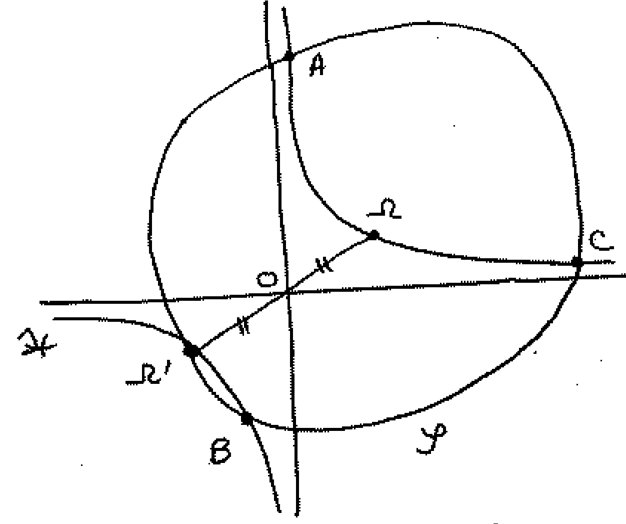
Le 4^e point de $\mathcal{S} \cap \mathcal{H}$ est donc de coordonnées $\left(\frac{k^2}{abc}, \frac{abc}{k}\right)$.

L'orthocentre D est de coordonnées $\left(-\frac{k^2}{abc}, -\frac{abc}{k}\right)$ symétrique du 4^e p^t de $\mathcal{S} \cap \mathcal{H}$ par rapport à O ; on a donc $\boxed{D' \in \mathcal{S} \cap \mathcal{H}}$

III.2.3

$\mathcal{S}$ coupe $\mathcal{H}$ en 4 pts distincts A, B, C, Ω' en général, et ici $\Omega' = D'$ = symétrique de l'orthocentre D de ABC /à O. On a $D' \in \mathcal{S} \cap \mathcal{H}$ (III.2.2)

On sait (III.1.1) que $\underline{D \in \mathcal{H}}$



<u>preuve de II.1.3</u> : Il faut prouver que si $\Omega \in \mathcal{H}$ et Ω' désigne le sym. de $\Omega /_{a} O$ alors le cercle $\mathcal{S} = \mathcal{C}(\Omega, \Omega\Omega')$ coupe $\mathcal{H}$ en 4 points A, B, C, Ω' tq ABC soit équilatéral (Ω' étant éventuellement confondu avec A, B ou C)

Le centre Ω de $\mathcal{S}$ appartient à $\mathcal{H}$ donc $\mathcal{S}$ coupera $\mathcal{H}$ en au moins 3 points distincts A, C, Ω' avec A et C sur la même branche $\mathcal{H}_{\Omega}$ de $\mathcal{H}$ que Ω.
Le quatrième point d'intersection éventuel, noté B, sera sur la branche $\mathcal{H}_{\Omega'}$ de $\mathcal{H}$ contenant Ω', et sera éventuellement confondu avec Ω'.
Dans tous les cas, les points A, B, C sont distincts. $\mathcal{S}$ est circonscrit à ABC donc le symétrique D' de l'orthocentre D de ABC $/_{a} O$ vérifiera (cf II.2.2) :

$$D' \in \mathcal{S} \cap \mathcal{H} = \{A, B, C, \Omega'\}$$

• <u>Si $D' = \Omega'$</u>, $D = \Omega$ et le centre du cercle circonscrit à ABC coïncide avec son orthocentre. <u>ABC est alors équilatéral</u>.

• <u>$D' = A$ ou $D' = C$</u> mène à une absurdité. En effet, cela entraîne $D \in \mathcal{H}_{\Omega'}$ et donc (BD) sera orthogonale à (AC) avec $B, D \in \mathcal{H}_{\Omega'}$. Cela est absurde compte tenu du lemme :

> <u>Lemme</u> : Si A et C sont 2 pts distincts de $\mathcal{H}_{\Omega}$, toute droite D orthogonale à (AC) coupe la branche $\mathcal{H}_{\Omega'}$ en au plus un point.

<u>preuve du lemme</u> : vu le choix de A et C sur $\mathcal{H}_{\Omega}$ la droite D coupera $\mathcal{H}_{\Omega}$ en un point. Comme D coupe $\mathcal{H}$ en au plus 2 points, elle coupera la branche $\mathcal{H}_{\Omega'}$ en au plus un point.
<u>Autre façon de le voir</u> : si $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}, C\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$, $\mathcal{H} : xy = k$ avec $k > 0$, $x_A > 0$ et $x_C > 0$, alors une droite D orthogonale à (AC) admet une équation du type

$$(x_C - x_A)x + (y_C - y_A)y + cte = 0$$

et $\mathcal{H} \cap D$ se trouve en résolvant $(x_C - x_A)x^2 + cte\, x + (y_C - y_A)k = 0$.
Si $x_1 < 0$ est racine de cette équation, la seconde racine x_2 vérifiera

$$x_1 x_2 = \frac{(y_C - y_A)k}{x_C - x_A} = -\frac{k}{x_A x_C} < 0 \quad \text{donc } x_2 > 0 \quad \square$$

• Si $D' = B$: Non fait.

Preuve de II.2.2 : Si ABC est équilatéral, son orthocentre D coïncide avec le centre Ω de son cercle circonscrit et l'on sait que $D \in \mathcal{H}$ (cf III.1.1).

Preuve de II.2.4 : Trivial puisque le symétrique D' du centre D de $\mathcal{S}$ appartient à $\mathcal{S}$ d'après III.2.2.

III.3.1 Ici A, B, C, D sont 4 points distincts de $\mathcal{H}$.

• Si $\mathcal{C} = \Delta \cup \Delta'$ où Δ, Δ' sont 2 droites parallèles aux axes Ox et Oy, alors 2 au moins des 3 points distincts A, B, C seront sur la même droite Δ ou Δ', par exemple A et B. Mais alors (AB) sera parallèle à une asymptote de $\mathcal{H}$ avec $A, B \in \mathcal{H}$. C'est absurde.

• On sait déjà que $A, B, C, D \in \mathcal{H}$. Comme $\mathcal{C}$ est une hyperbole d'asymptotes parallèles aux axes, on peut écrire

$$\begin{cases} \mathcal{H} : & xy = k \\ \mathcal{C} : & (x-u)(y-v) = k' \end{cases}$$

$\mathcal{H}$ et $\mathcal{C}$ passent simultanément par les 4 pts distincts A, B, C, D d'abscisses a, b, c, d si l'équation du second degré

$$(x-u)\left(\frac{k}{x}-v\right)=k'$$

admet les 4 racines distinctes a, b, c, d. Cela n'est possible que si les coefficients du trinôme sont nuls. On a :

$$k-\frac{uk}{x}-vx+uv=k'$$

$$-vx^2+(k+uv-k')x-uk=0$$

soit $v=k+uv-k'=uk=0 \iff (u,v,k')=(0,0,k)$

$\implies \mathcal{H}=\mathcal{C}.$ □

III.3.2

- Unicité de l'hyperbole équilatère passant par A,B,C,E :

Si $E\notin\mathcal{H}$ et si $\mathcal{C}$ est une hyperbole équilatère qui passe par A, B, C, E, alors elle passera par l'orthocentre D de ABC (III.1.1). Comme D est distinct de A, B, C par hyp. et $D\neq E$ (car $E\notin\mathcal{H}$ et $D\in\mathcal{H}$), $\mathcal{C}$ passera par les 5 pts distincts A, B, C, D, E. Elle sera donc unique (cf préliminaires du pb ou ucon0010)

- L'unicité du couple de dtes perpendiculaires passant par A, B, C, E :

VOIR p20

- Existence : * Si il existe un pt de {A, B, C}, par exemple C, tq $(AB)\perp(CE)$, alors les 2 dtes perpendiculaires (AB), (CE) sont solution. Idem si $E\in(AB)$ ou (BC) ou (CA).

* Supposons maintenant que E n'appartienne à aucune des hauteurs du triangle ABC ~~V~~ ni à aucune des droites (AB), (BC) ou (CA). Il s'agit de mq il existe une hyperbole équilatère passant par A, B, C, E.

- Unicité du couple de perpendiculaire passant par A, B, C, E :

Supposons que $\mathcal{C}' = \mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$ passe par A, B, C, E avec $\mathcal{D} \perp \mathcal{D}'$. On peut supposer que $\mathcal{D} = (AB)$ et $C \in \mathcal{D}'$ quitte à échanger les notation de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et puisque A, B, C ne sont pas alignés. Il y a 2 cas de figure suivant que E appartienne ou non à $\mathcal{D}$:

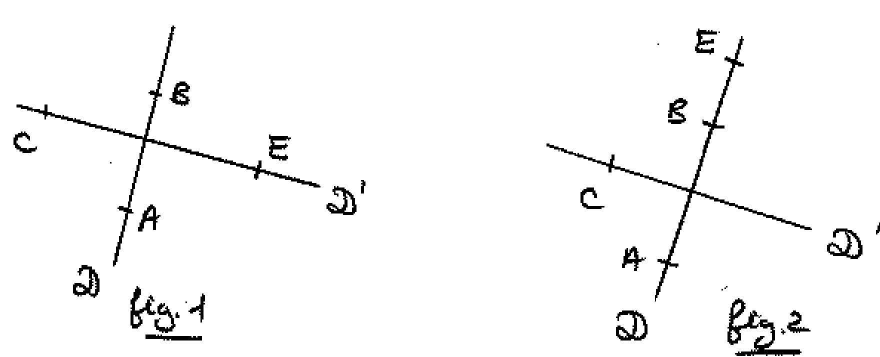


fig.1 fig.2

Soient $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}'_0$ deux droites perpendiculaires tq $A, B, C, E \in \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}'_0$. Quitte à changer les notations, on peut supposer $A \in \mathcal{D}_0$.

① Cas de la fig. 1 : comme A, B, C non alignés on a 4 cas possibles,

$\mathcal{D}_0$	$\mathcal{D}'_0$	
AB	CE	$\Rightarrow (AB) \perp (CE)$, $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$ et $\mathcal{D}' = C + (AB)^\perp = \mathcal{D}'_0$
AC	BE	$\Rightarrow (AC) \perp (BE)$ et $(AB) \perp (CE) \Rightarrow E = D$ orthocentre de ABC $\Downarrow$ $E \in \mathcal{H}$ absurde
ABE	C	$\Rightarrow \mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'_0 = C + (AB)^\perp = \mathcal{D}'$
ACE	B	$\Rightarrow A \in (CE) \underset{fig1}{\Rightarrow}$ ABC rectangle en A, absurde

② Cas de la fig. 2 :

$\mathcal{D}_0$	$\mathcal{D}'_0$	
AB	CE	$\Rightarrow \mathcal{D}_0 = (AB) = \mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'_0 = C + (AB)^\perp = \mathcal{D}'$
AC	BE	$\Rightarrow (CA) \perp (BE) \underset{fig2}{\Rightarrow}$ ABC rectangle en A, absurde
ABE	C	$\Rightarrow \mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'_0 = C + (AB)^\perp = \mathcal{D}'$
ACE	B	$\underset{fig2}{\Rightarrow}$ A, B, C, E alignés, absurde.

Ccl : Dans tous les cas $(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = (\mathcal{D}_0, \mathcal{D}'_0)$.

• Dans les 2 cas la conique $\mathcal{C}'$ (égale à 2 dtes perpendiculaires ou à une hyperbole équilatère) passant par A, B, C, E passera par D : si $\mathcal{C}'$ est une hyperbole, c'est prouvé en III.1.1. Si $\mathcal{C}'$ est formé de 2 dtes perpendiculaires, par ex. (AB) sera perpendiculaire à (CE) et l'orthocentre D de ABC sera sur la hauteur issue de C, donc $D \in (CE) \subset \mathcal{C}'$. Le raisonnement est identique dans les 2 cas de figure fig1 ou fig2.

III.3.3

$\mathcal{C}$ est une conique passant par A, B, C, D.

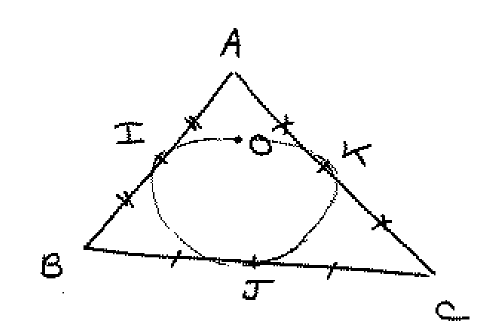
• Si $\mathcal{C} = \mathcal{H}$, c'est une hyperbole équilatère.

• Sinon, il existe $E \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{H}$ et $\mathcal{C}$ passe par A, B, C, E. La question précédente montre qu'il existe une unique $\mathcal{C}'$ égal soit à la réunion de 2 dts // aux axes, soit à une hyperbole équilatère, qui passe par A, B, C, E.

Mais alors $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ coïncident en 5 points distincts A, B, C, D, E, donc $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$.

III. 3.4

- Envisageons le cas où $\mathcal{C}$ est une hyperbole équilatère passant par A, B, C et de centre O.



Notons I, J, K les milieux resp. de [AB], [BC], [CA].

I.2.1, prouve que les bissectrices de ((IO), (AB)) sont parallèles aux asymptotes de $\mathcal{C}$ que nous noterons Ox et Oy. Donc :

$$\begin{cases} (IO, Ox) = (Ox, AB) & (\pi) \\ (IO, Oy) = (Oy, AB) & (\pi) \end{cases}$$

De même avec les milieux J et K :

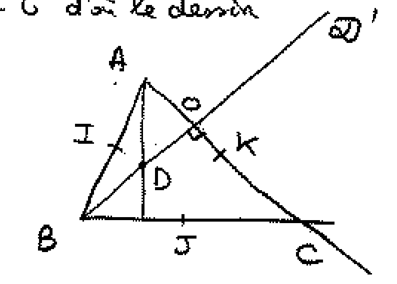
{ les bissectrices de ((J,O), (BC)) sont // aux asymptotes Ox et Oy
{ " ((K,O), (AC)) " // " "

Cela entraîne

$$\begin{aligned} (IO, JO) &= (IO, Ox) + (Ox, JO) \qquad \text{(angles de droites)} \\ &= (Ox, AB) + (BC, Ox) \\ &= (BC, AB) \\ &= (IK, JK) \quad \text{puisque } (BC)//(IK) \text{ et } (AB)//(JK) \end{aligned}$$

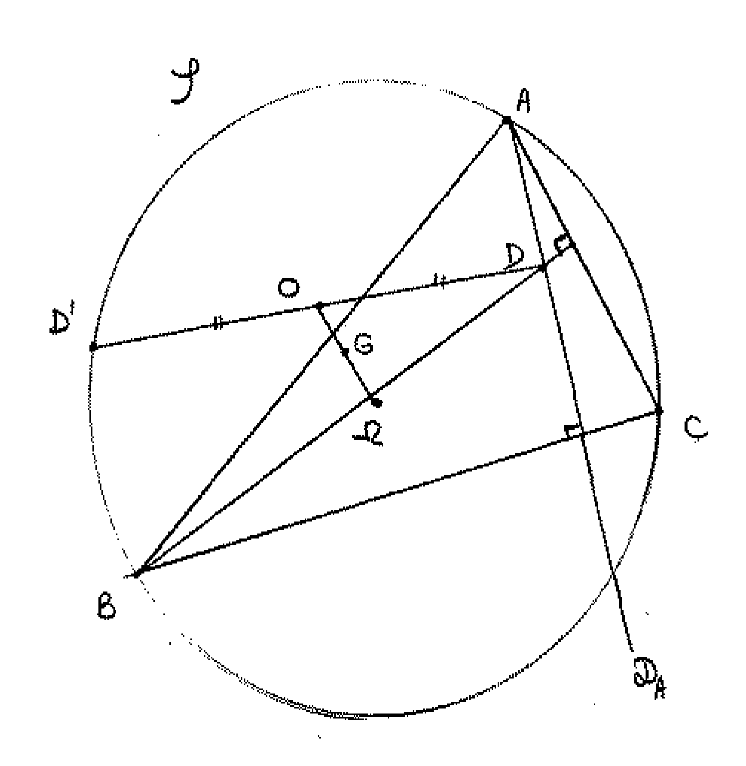
et la cocyclicité des 4 points O, I, J, K.

- Cas où $\mathcal{C}$ est la réunion de 2 droites perpendiculaires $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$; On sait que $A, B, C \in \mathcal{C}$ et $D \in \mathcal{C}$ d'où le dessin



. Le centre O de $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$ est le pied de la hauteur issue de B du triangle ABC, desorte que O, I, J, K appartiennent au cercle d'Euler du triangle ABC.

IV.1



Soit g l'isobarycentre de A, B, C. La relation d'Euler s'écrit :

$$\overrightarrow{\Omega D} = 3\,\overrightarrow{\Omega g}$$

et par associativité du barycentre, G est barycentre de $g(3)$, $D'(-1)$.

Donc

$$\overrightarrow{OG} = \frac{3\overrightarrow{Og} + \overrightarrow{OD'}}{4} = \frac{3\overrightarrow{Og} - \overrightarrow{OD}}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\left(3\,(\overrightarrow{O\Omega} + \cancel{\overrightarrow{\Omega g}}) - (\overrightarrow{O\Omega} + \cancel{\overrightarrow{\Omega D}})\right)$$

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{O\Omega}}$$

et G est milieu de $[O, \Omega]$

IV.2.1 Si C tend vers A en restant sur $\mathcal{H}$, (AC) tend vers la tangente τ_A et $\mathcal{D}_A = A + (BC)^\perp$ tend vers $A + (AB)^\perp$ (ie la perpendiculaire à (AB) passant par A)

IV.2.2

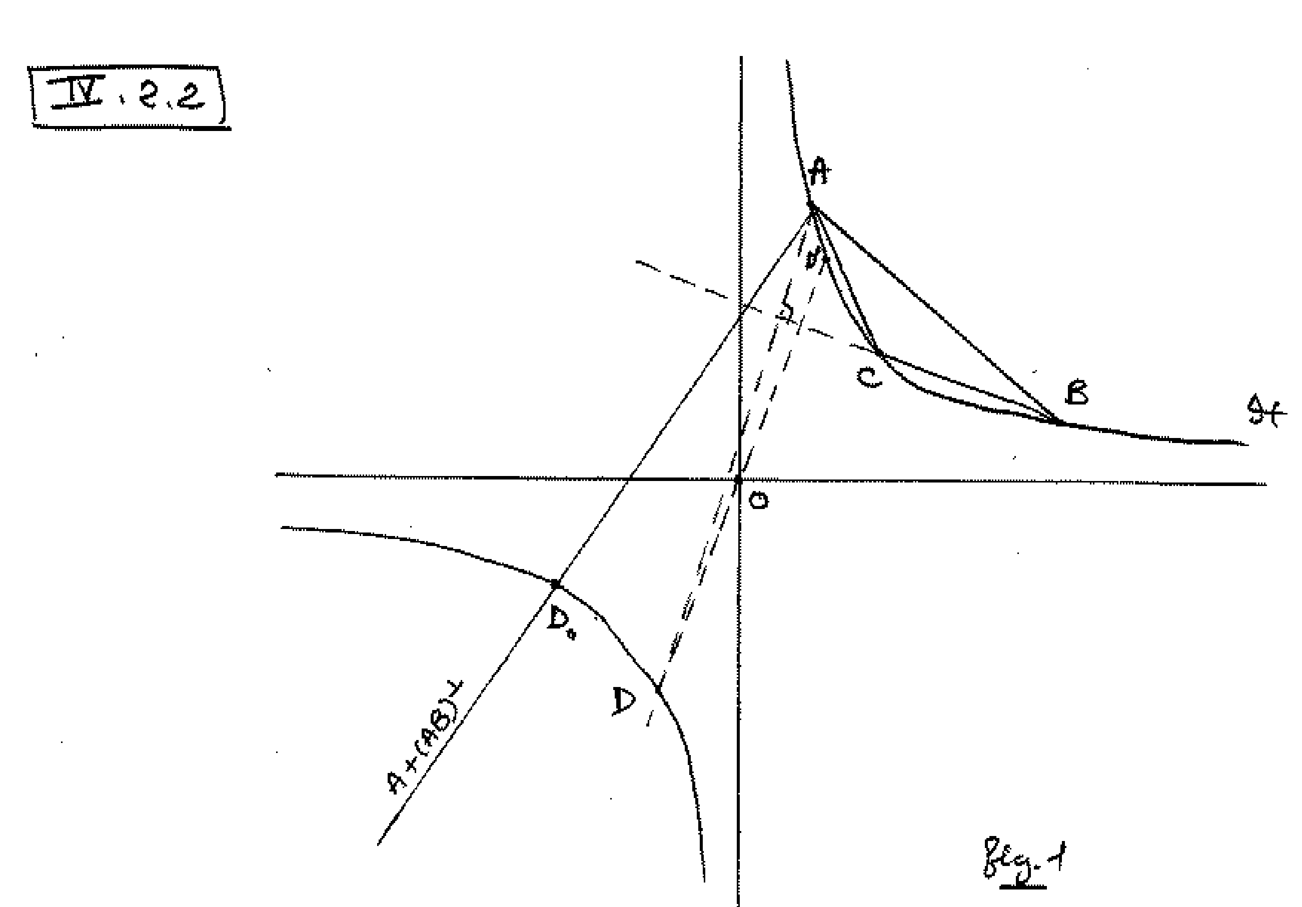


fig. 1

Quand $C \to A$,

- $D \in (A+(BC)^\perp) \cap \mathcal{H} \cap (B+(AC)^\perp) \to D_0 \in (A+(AB)^\perp) \cap \mathcal{H} \cap (B+\tau_A^\perp)$
  D_0 sera le second point d'intersection de $A+(AB)^\perp$ avec $\mathcal{H}$
- D' sym. de D /à O $\Rightarrow$ $D'_0 = \lim D'$ = sym. de D_0 /à O
- G isobary. de A, B, C, D' $\Rightarrow$ $G_0 = \lim G$ = barycentre de $A(2), B(1), D'_0(1)$
- Ω symétrique de O /à G $\Rightarrow$ $\Omega_0 = \lim \Omega$ symétrique de O /à G_0
- $\mathcal{S} \to \mathcal{S}_0$ cercle de centre Ω_0 et de rayon $\Omega_0 A$. C'est le cercle circonscrit au triangle ABD'_0 (car $D' \in \mathcal{S} \Rightarrow D'_0 \in \mathcal{S}_0$)

IV.3.1

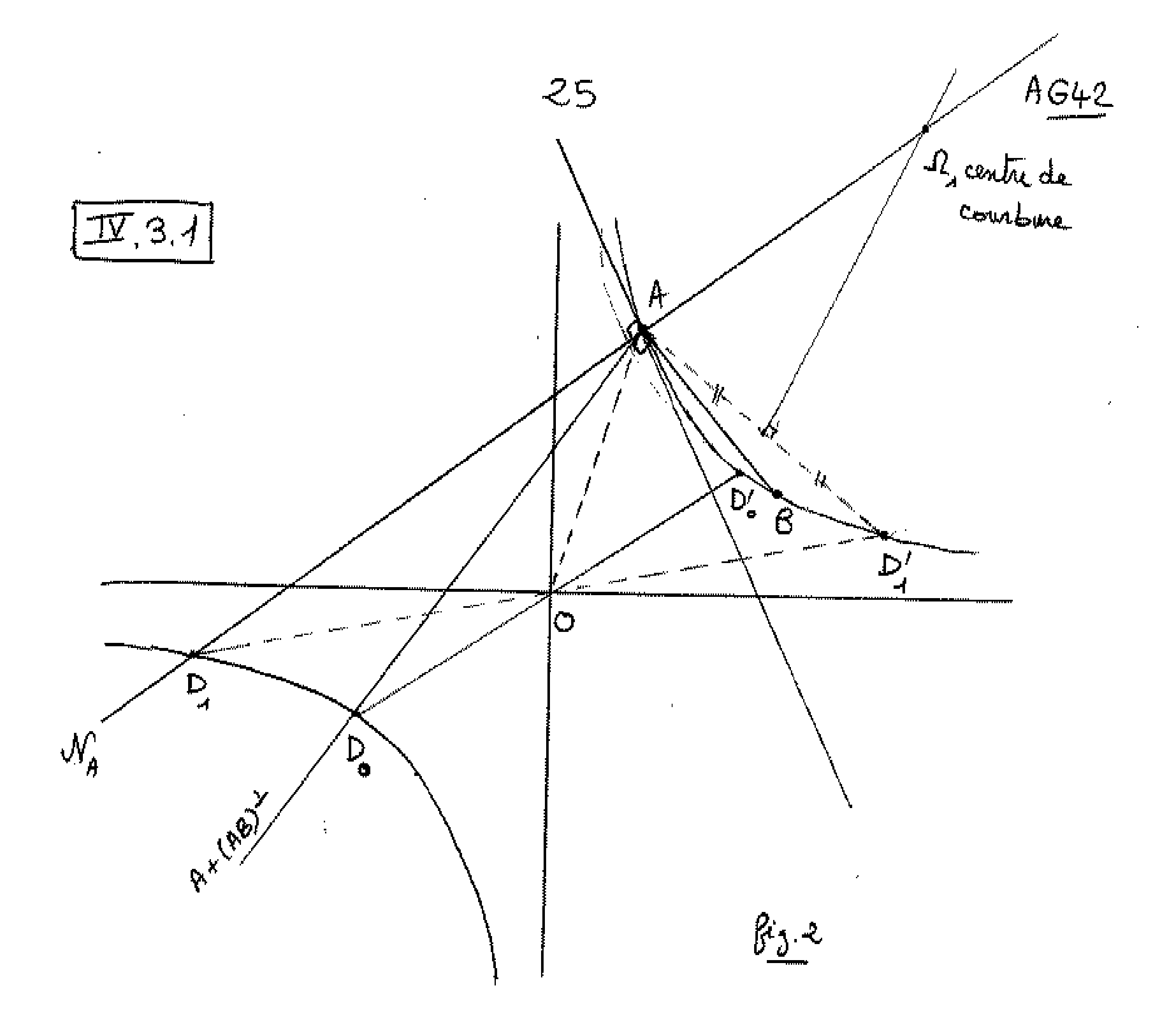


fig. 2

Quand $B \to A$,

- $D_0 \in (A+(AB)^\perp)\cap\mathcal{H}\cap(B+\tau_A^\perp) \longrightarrow D_1 \in (A+\tau_A^\perp)\cap\mathcal{H} = \mathcal{N}_A\cap\mathcal{H}$

  D_1 est le second point d'intersection de $\mathcal{N}_A$ et $\mathcal{H}$.

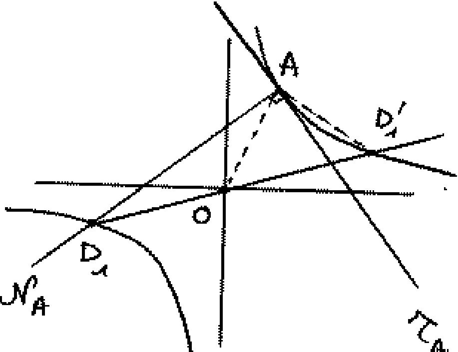
- D'_0 = sym. de D_0 /à O $\longrightarrow$ D'_1 = sym. de D_1 /à O

- G_0 bary. de $A(2), B(1), D'_0(1)$ $\longrightarrow$ G_1 bary. de $A(3), D'_1(1)$

- Ω_0 = sym. de O /à G_0 $\longrightarrow$ Ω_1 = sym. de O /à G_1

- $\mathcal{S}_0 \longrightarrow \mathcal{S}_1$ cercle de centre Ω_1 et de rayon $\Omega_1 A$. $\mathcal{S}_1$ contient A et D'_1.

IV.3.2 (Exercice indépendant du reste)



• Cas où $A \neq D'_1$:
Il faut mq $(AO) \perp (AD'_1)$ où D_1 est le second pt d'intersection de $\mathcal{N}_A$ et $\mathcal{H}$, et D'_1 le symétrique de D_1 /à O.

Notons $A\left(a, \frac{k}{a}\right)$. $\mathcal{H} : y = \frac{k}{x}$ de sorte que $\vec{u}\left(1, -\frac{k}{a^2}\right)$ dirige la tangente à $\mathcal{H}$ en A et qu'une équation de $\mathcal{N}_A$ soit $(x-a) - \frac{k}{a^2}\left(y - \frac{k}{a}\right) = 0$.
$\mathcal{N}_A$ coupe $\mathcal{H}$ en des points (x, y) vérifiant

$$(x-a) - \frac{k}{a^2}\left(\frac{k}{x} - \frac{k}{a}\right) = 0$$

$$(x-a)\left[1 + \frac{k^2}{a^3 x}\right] = 0$$

donc $D_1\left(-\frac{k^2}{a^3}, -\frac{a^3}{k}\right)$ et $D'_1\left(\frac{k^2}{a^3}, \frac{a^3}{k}\right)$.

Par suite :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AD'_1} = \left(a, \frac{k}{a}\right) \cdot \left(\frac{k^2}{a^3} - a, \frac{a^3}{k} - \frac{k}{a}\right) = 0$$

• Cas où $A = D'_1$: ici O est le milieu de $[AD_1]$ donc $(OA) = \mathcal{N}_A$ sera évidemment perpendiculaire à la tangente τ_A en A.

IV.3.3 **Centre de courbure en A**

$\mathcal{S}_1$ sera le cercle osculateur de $\mathcal{H}$ en A et son centre Ω_1 sera le centre de courbure (puisque $\mathcal{S}_1$ coupe $\mathcal{H}$ en A suivant un "point triple" ; $\mathcal{S}_1$ étant la position limite des cercles $\mathcal{S}$ coupant $\mathcal{H}$ en exactement A, B, C, D' quand $C \to A$ et $B \to A$. A la limite, les points d'intersection A, B, C sont confondus...). D'où la construction de Ω_1 :

• Si $A \neq D'_1$:
- $\mathcal{S}_1$ passe par A et D'_1
- AOD'_1 est rectangle en A et $D'_1 \in \mathcal{H}$ permet de construire facilement D'_1.
- Ω_1 sera sur la médiatrice de $[AD'_1]$ et sur la normale $\mathcal{N}_A$

(cf fig. 2 p 25)

• Si $A = D'_1$: dans ce cas G_1 est barycentre de $A(3)$, $D'_1(1)$ ie de $A(4)$ et $G_1 = A$.
On sait qu'alors Ω_1 est le symétrique de O /à $G_1 = A$,

REMARQUES sur IV.3.3

Le centre de courbure en A de l'hyperbole $\mathcal{H} : xy = k$ est la position limite des intersections de la normale $\mathcal{N}_A$ en A et des normales $\mathcal{N}_M$ en $M \in \mathcal{H}$ quand M tend vers A en restant sur $\mathcal{H}$.

On se propose :

① De déterminer les coordonnées du centre de courbure Ω_c de $\mathcal{H}$ en A,

② De vérifier que $\Omega_c = \Omega_1$ (notations du IV.3.3)

① On a vu en IV.3.2, qu'une équation de $\mathcal{N}_A$ est $(x-a) - \frac{k}{a^2}\left(y - \frac{k}{a}\right) = 0$, de sorte que si $M\left(m, \frac{k}{m}\right)$ est distinct de A, le point $I_M(x,y)$ d'intersection de $\mathcal{N}_A$ et $\mathcal{N}_M$ vérifie

$$\begin{cases} x - \dfrac{k}{a^2} y - a + \dfrac{k^2}{a^3} = 0 \\ x - \dfrac{k}{m^2} y - m + \dfrac{k^2}{m^3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{k}{a^2} \\ 1 & -\frac{k}{m^2} \end{vmatrix} = \frac{k}{a^2} - \frac{k}{m^2} = \frac{k(m^2 - a^2)}{a^2 m^2}$$

$$\begin{vmatrix} a - \frac{k^2}{a^3} & -\frac{k}{a^2} \\ m - \frac{k^2}{m^3} & -\frac{k}{m^2} \end{vmatrix} = -a\frac{k}{m^2} + \frac{k^3}{a^3 m^2} + \frac{km}{a^2} - \frac{k^3}{a^2 m^3}$$

$$= k\left(\frac{m}{a^2} - \frac{a}{m^2}\right) + k^3\left(\frac{1}{a^3 m^2} - \frac{1}{a^2 m^3}\right)$$

$$= k\,\frac{m^3 - a^3}{a^2 m^2} + k^3\,\frac{m-a}{a^3 m^3}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a - \frac{k^2}{a^3} \\ 1 & m - \frac{k^2}{m^3} \end{vmatrix} = m - a + \frac{k^2}{a^3} - \frac{k^2}{m^3} = m - a + k^2\,\frac{m^3 - a^3}{a^3 m^3}$$

Soit $I_M(x,y)$ avec

$$x = \frac{a^2m^2}{k(m^2-a^2)}\left[k\frac{m^3-a^3}{a^2m^2} + k^3\frac{m-a}{a^3m^3}\right]$$

$$= \frac{1}{m+a}\left[m^2+am+a^2+\frac{k^2}{am}\right] \underset{(m\to a)}{\longrightarrow} \frac{1}{2a}\left(3a^2+\frac{k^2}{a^2}\right)$$

$$y = \frac{a^2m^2}{k(m^2-a^2)}\left[m-a+k^2\frac{m^3-a^3}{a^3m^3}\right]$$

$$= \frac{a^2m^2}{k(m+a)}\left[1+k^2\left(\frac{m^2+am+a^2}{a^3m^3}\right)\right] \underset{(m\to a)}{\longrightarrow} \frac{a^3}{2k}\left[1+\frac{3k^2}{a^4}\right]$$

Et
$$\boxed{\Omega_c\left(\frac{3}{2}a+\frac{k^2}{2a^3}\ ,\ \frac{a^3}{2k}+\frac{3}{2}\frac{k}{a}\right)}$$

② Recherche des coordonnées de Ω_1

D'après IV.3.1, et vu $D_1'\left(\frac{k^2}{a^3},\frac{a^3}{k}\right)$ obtenu en IV.3.2,

$$\overrightarrow{O\Omega_1} = 2\,\overrightarrow{OG_1} = 2\times\frac{1}{4}\left(3\,\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD_1'}\right) = \frac{1}{2}\left(3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD_1'}\right)$$

$$\boxed{\Omega_1\left(\frac{1}{2}\left(3a+\frac{k^2}{a^3}\right),\ \frac{1}{2}\left(3\frac{k}{a}+\frac{a^3}{k}\right)\right)}$$

Conclusion : On a bien $\boxed{\Omega_c=\Omega_1}$.

FIN

77.0.1
86.0.8

J. 1152

SESSION DE 1998

concours externe de recrutement de professeurs certifiés et concours d'accès à des listes d'aptitude (CAFEP)

sections : mathématiques breton

première composition de mathématiques

Durée : 5 heures

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche - éventuellement programmable et alphanumérique - à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Documents interdits.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Tournez la page S.V.P.

OBJET ET NOTATIONS DU PROBLÈME

Soit f une fonction numérique réelle, définie et continue sur un intervalle $\mathrm{I} =]\alpha, \beta[$, où $\alpha \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ et $\beta \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. On suppose que l'ensemble $\Omega = \{x \in \mathrm{I} \mid f(x) = x\}$ des points fixes de f est non vide. On appellera suite récurrente, ou, s'il faut éviter une ambiguïté, suite récurrente associée à f, une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de points de I vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad x_{n+1} = f(x_n).$$

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés de ces suites.

I. EXISTENCE ET CONVERGENCE DES SUITES RÉCURRENTES

I.1. On définit par récurrence des parties I_p de I par :

$$\begin{cases} \mathrm{I}_1 = \mathrm{I} \\ \forall p \geqslant 1, \quad \mathrm{I}_{p+1} = f^{-1}(\mathrm{I}_p). \end{cases}$$

I.1.1. Montrer que I_p est ouvert dans $\mathbf{R}$, qu'on a $\mathrm{I}_{p+1} \subset \mathrm{I}_p$ pour tout $p \geqslant 1$ et que $\mathrm{A} = \bigcap_{p \geqslant 1} \mathrm{I}_p$ est une partie non vide de I, stable par f.

I.1.2. Montrer que, quel que soit l'entier naturel $p \geqslant 1$, toute suite récurrente associée à f prend ses valeurs dans I_p. En déduire qu'on définit une suite récurrente associée à f par la donnée de la valeur initiale x_0 si et seulement si x_0 appartient à A et qu'alors tous les éléments de la suite appartiennent à A.

I.1.3. Vérifier qu'on définit par récurrence des applications continues f^p de I_p dans $\mathbf{R}$ par :

$$\begin{cases} f^1 = f \\ \forall p \geqslant 1, \ \forall x \in \mathrm{I}_{p+1}, \quad f^{p+1}(x) = f^p(f(x)). \end{cases}$$

Montrer que pour toute suite récurrente associée à f et pour tout entier $p \geqslant 1$, on a :

$$\forall n \geqslant 0, \quad x_{n+p} = f^p(x_n).$$

I.1.4. Déterminer les parties Ω et A pour chacun des exemples suivants :

i. $\mathrm{I} =]0, 2[$ et $\forall x \in]0, 2[$, $f(x) = \sqrt{x}$

ii. $\mathrm{I} =]0, 2[$ et $\forall x \in]0, 2[$, $f(x) = x^2$

iii. $\mathrm{I} =]0, 2[$ et $\forall x \in]0, 2[$, $f(x) = 2x - 1$.

I.2. On suppose que f est croissante.

Soit x_0 un point de A tel que $x_0 \leqslant f(x_0)$. Montrer que la suite récurrente de valeur initiale x_0 converge vers un point de I si et seulement si x_0 est majoré par un point fixe de f ; caractériser alors la limite de la suite. Préciser le comportement de la suite quand elle ne converge pas vers un point de I.

Étudier de même le cas où $x_0 \geqslant f(x_0)$.

I.3. Soit r un point fixe de f. On suppose que la fonction f est de classe C^1 et que $|f'(r)| < 1$. Un tel point fixe sera dit <u>attractif</u>.

I.3.1. Montrer qu'il existe une constante $k < 1$ et un réel $\varepsilon > 0$ tels que $V_\varepsilon =]r - \varepsilon, r + \varepsilon[$ soit inclus dans I et que :

$$\forall x \in V_\varepsilon, \quad |f(x) - r| \leqslant k|x - r|.$$

I.3.2. Montrer qu'une suite récurrente $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers r si et seulement si il existe un indice N tel que $x_N \in V_\varepsilon$.

En déduire que le sous-ensemble A_r des points de A qui sont valeur initiale d'une suite récurrente convergeant vers r est ouvert dans **R** [on pourra montrer que l'image réciproque de V_ε par une application f^p est incluse dans A].

I.4. Soit r un point fixe de f. On suppose que la fonction f est de classe C^1 et que $|f'(r)| > 1$. Un tel point fixe sera dit <u>répulsif</u>.

I.4.1. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $V_\varepsilon =]r - \varepsilon, r + \varepsilon[$ soit inclus dans I et que :

$$\forall x \in V_\varepsilon, \quad |f(x) - r| \geqslant |x - r|.$$

I.4.2. Montrer qu'une suite récurrente $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers r si et seulement si elle est <u>stationnaire</u> de valeur r, c'est-à-dire s'il existe un indice N tel que $x_n = r$ pour tout $n \geqslant N$.

I.5. On considère la fonction f définie sur $I =]0, 2[$ par :

$$\forall x \in]0, 2[, \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}(4 - x^2).$$

I.5.1. Montrer que f a un seul point fixe et qu'il est répulsif.

I.5.2. Déterminer les points fixes de $f \circ f$.

I.5.3. Préciser, suivant la valeur initiale, le comportement des suites récurrentes associées à f.

II. VITESSE DE CONVERGENCE EN UN POINT FIXE ATTRACTIF

On se propose d'étudier la vitesse de convergence d'une suite récurrente $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ non stationnaire, convergeant vers un point fixe attractif r.

II.1. Montrer qu'il existe une constante $k < 1$ et un entier N tels que :

$$\forall n \geqslant N, \quad |x_n - r| \leqslant k^{n-N}|x_N - r|.$$

En déduire que $|x_n - r| = O(k^n)$.

II.2. On suppose que la fonction f est de classe C^2 et que $f'(r) \neq 0$.

II.2.1. Montrer, grâce à une formule de Taylor, qu'on a :

$$\forall j \in \mathbf{N}, \qquad x_{j+1} - r = f'(r)(x_j - r)(1 + R_j)$$

avec $R_j = O(k^j)$. En déduire que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad x_n - r = (f'(r))^n (x_0 - r) \prod_{j=0}^{n-1} (1 + R_j).$$

II.2.2. Montrer que la série de terme général $\ln(|1 + R_j|)$ est définie et qu'elle converge. En déduire que la suite de terme général $\prod_{j=0}^{n} (1 + R_j)$ est convergente et que sa limite est non nulle. Conclure qu'il existe une constante $\varpi(x_0) \neq 0$, dépendant de la valeur initiale x_0 de la suite, telle que $x_n - r$ soit équivalent à $\varpi(x_0)\,(f'(r))^n$ quand n tend vers l'infini.

II.3. On suppose que la fonction f est de classe C^2, que $f'(r) = 0$ et que $f''(r) \neq 0$.

II.3.1. Montrer, grâce à une formule de Taylor, qu'on a :

$$\forall j \in \mathbf{N}, \qquad x_{j+1} - r = \frac{f''(r)}{2}(x_j - r)^2(1 + S_j)$$

avec $\lim_{j \to \infty} S_j = 0$. En déduire que pour tout $n \geqslant 2$ on a :

$$x_n - r = \frac{2}{f''(r)}\left(\frac{f''(r)}{2}(x_0 - r)\prod_{j=0}^{n-2} |1 + S_j|^{2^{-j-1}}\right)^{2^n}(1 + S_{n-1}).$$

II.3.2. Montrer que la suite de terme général $\prod_{j=0}^{n-2} |1 + S_j|^{2^{-j-1}}$ est convergente et que sa limite est non nulle.

II.3.3. On pose $\pi_n = \lim_{m \to +\infty} \prod_{j=n-1}^{m} |1 + S_j|^{2^{-j-1}}$. Montrer que $2^n \ln \pi_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. En déduire qu'il existe une constante $\lambda(x_0) \in]0, 1[$, dépendant de la valeur initiale x_0 de la suite, telle que $x_n - r$ soit équivalent à $\frac{2}{f''(r)}(\lambda(x_0))^{2^n}$ quand n tend vers l'infini.

III. UN EXEMPLE : LES SUITES DE HÉRON

Un nombre réel $a > 0$ étant fixé, on associe à tout entier naturel $p \geqslant 2$ la fonction f_p définie sur $I =]0, +\infty[$ par $f_p(x) = \frac{1}{p}\left((p-1)x + \frac{a}{x^{p-1}}\right)$.

III.1. Vérifier que la fonction f_p satisfait aux hypothèses de la partie II, question II.3.
Montrer que, quelle que soit la valeur initiale $x_0 > 0$, la suite récurrente associée à f_p existe, qu'elle vérifie $x_n \geqslant a^{1/p}$ pour tout $n \geqslant 1$ et qu'elle converge vers $a^{1/p}$.

Étant donné une suite récurrente $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ non stationnaire associée à f_p, on notera $\lambda_p(x_0)$ la constante, dépendant de la valeur initiale x_0 de la suite, telle que $x_n - a^{1/p} \sim \frac{2}{f''_p(a^{1/p})}(\lambda_p(x_0))^{2^n}$.

III.2. On suppose que $p = 2$. Montrer qu'on peut écrire x_n sous la forme $\frac{u_n}{v_n}$, où u_n et v_n sont définis par $u_0 = x_0$, $v_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + a\,v_n^2 \\ v_{n+1} = 2\,u_n v_n \end{cases}.$$

Exprimer $u_n + \sqrt{a}\,v_n$, $u_n - \sqrt{a}\,v_n$ puis x_n en fonction de x_0, $\sqrt{a}$ et n.
En déduire que

$$\lambda_2(x_0) = \frac{|x_0 - \sqrt{a}|}{x_0 + \sqrt{a}}.$$

III.3. Un nombre réel $r > 0$ étant fixé, on associe à tout entier naturel $q > 1$ la fonction g_q définie sur $]0, +\infty[$ par $g_q(x) = \left[\frac{1}{2}\left(x^q + \frac{r^{2q}}{x^q}\right)\right]^{1/q}$.

III.3.1. Montrer que, quelle que soit la valeur initiale $y_0 > 0$, la suite récurrente $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ associée à g_q existe ; donner l'expression de y_n en fonction de y_0, r et n. Montrer que, si cette suite n'est pas stationnaire, il existe deux constantes non nulles μ_q et C, qu'on explicitera en fonction de r, q et y_0, telles que $y_n - r \sim C(\mu_q)^{2^n}$.

III.3.2. On pose $r = a^{1/p}$. Montrer qu'on a alors $f_p(x) \leqslant g_{p-1}(x)$ pour tout $x \geqslant a^{1/p}$ (on pourra, après l'avoir justifiée, utiliser la concavité de la fonction $t \mapsto \left(p - 1 + t^{\frac{p}{2(p-1)}}\right)^{p-1}$ sur l'intervalle $]0,1[$).

III.3.3. On suppose que $x_0 > a^{1/p}$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ les suites récurrentes de même valeur initiale x_0, associées respectivement à f_p et g_{p-1}. Montrer qu'on a $a^{1/p} < x_n \leqslant y_n$ pour tout n. En déduire une majoration explicite de $\lambda_p(x_0)$.

III.3.4. On suppose maintenant que $0 < x_0 < a^{1/p}$. Montrer qu'on a $\lambda_p(x_1) = (\lambda_p(x_0))^2$. En déduire une majoration de $\lambda_p(x_0)$.

IV. VITESSE DE CONVERGENCE EN UN POINT FIXE NON ATTRACTIF

On suppose que f est de classe C^{p+1}, que r est un point fixe tel que $|f'(r)| = 1$ et que p est le plus petit entier naturel supérieur ou égal à 1 tel que $f^{(p+1)}(r) \neq 0$. On se propose d'étudier la vitesse de convergence d'une suite récurrente $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, non stationnaire, convergeant vers r.

IV.1. On suppose que $f'(r) = 1$.

IV.1.1. Étudier, en fonction de la parité de $p + 1$ et du signe de $f^{(p+1)}(r)$, l'existence et, s'il y a lieu, le comportement d'une suite récurrente non stationnaire convergeant vers r.

IV.1.2. Montrer que dans tous les cas où une telle suite existe, on peut se ramener par un changement de variable simple au cas où $r = 0$, $f^{(p+1)}(0) < 0$ et où il existe un réel $\varepsilon_0 > 0$ et un entier naturel N_0 tels que f soit définie et croissante sur $]0, \varepsilon_0[$ et que la sous-suite $(x_n)_{n \geqslant N_0}$ prenne ses valeurs dans $]0, \varepsilon_0[$.

IV.2. On se place dans le cas particulier décrit au IV.1.2.

IV.2.1. Étant donné un nombre réel $a > 0$, montrer que les suites $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définies pour tout $\alpha > 0$ par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad y_n = (an + \alpha)^{-1/p}$$

sont les suites récurrentes associées à une fonction croissante g_a, définie et continue sur $]0, +\infty[$, que l'on explicitera.

IV.2.2. Montrer que, si a et b sont deux réels strictement positifs vérifiant :

$$-a < \frac{p}{(p+1)!} f^{(p+1)}(0) < -b,$$

il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$, avec $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, tel que :

$$\forall x \in]0, \varepsilon[, \qquad g_a(x) \leqslant f(x) \leqslant g_b(x).$$

En déduire qu'il existe un entier naturel N tel que :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \qquad (ak + x_N^{-p})^{-1/p} \leqslant x_{N+k} \leqslant (bk + x_N^{-p})^{-1/p}.$$

IV.2.3. Montrer que $n^{1/p} x_n$ a une limite, que l'on explicitera, quand n tend vers l'infini.

IV.3. On suppose que r est quelconque, que $f'(r) = 1$ et que $f^{(p+1)}(r) \neq 0$.

Montrer qu'il existe une constante non nulle D, que l'on explicitera, telle que $x_n - r$ soit équivalent à $\dfrac{D}{n^{1/p}}$.

IV.4. On suppose que r est quelconque, que $f'(r) = -1$ et que $f^{(p+1)}(r) \neq 0$.

IV.4.1. Existe-t-il toujours des suites récurrentes non stationnaires convergeant vers r ?

IV.4.2. Quand une telle suite existe, que peut-on dire de sa vitesse de convergence ?

PREMIÈRE ÉPREUVE CAPES EXTERNE 1998

par

François Sauvageot

Partie I

Question I.1.1. L'énoncé est très mal rédigé et c'est pourquoi je me permets de démontrer une propriété caractéristique de I_p qui éclaire ce qu'il se passe, même si elle n'est pas demandée !

On montre par récurrence sur l'entier naturel non nul p que I_p est ouvert dans $\mathbf{R}$ et qu'il est formé des points x de I tels que f^p (l'itérée p fois de f) est définie en x.

Attention ! c'est une notion subtile ; en effet f^p est la composée p fois de la restriction de f à I_p et non juste de f, car il y a un problème de domaine de définition.

Pour $p = 1$, on a $I_1 = I$ est ouvert dans $\mathbf{R}$. Comme f est une fonction de I dans $\mathbf{R}$, I_1 est bien l'ensemble des points où f est définie.

Montrons que l'hypothèse au rang p entraîne le résultat au rang $p+1$. Comme I_p est ouvert dans $\mathbf{R}$, la continuité de f sur I montre que I_{p+1} est ouvert dans I. Mais comme I est ouvert dans $\mathbf{R}$, être ouvert dans I est équivalent à l'être dans $\mathbf{R}$ et donc I_{p+1} est ouvert dans $\mathbf{R}$.

Attention ! il faut vraiment faire ce raisonnement. Par exemple si I était $[0;1]$ et f la fonction nulle, on aurait $I_2 = I = [0;1]$ qui est bien ouvert dans I **mais pas** dans $\mathbf{R}$.

Pour que f^{p+1} soit définie en x, il faut et il suffit que f^p soit définie en $f(x)$, autrement dit que $f(x)$ appartienne à I_p et donc que x appartienne à I_{p+1}.

Il en résulte que $I_{p+1} \subset I_p$ pour tout entier naturel p supérieur à 1 puisque si f^{p+1} est définie en x, f^p l'est a fortiori.

D'après la propriété caractéristique de I_p, A est exactement l'ensemble des points où toutes les f^p $(p \geq 1)$ sont définies. C'est évidemment le cas pour un point fixe de f, autrement dit $\Omega \subset A$ et, d'après l'hypothèse sur Ω, ceci montre que A est non vide.

Si $x \in A$, $f^p(x)$ est défini pour tout entier naturel p supérieur à 1. Il en est de même, a fortiori, pour $f^{p+1}(x) = f^p(f(x))$ et donc $f(x) \in A$, i.e. A est stable par f (i.e. $f(A) \subset A$).

Question I.1.2 En fait x_0 peut-être le premier terme d'une suite récurrente associée à f si et seulement si toutes les itérées de f sont définies en x_0, i.e. si et seulement si $x_0 \in A$. Et alors, puisque A est stable par f, on a $x_n \in A$ pour tout entier naturel n (par récurrence sur n). On a alors $x_n \in I_p$ pour tout entier naturel p supérieur à 1.

Question I.1.3. On l'a déjà fait en I.1.1. ! En effet on a montré que I_p est exactement le domaine de définition de f^p. En particulier f^{p+1} est la composée de f (restreinte à I_{p+1}) suivie de f^p. La première application étant continue par hypothèse sur f, la continuité de f^p pour tout entier naturel p supérieur à 1 en résulte par récurrence sur p.

Puisque la suite prend ses valeurs dans A, donc dans I_p, l'assertion demandée est immédiate.

Question I.1.4. On a, pour x dans $I =]0;2[$,

$$x = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow x = 2x - 1$$

et donc $\Omega = \{1\}$ dans tous les cas.

Toutes les applications considérées sont strictement croissantes donc bijectives. On en déduit les résultats suivants :

1. $f(I) =]0;\sqrt{2}[\subset I$ et donc $I_2 = I_1$, d'où $I_p = I_1$ pour tout entier naturel p supérieur à 1 et, pour finir, $A = I =]0;2[$.
2. Pour que toutes les itérées de f soient définies, il faut donc que x^{2^p} soit dans I pour tout entier naturel p supérieur à 1. Il en résulte que $x \in A$ si et seulement si $|x| \leq 1$ et, finalement, $A =]0;1]$.
3. Si $x_0 = x \in A$ définit une suite récurrente, on a $x_{n+2} - x_{n+1} = 2(x_{n+1} - x_n) = 2^{n+1}(x_1 - x_0) = 2^{n+1}(x-1)$ pour tout entier naturel n. Comme tous ces points sont dans A et donc dans I, on a forcément $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq 2$ et il en résulte qu'on doit avoir $x = 1$. D'où $A = \Omega = \{1\}$.

Question I.2. Comme $x_0 \in A$, la suite récurrente est bien définie. De plus, comme f est croissante, cette suite récurrente est monotone. Elle converge donc dans I si et seulement si elle est bornée par des points de I. Sa limite est alors évidemment un point fixe de f (par continuité de f) et constitue un majorant de la suite (dans le cas croissant) ou un minorant de la suite (dans le cas décroissant).

Il en résulte que la suite converge si et seulement si elle est majorée (respectivement minorée) par un point fixe de f dans le cas croissant (respectivement décroissant). Le premier cas équivaut à $x_1 \geq x_0$, i.e. $x_0 \leq f(x_0)$. Le second équivaut à $x_0 \geq f(x_0)$.

Remarquons que, si x est fixe, $x_0 \leq x$ entraîne $x_1 = f(x_0) \leq f(x) = x$ et donc, en fait, $x_n \leq x$ pour tout entier naturel n. Il en résulte que la limite, si elle existe, est le plus petit point fixe de f supérieur à x_0 (cas $x_0 \leq f(x_0)$) ou le plus grand point fixe de f inférieur à x_0 (cas $x_0 \geq f(x_0)$). Remarquons que ces plus grand et plus petit éléments (dans Ω ensemble des points fixes de f) existent bien puisque Ω est fermé en tant qu'image réciproque de 0 par l'application continue $f - Id$.

Enfin si la suite ne converge pas dans I, c'est qu'elle tend vers une des bornes de I (par monotonie). Il en résulte que x_n tend vers β si $x_0 \leq f(x_0)$ et vers α si $x_0 \geq f(x_0)$.

Question I.3.1. Puisque I est ouvert et que f' est continue avec $|f'(r)| < 1$, on peut trouver ε de sorte que, en posant $k = (1 + |f'(r)|)/2 < 1$, on ait $V_\varepsilon \subset I$ et $|f'(x)| \leq k$ pour tout x dans V_ε. L'assertion résulte alors de l'inégalité des accroissements finis pour deux points de V_ε.

Question I.3.2. Si une suite récurrente converge vers r alors elle appartient à V_ε à partir d'un certain rang, par définition de la notion de convergence.

Réciproquement l'inégalité précédente montre que $x \in V_\varepsilon$ entraîne $f(x) \in V_\varepsilon$ et donc $|f^p(x) - r| \leq k^p|x - r|$ pour tout entier naturel p supérieur à 1. Donc $x_N \in V_\varepsilon$ entraîne $|x_{N+p} - r| \leq k^p\varepsilon$ et donc la suite récurrente converge vers r.

Nous venons de remarquer que V_ε est stable par f, donc que toutes les itérées de f y sont définies et, pour finir, que V_ε est inclus dans A.

L'ensemble A_r est donc formé de tous les x_0 de A tels qu'il existe un entier naturel p tel que $x_p = f^p(x_0) \in V_\varepsilon$. Comme $V_\varepsilon \subset A$, $f^p(x_0) \in V_\varepsilon$ entraîne $f^p(x_0) \in A$ et donc que toutes les itérées de f sont définies en x_0, i.e. $x_0 \in A$. Il en résulte

$$A_r = \bigcup_{p \in \mathbf{N}} (f^p)^{-1}(V_\varepsilon)$$

qui est bien ouvert par continuité de f^p. (On a noté f^0 l'identité).

Question I.4.1. Puisque I est ouvert et que f' est continue avec $|f'(r)| > 1$, on peut trouver ε de sorte que l'on ait $V_\varepsilon \subset I$ et $|f'(x)| \geq 1$ pour tout x dans V_ε. L'assertion résulte alors du théorème des accroissements finis pour deux points de V_ε.

Question I.4.2. Si la suite est stationnaire à partir d'un certain rang, elle converge évidemment vers sa valeur stationnaire. Réciproquement si la suite convergence vers r répulsif, alors elle prend ses valeurs dans V_ε à partir d'un certain rang, disons N. Mais alors, pour tout entier naturel p on a $|x_{N+p} - r| = |f^p(x_N) - f^p(r)| \geq |x_N - r|$ et donc la suite ne peut tendre vers r si $|x_N - r| > 0$. Il en résulte $x_N = r$ et donc que la suite est stationnaire à partir du rang N.

Question I.5.1. Pour $0 < x < 2$, on a

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 + \sqrt{5}x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{5} \pm \sqrt{21}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{21} - \sqrt{5}}{2}$$

et alors on a

$$f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{5}}x = 1 - \sqrt{\frac{21}{5}} < 1 - \sqrt{4} = -1$$

donc on a un unique point fixe et il est répulsif.

Question I.5.2. Remarquons que f est décroissante et que $f(I) =]0; 4/\sqrt{5}[\subset I$. Il en résulte que $f \circ f$ est définie sur I et on a

$$f \circ f(x) = \frac{4 - \frac{1}{5}(4 - x^2)^2}{\sqrt{5}} = \frac{4 + 8x^2 - x^4}{5\sqrt{5}}\ .$$

Le polynôme, de degré 4, $f \circ f(x) - x$ admet comme facteur le polynôme $f(x) - x$, ce qui s'écrit

$$\frac{4 - 5\sqrt{5}x + 8x^2 - x^4}{5\sqrt{5}} = \frac{x^2 + \sqrt{5}x - 4}{\sqrt{5}} P(x)$$

avec P un polynôme de degré 2, disons $ax^2 + bx + c$. Par identification des termes de degré 4, il vient $a = -1/5$; avec les termes de degré 0, il vient $c = -1/5$; avec les termes de degré 3, il vient $b = 1/\sqrt{5}$. D'où

$$f \circ f(x) - x = -\frac{1}{5\sqrt{5}}(x^2 + \sqrt{5}x - 4)(x^2 - \sqrt{5}x + 1)$$

et on en déduit que les points fixes (sur I) sont, par ordre croissant,

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \qquad \frac{\sqrt{21} - \sqrt{5}}{2} \qquad \frac{\sqrt{5} + 1}{2}\ .$$

Question I.5.3. On a déjà remarqué $f(I) \subset I$ et donc on a $A = I$. Comme il n'y a qu'un point fixe de f dans I et qu'il est répulsif, la suite récurrente de premier terme x_0 converge si et seulement si elle est stationnaire à partir d'un certain rang.

Pour étudier cette possibilité, on se raccroche à $f \circ f = f^2$. Comme f est décroissante, f^2 est croissante sur I. On a également déjà étudié $f^2 - Id = -(x^2 + \sqrt{5}x - 4)(x^2 - \sqrt{5}x + 1)/5\sqrt{5}$ et on connaît son signe sur I : il est positif avant

$(\sqrt{5}-1)/2$ ($-$ par $-$ par $+$), négatif entre $(\sqrt{5}-1)/2$ et $(\sqrt{21}-\sqrt{5})/2$ ($-$ par $-$ par $-$), positif entre $(\sqrt{21}-\sqrt{5})/2$ et $(\sqrt{5}+1)/2$ ($-$ par $+$ par $-$) et, enfin, négatif après $(\sqrt{5}+1)/2$ ($-$ par $+$ par $+$).

La suite $(x_{2p})_{p\in\mathbf{N}}$ est croissante ou décroissante selon que ce signe est positif ou négatif en x_0. Dans le cas où x_0 est fixe sous f^2 la suite est stationnaire. Dans les autres cas, on va utiliser le I.2. Dans le premier cas la suite est croissante, majorée par le premier point fixe de f^2, elle converge donc vers ce point fixe. Dans le second cas, elle est décroissante et minorée par ce même point fixe ; elle l'admet donc comme limite. Dans le troisième cas, elle est croissante et majorée par le troisième point fixe, elle converge donc vers lui. Enfin le dernier cas donne aussi le troisième point fixe comme limite. En conclusion la suite $(x_{2p})_{p\in\mathbf{N}}$ converge tout le temps. Sa limite est $(\sqrt{5}-1)/2$ si $x_0 < (\sqrt{21}-\sqrt{5})/2$; c'est $(\sqrt{21}-\sqrt{5})/2$ si $x_0 = (\sqrt{21}-\sqrt{5})/2$; enfin c'est $(\sqrt{5}+1)/2$ si $x_0 > (\sqrt{21}-\sqrt{5})/2$.

La suite $(x_{2p+1})_{p\in\mathbf{N}}$ converge aussi puisque f est continue. Comme un point fixe de f^2 est envoyé par f sur un autre point fixe de f^2, distinct de lui si ce n'est pas un point fixe de f, on voit (et un calcul le corrobore) que $(\sqrt{5}\pm 1)/2$ sont échangés par f et on a donc la situation suivante :

- La suite récurrente déterminée par x_0 est convergente si et seulement si x_0 est l'unique point fixe de f sur I.
- Dans le cas contraire les suites de termes pairs et impairs convergent toutes les deux vers les deux points fixes de f^2 qui ne sont pas des points fixes de f. Si x_0 est plus grand que le point fixe de f la suite des termes pairs converge vers le plus grand des points fixes de f^2 et celle des termes impairs vers le plus petit de ces points fixes. Quand x_0 est plus petit, les deux suites ont le comportement inverse.

PARTIE II

Question II.1. On utilise les résultats de I.3. On choisit k comme dans I.3.1. et N comme dans I.3.2. On a alors, par récurrence sur l'entier naturel p

$$|x_{N+p}-r| \leq k^p |x_N - r|$$

et le résultat en découle en écrivant $n = N+p$.

La suite $(k^{-n}|x_n - r|)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc bornée par $\max\{k^{-p}|x_p - r| \;/\; 0 \leq p \leq N\}$ et donc $|x_n - r| = O(k^{-n})$.

Question II.2.1. On a, pour un certain y_j compris entre x_j et x_{j+1},

$$x_{j+1} - r = f(x_j) - f(r) = (x_j - r)\left(f'(r) + \frac{(x_j - r)f"(y_j)}{2}\right)$$

d'après la formule de Taylor avec reste (dite de Taylor-Lagrange). Comme f' ne s'annule pas en r, la formule de l'énoncé s'en déduit avec

$$R_j = \frac{(x_j - r)f"(y_j)}{2f'(r)}$$

qui est bien un $O(k^j)$ puisque $f"(y_j)$ est une quantité bornée (quand j tend vers l'infini, x_j et x_{j+1} tendent vers r, donc y_j aussi et, par continuité de $f"$, $f"(y_j)$ tend vers $f"(r)$).

L'expression de $x_n - r$ en fonction de $x_0 - r$ s'en déduit par récurrence sur n.

Question II.2.2. L'annulation de $1 + R_j$ entraîne l'annulation de $x_{j+1} - r$ et alors la suite récurrente serait stationnaire à partir de ce rang là, ce qui est exclus par hypothèse. Il en résulte que $\ln(|1 + R_j|)$ est bien défini.

La suite R_j étant un $O(k^j)$, elle tend vers 0. Par le théorème de comparaison entre séries, la convergence **absolue** de la série de terme général $\ln(|1 + R_j|)$ est équivalente à la convergence absolue de la série de terme général R_j. Cette dernière

convergence est entraînée par la convergence de la série de terme général k^j, toujours par le théorème de comparaison entre séries.

Remarque : on a besoin de la convergence absolue pour se dispenser de l'hypothèse (non satisfaite ici) de positivité du terme général.

Remarquons que la suite $(R_j)_{j\in\mathbf{N}}$ tend vers 0 et donc que $1+R_j$ est positif à partir d'un certain rang. Ainsi le produit considéré a un signe constant à partir d'un certain rang. Sa convergence est donc équivalente à sa convergence absolue. Celle-ci est impliquée par la convergence de son logarithme (puisque l'exponentielle est continue) et sa limite est l'exponentielle de la limite de son logarithme ; en particulier c'est un nombre non nul.

D'après la formule du II.2.1. $\varpi(x_0) = (x_0 - r)\prod_{j=0}^{\infty}(1+R_j)$ qui est bien non nul car $x_0 \neq r$ puisque la suite n'est pas stationnaire.

Question II.3.1. Il s'agit juste de la formule de Taylor-Young :

$$x_{j+1} - r = f(x_j) - f(r) = \frac{(x_j - r)^2}{2}(f"(r) + o(1))$$

ce que l'on récrire sous la forme de l'énoncé puisque $f"(r)$ est non nul.

Remarquons que $1+S_j$ ne peut être nul sinon $x_{j+1}-r$ le serait et la suite serait stationnaire. On peut donc considérer $|1+S_j|$ élevé à une puissance non entière.

Démontrons la formule demandée par récurrence sur l'entier naturel n supérieur à 2.

Pour $n=2$, on a

$$x_2 - r = \frac{f"(r)}{2}(x_1 - r)^2(1+S_1) = \left(\frac{f"(r)}{2}\right)^3 (x_0 - r)^4(1+S_0)^2(1+S_1)$$

et on a $(1+S_0)^2 = |1+S_0|^2 = \left(|1+S_0|^{2^{-1}}\right)^4$, ce qui prouve la formule attendue.

Supposons la formule valable au rang n et prouvons la au rang $n+1$. On a

$$x_{n+1} - r = \frac{f"(r)}{2}(x_n - r)^2(1+S_n)$$

et la formule résulte de l'hypothèse de récurrence en remarquant, comme précédemment, que $(1+S_{n-1})^2 = |1+S_{n-1}|^2 = \left(|1+S_{n-1}|^{2^{-1}}\right)^4$.

Question II.3.2. On procède comme en II.2.2. en considérant le logarithme de l'expression. On a

$$\ln\left(|1+S_j|^{2^{-j-1}}\right) = 2^{-j-1}\ln(|1+S_j|) = o(2^{-j-1})$$

puisque S_j tend vers 0 quand j tend vers l'infini. La série des logarithmes est donc absolument convergente et le produit considéré est donc convergent (on n'a pas, ici, de problème avec son signe, puisque c'est un produit de termes positifs) vers une quantité positive non nulle (qui est encore l'exponentielle de la somme de la série des logarithmes).

Question II.3.3. L'expression $2^n\ln(\pi_n)$ est le reste de la série de terme général $2^{n-j-1}\ln(|1+S_j|)$ (à partir de l'indice $n-1$). On a

$$\sum_{j=n-1}^{\infty} 2^{n-j-1}\ln(|1+S_j|) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}\ln(|1+S_{n-1+j}|) \leq \max\{\ln(|1+S_j|)\ /\ n-1 \leq j\}\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}$$

et tend donc vers 0 quand n tend vers l'infini puisqu'il en est de même pour S_n.

On choisit évidemment (les valeurs absolues étant là pour assurer que la quantité est positive)

$$\lambda(x_0) = \left|\frac{f"(r)}{2}(x_0 - r)\right| \prod_{j=0}^{\infty} |1 + S_j|^{2^{-j-1}}$$

et on doit vérifier qu'on a bien le résultat espéré. Le rapport $x_n - r$ avec $2(\lambda(x_0))^{2^n}/f"(r)$ est égal à

$$\frac{1 + S_{n-1}}{(\pi_n)^{2^n}}$$

qui tend bien vers 1 puisque S_n tend vers 0 et que $\pi_n^{2^n}$ tend vers $\exp(0) = 1$.

Puisque la suite de terme général $x_n - r$ tend vers 0, l'équivalent précédent impose $|\lambda(x_0)| < 1$. Le fait qu'il soit non nul vient de la non nullité de $f"(r)$, de $x_0 - r$ et du produit infini (II.3.2.).

PARTIE III

Question III.1. Comme f est une fraction rationnelle, elle est de classe C^∞ partout où elle est définie. Son seul pôle étant à l'origine, son domaine de définition est $\mathbf{R}^*$ et, a fortiori, f est bien de classe C^2 sur I.

Pour trouver ses points fixes, on écrit, pour x dans I

$$f_p(x) = x \Leftrightarrow px = (p-1)x + \frac{a}{x^{p-1}} \Leftrightarrow x^p = a$$

et donc l'unique point fixe de f est $r = a^{1/p}$. On a

$$f'(r) = \frac{p-1}{p}(1 - \frac{a}{r^p}) = 0$$

et

$$f"(r) = \frac{a(p-1)}{r^{p+1}} = (p-1)a^{-1/p} \neq 0\ .$$

On est bien dans la situation du II.3. (point fixe super attractif).

D'après l'expression de f', f est décroissante sur $]0; r]$ et croissante sur $[r; +\infty[$. Il en résulte que $f(I) = [r; +\infty[\subset I$ et donc $A = I$. Autrement dit, pour tout valeur initiale x_0 dans I, la suite récurrente associée à f est bien définie. Pour un indice supérieur à 1, x_n est l'image de x_{n-1} et appartient donc à $f(I)$ et donc $x_n \geq r$.

Il en résulte que la suite est monotone à partir du rang 1 puisque f est croissante sur $[r; +\infty[$. De plus

$$f(x) - x = \frac{1}{p}(\frac{a}{x^{p-1}} - x) = \frac{x}{p}(\frac{r^p}{x^p} - 1)$$

et donc, pour $x \geq r$, on a $f(x) \leq x$. La suite est donc décroissante à partir du rang 1. Comme r est l'unique point fixe de f et que r est plus petit que x_1, la suite récurrente converge vers r d'après I.2.

Question III.2. On calcule, pour u et v réels,

$$f\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u^2 + av^2}{2uv}$$

et donc, si $x_n = u_n/v_n$, alors $x_{n+1} = u_{n+1}/v_{n+1}$. Il reste, pour conclure, à vérifier que $x_0 = u_0/v_0$, ce qui est vrai.

On a, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} + \sqrt{a}v_{n+1} = u_n^2 + av_n^2 + 2\sqrt{a}u_nv_n = (u_n + \sqrt{a}v_n)^2$$

et donc

$$u_n + \sqrt{a} = (u_0 + \sqrt{a}v_0)^{2^n} = (x_0 + \sqrt{a})^{2n} .$$

De même

$$u_n - \sqrt{a} = (u_0 - \sqrt{a}v_0)^{2^n} = (x_0 - \sqrt{a})^{2n} .$$

D'où

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{u_n}{v_n} \\ &= \sqrt{a}\frac{(u_n + \sqrt{a}v_n) + (u_n - \sqrt{a}v_n)}{(u_n + \sqrt{a}v_n) - (u_n - \sqrt{a}v_n)} \\ &= \sqrt{a}\frac{(x_0 + \sqrt{a})^{2^n} + (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}}{(x_0 + \sqrt{a})^{2^n} - (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}} . \end{aligned}$$

On cherche $\lambda_2(x_0)$ qui est l'unique constante **positive** (ce n'est pas rappelé dans l'énoncé ... mais sinon il n'y a pas unicité contrairement à ce que pourrait faire croire le dit énoncé !) donnant l'équivalent rappelé. On a

$$f"(\sqrt{a}) = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{a}}(x_n - \sqrt{a}) &= \frac{1}{2}\left(\frac{(x_0 + \sqrt{a})^{2^n} + (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}}{(x_0 + \sqrt{a})^{2^n} - (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}} - 1\right) \\ &= \frac{(x_0 - \sqrt{a})^{2^n}}{(x_0 + \sqrt{a})^{2^n} - (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}} \\ &= \left(\frac{x_0 - \sqrt{a}}{x_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n} \frac{1}{1 - \left(\frac{x_0 - \sqrt{a}}{x_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n}} \\ &\sim \left(\frac{x_0 - \sqrt{a}}{x_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n} \end{aligned}$$

puisque $0 \leq |x_0 - \sqrt{a}| < |x_0| + |\sqrt{a}| = x_0 + \sqrt{a}$ et donc

$$\left|\frac{x_0 - \sqrt{a}}{x_0 + \sqrt{a}}\right| < 1 .$$

D'où la valeur recherchée de $\lambda_2(x_0)$.

Question III.3.1. On se place dans la situation du III.2 avec $a = r^{2q}$. Comme, pour tout x_0, la suite récurrente associée à f est définie et donc positive, on peut en définir sa racine q-ième. On a donc

$$x_{n+1}^{1/q} = \left[\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{r^{2q}}{x_n}\right)\right]^{1/q} = g_q(x_n^{1/q})$$

et donc, si $x_0 = y_0^q$, on a, pour tout entier naturel n, $x_n = y_n^q$. En particulier la suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est définie pour tout rang et la question III.2 montre que

$$y_n = r\left(\frac{(y_0 + r^q)^{2^n} + (y_0^q - r^q)^{2^n}}{(y_0 + r^q)^{2^n} - (y_0^q - r^q)^{2^n}}\right)^{1/q}$$

et

$$y_n - r = x_n^{1/q} - (r^q)^{1/q} = \frac{x_n - r^q}{x_n^{(q-1)/q} + \ldots + r^{(q-1)/q}} \, .$$

En vertu du résultat du III.2 (pour le numérateur) et de la convergence de x_n vers r (pour le dénominateur), on a

$$y_n - r \sim \frac{2r^q \lambda_2(x_0)^{2^n}}{qr^{q-1}} = \frac{2r}{q}\left(\frac{|y_0^q - r^q|}{y_0^q + r_0^q}\right)^{2^n}$$

et donc

$$C = \frac{2r}{q} \qquad \mu_q = \frac{|y_0^q - r^q|}{y_0^q + r_0^q} \, .$$

Remarque : ce résultat est encore valable pour une suite stationnaire puisqu'on obtient alors $0 \sim 0$, ce qui est vrai ...

Question III.3.2. Pour utiliser l'indication de l'énoncé, on met x en facteur dans f_p, et il vient (pour x réel strictement positif)

$$\begin{aligned} f_p(x) \leq g_{p-1}(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{p}\left(p - 1 + \frac{r^p}{x^p}\right) \leq x\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{r^{2(p-1)}}{x^{2(p-1)}}\right)\right]^{1/(p-1)} \\ &\Leftrightarrow \quad \left(p - 1 + \frac{r^p}{x^p}\right)^{p-1} \leq \frac{p^{p-1}}{2}\left(1 + \left(\frac{r}{x}\right)^{2(p-1)}\right) \end{aligned}$$

soit, en posant $t = (r/x)^{2(p-1)}$, (t varie donc dans I lui aussi)

$$\left(p - 1 + t^{\frac{p}{2(p-1)}}\right)^{p-1} \leq \frac{p^{p-1}}{2}(1 + t) \, .$$

Appelons ϕ la fonction définie par le membre de gauche et montrons qu'elle est concave sur $]0;1[$. Elle est manifestement de classe C^∞ sur I et on peut l'écrire $\phi = \psi^{p-1}$ avec $\psi(t) = p - 1 + t^\alpha$ et $\alpha = p/(2(p-1))$. On a alors $\phi' = (p-1)\psi'\psi^{p-2}$ et $\phi'' = (p-1)\psi^{p-3}(\psi''\psi + (p-2)(\psi')^2)$. Comme ϕ est concave si et seulement si ϕ'' est négative, il vient (par positivité de $p-1$ et de ψ) : ϕ est concave si et seulement si

$$\alpha(\alpha - 1)t^{\alpha-2}(p - 1 + t^\alpha) + (p-2)\alpha^2 t^{2(\alpha-1)} < 0$$

i.e.

$$(\alpha - 1)(p - 1 + t^\alpha) + \alpha(p-2)t^\alpha < 0 \, .$$

De $\alpha(p-1) = p/2$, on déduit $(\alpha-1)(p-1) = p/2 - p + 1 = 1 - p/2$ et $\alpha - 1 + \alpha(p-2) = p/2 - 1$, donc ϕ est concave si et seulement si

$$\left(\frac{p}{2} - 1\right)(t^\alpha - 1) < 0$$

et donc si et seulement si $t < 1$ ou encore $r < x$. La fonction ϕ est donc concave sur l'intervalle $]0;1[$. En fait elle l'est même sur $]0;1]$ et c'est ce dont nous allons nous servir (encore, à mon avis, une imprécision de l'énoncé).

Il nous faut trouver une majoration de ϕ et l'inégalité de concavité nous donne malheureusement une minoration. Il faut donc utiliser l'autre propriété caractéristique des fonctions concaves : la courbe est sous ses tangentes. Le point d'abscisse t sur la tangente en t_0 admet comme coordonnées

$$x = t \qquad y = \phi(t_0) + (t - t_0)\phi'(t_0)$$

et pour obtenir l'inégalité voulue il nous faudrait

$$\phi'(t_0) = \frac{p^{p-1}}{2} = \phi(t_0) - t_0\phi'(t_0)$$

et en particulier $\phi(t_0) = (1+t_0)\phi'(t_0)$.

En explicitant cette dernière équation, on obtient

$$p - 1 + t_0^\alpha = (1+t_0)(p-1)\alpha t_0^{\alpha-1} = \frac{p}{2}(t_0^\alpha + t_0^{\alpha-1})$$

ou encore

$$2(p-1) = (p-2)t_0^\alpha + pt_0^{\alpha-1} \ .$$

Cette dernière équation est manifestement vérifiée pour $t_0 = 1$ et on a alors

$$\phi'(1) = (p-1)\alpha t_0^{\alpha-1}(p-1+t_0^\alpha)^{p-2} = \frac{p}{2}p^{p-2}$$

qui est bien la quantité voulue. Donc, pout $t_0 = 1$ et $0 < t \leq 1$, on a

$$\left(p - 1 + t^{\frac{p}{2(p-1)}}\right)^{p-1} \leq \frac{p^{p-1}}{2}(1+t) \ .$$

Question III.3.3. On démontre la propriété $r < x_n \leq y_n$ par récurrence sur l'entier naturel n. Pour $n = 0$ cela est entraîné par les hypothèses de la question.

Supposons la propriété vraie au rang n. Comme f_p est (strictement) croissante sur $[r; +\infty[$, on déduit de $r < x_n \leq y_n$:

$$r = f_p(r) < f_p(x_n) = x_{n+1} \leq f_p(y_n) \leq g_{p-1}(y_n) = y_{n+1} \ .$$

D'où l'assertion.

On en déduit

$$0 < \frac{x_n - r}{y_n - r} \leq 1$$

et cette quantité est équivalente à (puisque, dans notre cas, C et μ_{p-1} sont non nuls)

$$\frac{2}{Cf_p''(r)}\left(\frac{\lambda_p(x_0)}{\mu_{p-1}(y_0)}\right)^{2^n}$$

ce qui force

$$\lambda_p(x_0) \leq \mu_{p-1}(y_0)$$

i.e.

$$\lambda_p(x_0) \leq \frac{x_0^{p-1} - a^{(p-1)/p}}{x_0^{p-1} + a^{(p-1)/p}} \ .$$

Question III.3.4. Les suites récurrentes u et v définies par x_0 et x_1 comme valeurs initiales vérifient $u_{n+1} = v_n$ pour tout entier naturel n. Par l'unicité de λ_p donnant la vitesse de convergence vers leur limite commune, on en déduit l'égalité recherchée $\lambda_p(x_0) = \sqrt{\lambda_p(x_1)}$.

D'où

$$\lambda_p(x_0) \leq \sqrt{\frac{x_1^{p-1} - a^{(p-1)/p}}{x_1^{p-1} + a^{(p-1)/p}}} \qquad x_1 = f_p(x_0) \ .$$

PARTIE IV

Question IV.1.1. C'est le genre de question tellement précise qu'on ne sait vraiment pas quoi répondre ! Il me semble que l'auteur attend une réponse de ce genre : comme f' est positive au voisinage de r et que toute suite convergeant vers r finit par rester dans un voisinage arbitrairement petit de r, la suite récurrente est nécessairement monotone à partir d'un certain rang.

La formule de Taylor montre alors

$$x_{n+1} - r = (x_n - r)\left(1 + \frac{(x_n - r)^p f^{(p+1)}(\xi)}{(p+1)!}\right)$$

pour un certain ξ compris entre r et x_n. La monotonie de la suite et la convergence vers r montrent que, nécessairement,

$$|x_{n+1} - r| \leq |x_n - r|$$

et donc, pour n assez grand,

$$(x_n - r)^p f^{(p+1)}(\xi) < 0 \ .$$

Remarquons que $f^{(p+1)}$ garde elle aussi un signe constant au voisinage de r. Il en résulte que si p est pair, on doit avoir $f^{(p+1)}(r) < 0$ et alors on peut avoir aussi bien des suites récurrentes qui convergent vers r en croissant ou en décroissant (à partir d'un certain rang).

Si p est impair et $f^{(p+1)}(r) < 0$ la suite doit converger en décroissant car $x_n > r$. Et si $f^{(p+1)}(r) > 0$ la suite doit converger en croissant.

Question IV.1.2. On veut donc se ramener à une suite convergeant vers 0 en décroissant (la décroissance étant, comme on l'a vu, équivalente à la négativité de $f^{(p+1)}(r)$). On considère donc soit $x_n - r$, soit $r - x_n$ suivant le comportement de x_n. Il nous faut donc trouver la fonction qui fait de ces suites des suites récurrentes.

Dans le premier cas on a $x_{n+1} - r = f(x_n) - r = f(x_n - r + r) - r$ et donc on remplace f par $x \mapsto f(x + r) - r$.

Dans le second cas on a $r - x_{n+1} = r - f(x_n) = r - f(r - (r - x_n))$ et on remplace donc f par $x \mapsto r - f(r - x)$.

Question IV.2.1. On a

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= (a(n+1) + \alpha)^{-1/p} \\ &= (a + y_n^{-p})^{-1/p} \\ &= y(ay_n^p + 1)^{-1/p} \end{aligned}$$

et on peut poser $g_a(y) = y(ay_n^p + 1)^{-1/p} = (a + y^{-p})^{-1/p}$ pour y réel strictement positif. C'est bien une fonction continue et même de classe C^∞, dont la dérivée est $(-1/p)(-p)y^{-p-1}(a + y^{-p})^{-1-1/p}$ qui est bien positive (i.e. g_a est croissante).

Donc on a bien des suites récurrentes associées à g_a. Réciproquement si on a une telle suite, on pose $\alpha = y_0^{-p}$ et on retrouve la suite y_n. Donc les suites considérées sont bien toutes les suites récurrentes associées aux g_a.

Question IV.2.2. Il suffit de montrer un encadrement entre les développements limités. On a

$$g_a(x) = x(1 - \frac{a}{p}x^p + o(x^{p+1})) \qquad f(x) = x + \frac{f^{(p+1)}(0)}{(p+1)!} + o(x^{p+1})$$

et l'encadrement en découle.

On raisonne alors comme en III.3.3. La croissance de f et l'encadrement montrent que si une telle inégalité est vraie à un certain rang, elle est vrai pour les rangs plus grands (pour peu que l'on reste dans le domaine de validité de l'encadrement et où f est croissante). En effet, si $x_n \leq y_n$, on a $x_{n+1} \leq f(y_n) \leq g_b(y_n) = y_{n+1}$.

Comme première valeur on choisit x_N pour les trois de sorte que toutes les suites restent dans $]0;\epsilon[$ à partir de ce rang. La valeur au rang k des suites de termes initiaux x_N associées respectivement à g_a, f et g_b sont les trois termes de l'inégalité recherchée et on a bien le résultat voulu.

Question IV.2.3. Majorons et minorons la quantité $(N+k)^{1/p}x_{N+k}$ pour k un entier naturel arbitraire.

On a

$$(N+k)^{1/p}x_{N+k} \leq \left(\frac{N+k}{bk+x_N^{-p}}\right)^{1/p} \sim b^{-1/p}$$

et

$$(N+k)^{1/p}x_{N+k} \geq \left(\frac{N+k}{ak+x_N^{-p}}\right)^{1/p} \sim a^{-1/p} \; .$$

Pour tout η il existe donc un rang à partir duquel la suite prend des valeurs comprises entre $a^{-1/p}-\eta$ et $b^{-1/p}+\eta$. On peut choisir a et b de telle sorte que ces quantités soient exactement $l-2\eta$ et $l+2\eta$ avec

$$l = \left(\frac{p}{(p+1)!}\left|f^{(p+1)}(0)\right|\right)^{-1/p} \; .$$

Et ceci c'est exactement dire que la suite x_n converge vers l. On remarquera que le terme dont on prend la valeur absolue est en fait négatif par hypothèse.

Remarque : on fait en fait un raisonnement sur les limites inférieure et supérieure de la suite x_n.

Question IV.3. On utilise les expressions obtenues pour le changement de fonction du IV.1.2. et on trouve

$$D = \pm\left(\frac{p}{(p+1)!}\left|f^{(p+1)}(r)\right|\right)^{-1/p} \; .$$

Question IV.4.1. On remarque que $g = f\circ f$ est une fonction admettant r comme point fixe et telle que $g'(r) = f'(r)^2 = 1$.

L'idée est de chercher des exemples et/ou contre-exemples simples par exemple polynomiaux (vu les conditions de dérivées, donc de développement limité, c'est ce qui semble le plus naturel).

Prenons $f(x) = -x+ax^2$ au voisinage de 0. On a $f\circ f(x) = x-2a^2x^3+a^3x^4$ et $f\circ f$ est donc dans la situation p pair (ici $p+1=3$, i.e. $p=2$) et $(f\circ f)^{(p+1)}(0) = -12a^2 < 0$. On n'a donc pas de contradiction avec la condition nécessaire obtenue en IV.1.1.

Prenons maintenant $f(x) = -x+ax^3$. On a $f\circ f(x) = x-2ax^3+3a^2x^5-3a^3x^7+a^4x^9$ et on est dans la situation $p=2$ est pair avec la dérivée troisième de $f\circ f$ en 0 qui vaut $-12a$. Donc si $a<0$ $f\circ f$ ne peut pas avoir de suite récurrente convergeant vers 0, d'après IV.1.1. C'est donc *a fortiori* vrai pour f.

Remarque : en fait $f\circ f$ n'admet pas toujours de première dérivée non nulle, mais si c'est le cas c'est toujours pour un $p+1$ avec p pair. Le critère de convergence des suites récurrentes se lit donc sur le signe de cette dérivée.

Question IV.4.2. Les suites de termes pairs (respectivement impairs) sont des suites récurrentes pour $f\circ f$ et pour lesquelles IV.3. s'applique, donc, si elles convergent vers un point faiblement attractif, c'est toutes les deux en $\pm D/n^{1/p}$. Les deux signes étant en fait opposés puisque l'une est croissante et l'autre décroissante.

Propriétés utilisées

Topologie induite. : Soit A un sous ensemble de $\mathbf{R}$, ses ouverts sont, par définition de la topologie induite, les ensembles U inclus dans A tels qu'il existe un ouvert V de $\mathbf{R}$ tel que $U = A \cap V$ (on dit que ce sont les traces sur A des ouverts de $\mathbf{R}$). En particulier si A est ouvert, ses ouverts sont aussi des ouverts de $\mathbf{R}$ et on a même l'équivalence entre être ouvert dans A et être un ouvert de $\mathbf{R}$ inclus dans A.

Suites monotones. : Pour une suite monotone, il y a équivalence entre être convergente et être bornée. Et même, plus précisément, si la suite est croissante, elle est convergente si et seulement si elle est majorée. Si elle est décroissante, elle est convergente si et seulement si elle est minorée. Ces propriétés étant encore vraies pour les suites monotones à partir d'un certain rang.

Formules de Taylor. : Le début de la formule est toujours le même, c'st l'expression du reste qui change. On veut donc calculer, pour f de classe C^n au voisinage de a

$$f(x) - \left(f(a) + (x-a)f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \right) .$$

La formule de Taylor-Young est toujours vraie et exprime que cette quantité est un $o((x-a)^n)$. La formule de Taylor-Lagrange est vraie si $f^{(n+1)}$ existe dans un voisinage de a et est continue en a et exprime que le reste est de la forme

$$\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

pour ξ compris entre x et a. Enfin la formule avec reste intégral est valide si f est en fait de classe C^{n+1} et donne la forme

$$\int_a^x (t-a)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

pour le reste.

Accroissements finis. : Le théorème est en fait la formule de Taylor avec reste de Lagrange au rang $n = 1$. L'inégalité en découle et s'écrit

$$|f(x) - f(a)| \leq |x-a| \sup |f'|$$

où le sup est pris sur les t compris entre a et x.

Comparaison des séries. : Pour les séries à termes positifs si les termes généraux sont équivalents on a le même comportement vis-à-vis de la convergence et on a même des équivalents du reste (cas de convergence) ou de la série tronquée (cas de divergence). Quand les séries ne sont plus à termes positifs, la première partie est encore valable en remplaçant convergence par convergence absolue.

Héron. : Il s'agit je crois de Héron d'Alexandrie qui vécut au premier siècle après Jésus Christ (qui faisait partie de l'école des mécaniciens et a fait des expériences sur la Clepsydre).

Barème

Total	123	
Partie I	45	I.1 5+3+4+6 ; I.2 5 : I.3 2+10 ; I.4 1+3 ; I.5 1+2+3
Partie II	24	II.1 2 ; II.2 3+6 ; II.3 5+2+6
Partie III	27	III.1 3 ; III.2 4 ; III.3 6+6+5+3
Partie IV	27	IV.1 5+2 ; IV.2 4+4+4 ; IV.3 2 ; IV.4 4+2

François Sauvageot

CAPES externe de Mathématiques
session 1998
deuxième composition

Enoncé

http://perso.wanadoo.fr/megamaths

[0] [ag44e]

NOTATIONS DU PROBLÈME

$\mathcal{A}$ désigne un plan euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct et $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel associé à $\mathcal{A}$. On note $\vec{x}\cdot\vec{y}$ le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de $\mathcal{E}$.

Si ψ est un endomorphisme linéaire de $\mathcal{E}$, on note ψ^* l'endomorphisme adjoint de ψ, c'est-à-dire l'unique endomorphisme tel qu'on ait $\vec{x}\cdot\psi(\vec{y}) = \psi^*(\vec{x})\cdot\vec{y}$ quels que soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans $\mathcal{E}$. Un endomorphisme ψ est dit symétrique si et seulement si $\psi^* = \psi$.

On réservera le nom de triangle aux triangles non dégénérés, c'est-à-dire dont les trois sommets sont distincts et non alignés.

On appelle coordonnées barycentriques d'un point M relativement à un triangle ABC, les trois nombres réels λ, μ et ν tels que $\lambda + \mu + \nu = 1$ et que M soit le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients λ, μ et ν. On rappelle qu'un point M est intérieur au triangle ABC si et seulement si ses coordonnées barycentriques relativement au triangle sont strictement positives.

Les parties I et II sont indépendantes.

0. PRÉLIMINAIRES

0.1. Montrer qu'un endomorphisme linéaire ψ de $\mathcal{E}$ est symétrique s'il existe une base $\{\vec{u},\vec{v}\}$ de $\mathcal{E}$ telle que $\vec{u}\cdot\psi(\vec{v}) = \psi(\vec{u})\cdot\vec{v}$.

0.2. Montrer que l'inverse d'un automorphisme linéaire symétrique de $\mathcal{E}$ est symétrique.

0.3. Soit ABC un triangle et M un point du plan. Montrer que si λ, μ et ν ne sont pas tous nuls et vérifient $\lambda\overrightarrow{MA} + \mu\overrightarrow{MB} + \nu\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, alors on a $\lambda + \mu + \nu \neq 0$.

I. POINTS ISOGONAUX RELATIVEMENT À UN TRIANGLE

Soit ABC un triangle du plan $\mathcal{A}$. On note a, b et c les affixes des points A, B et C, et P le polynôme unitaire ayant a, b et c pour racines. Deux points M et N, distincts ou confondus, sont dits isogonaux (resp. strictement isogonaux) relativement à ce triangle s'ils sont distincts de A, B et C et si on a :

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AC})\ [\text{mod } \pi]\ (\text{resp. } [\text{mod } 2\pi]);$$
$$(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BA})\ [\text{mod } \pi]\ (\text{resp. } [\text{mod } 2\pi]);$$
$$(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM}) = (\overrightarrow{CN},\overrightarrow{CB})\ [\text{mod } \pi]\ (\text{resp. } [\text{mod } 2\pi]).$$

I.1. Soit M et N deux points distincts ou confondus, d'affixes respectives m et n, et soit Q le polynôme $Q(z) = (z-m)(z-n)$. Montrer que M et N sont isogonaux relativement au triangle ABC si et seulement si il existe des nombres réels non nuls α, β et γ tels que $Q(a) = \alpha P'(a)$, $Q(b) = \beta P'(b)$ et $Q(c) = \gamma P'(c)$ et que ces points sont strictement isogonaux si et seulement si α, β et γ sont strictement positifs.

I.2. On suppose que les points M et N, d'affixes m et n, sont isogonaux relativement au triangle ABC.

I.2.1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{Q(z)}{P(z)}$.

En déduire que les nombres α, β et γ de la question précédente vérifient $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

I.2.2. Établir que $\dfrac{\alpha}{m-a} + \dfrac{\beta}{m-b} + \dfrac{\gamma}{m-c} = 0$ et $\dfrac{\alpha}{n-a} + \dfrac{\beta}{n-b} + \dfrac{\gamma}{n-c} = 0$.

I.2.3. Exprimer les coordonnées barycentriques des points M et N relativement au triangle ABC. En déduire que ces points appartiennent au complémentaire dans $\mathcal{A}$ de la réunion des droites (AB), (BC) et (CA) et qu'ils sont strictement isogonaux si et seulement si ils appartiennent à l'intérieur du triangle ABC.

I.3. Soit α, β et γ trois réels non nuls, de somme égale à 1. On pose :

$$Q(z) = \alpha(z-b)(z-c) + \beta(z-a)(z-c) + \gamma(z-a)(z-b).$$

Soit m et n les racines de ce polynôme, avec éventuellement $m = n$. Montrer que les points M et N d'affixes respectives m et n sont isogonaux relativement au triangle ABC.

I.4. Soit M un point du plan $\mathcal{A}$. On note m son affixe et (λ, μ, ν) ses coordonnées barycentriques relativement au triangle ABC.

I.4.1. Montrer qu'une condition nécessaire pour qu'il existe un point N tel que M et N soient isogonaux relativement au triangle ABC est que l'on ait :

$$\lambda \neq 0, \quad \mu \neq 0, \quad \nu \neq 0 \qquad \textbf{(C1)}$$

$$\lambda |m-a|^2 + \mu |m-b|^2 + \nu |m-c|^2 \neq 0. \qquad \textbf{(C2)}$$

I.4.2. Montrer que si M vérifie ces conditions, il existe un point N et un seul tel que M et N soient isogonaux relativement au triangle ABC.

I.4.3. Justifier que tout point M de l'intérieur Δ du triangle ABC vérifie les conditions du I.4.1. et que le point N associé à M appartient à Δ. Montrer que l'application g qui associe N à M est un difféomorphisme involutif de Δ sur lui-même.

I.4.4. Montrer que la condition **(C2)** est équivalente à :

$$\det \begin{vmatrix} m-a & m-b & m-c \\ \overline{m}-\overline{a} & \overline{m}-\overline{b} & \overline{m}-\overline{c} \\ |m-a|^2 & |m-b|^2 & |m-c|^2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Développer ce déterminant [on pourra, pour alléger les calculs, supposer que l'origine est en A, c'est-à-dire faire $a = 0$].

I.4.5. Décrire l'ensemble des points $\mathcal{A}$ vérifiant les conditions du I.4.1.

II. TRIANGLES ORTHOLOGIQUES

Étant donné deux triangles ABC et A′B′C′ du plan $\mathcal{A}$, on note :

– δ_A, δ_B et δ_C les droites passant respectivement par A, B et C et perpendiculaires respectivement aux droites (B′C′), (C′A′) et (A′B′) ;

– $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$ et $\delta_{C'}$ les droites passant respectivement par A′, B′ et C′ et perpendiculaires respectivement aux droites (BC), (CA) et (AB) ;

– f l'application affine de $\mathcal{A}$ dans lui-même transformant A en A′, B en B′ et C en C′ et φ l'application linéaire associée à f.

On dit que le triangle A′B′C′ est orthologique au triangle ABC si les droites δ_A, δ_B et δ_C sont concourantes.

II.1. Soit ABC et A′B′C′ deux triangles du plan $\mathcal{A}$.

II.1.1. Montrer que l'application Φ de $\mathcal{A}$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\Phi(M) = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{C'A'} + \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{A'B'}$$

est constante sur $\mathcal{A}$.

II.1.2. Montrer que cette constante est égale à $\overrightarrow{CA} \cdot \left([\varphi - \varphi^*](\overrightarrow{AB}) \right)$.

II.1.3. On suppose que le triangle $A'B'C'$ est orthologique au triangle ABC et on note O le point de concours des droites δ_A, δ_B et δ_C. Montrer que $\Phi(O) = 0$. En déduire que φ est symétrique.

II.1.4. Réciproquement, montrer que si φ est symétrique, alors le triangle $A'B'C'$ est orthologique au triangle ABC.

II.2. Montrer que si $A'B'C'$ est orthologique au triangle ABC, alors ABC est orthologique au triangle $A'B'C'$. Quelle relation y a-t-il entre le point de concours O des droites δ_A, δ_B et δ_C et le point de concours O' des droites $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$ et $\delta_{C'}$?

La relation « $A'B'C'$ est orthologique au triangle ABC » est donc symétrique. On dira désormais : « Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont orthologiques ».

II.3. Soit ABC un triangle et soit A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB]. Montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont orthologiques. Préciser les points de concours des droites δ_A, δ_B et δ_C et des droites $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$ et $\delta_{C'}$. Identifier l'application affine f transformant les points A, B et C en les points A', B' et C'.

III. ISOGONIE ET ORTHOLOGIE

Étant donné deux points distincts X et Y du plan, on note σ_{XY} la symétrie orthogonale par rapport à la droite (XY). Soit ABC un triangle et M un point n'appartenant pas aux droites (AB), (BC) et (CA). On pose $A' = \sigma_{BC}(M)$, $B' = \sigma_{CA}(M)$ et $C' = \sigma_{AB}(M)$.

III.1. À quelle condition les points A', B' et C' forment-ils un triangle ? Cette condition étant remplie, montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont orthologiques.

On suppose dans ce qui suit que $A'B'C'$ est un triangle. On note N le point de concours des droites δ_A, δ_B et δ_C.

III.2. Quelle est la nature de l'application affine $\sigma_{CA} \circ \sigma_{AB}$? En déduire que le point N est le centre du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$.

III.3. Montrer que $\sigma_{AB} \circ \sigma_{AN} \circ \sigma_{AC} = \sigma_{AM}$. En déduire que M et N sont isogonaux relativement au triangle ABC. Que peut-on dire du centre du cercle circonscrit et de l'orthocentre d'un triangle ?

III.4. On suppose que M est intérieur au triangle ABC et on note I, J et K les points d'intersections respectivement des droites (NA') et (BC), des droites (NB') et (CA) et des droites (NC') et (AB). Soit r le rayon du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$.

III.4.1. Montrer que $MI + IN = r$. En déduire qu'il existe une ellipse Γ de foyers M et N qui passe par les points I, J et K.

III.4.2. Montrer que Γ est tangente aux trois côtés du triangle ABC.

III.5. Réciproquement, montrer que les foyers d'une ellipse tangente aux côtés d'un triangle ABC sont strictement isogonaux relativement à ce triangle.

CAPES externe 1998 de Mathématiques
2ème composition

solution proposée par Dany-Jack Mercier

IUFM de Guadeloupe, Morne Ferret,
BP399, Pointe-à-Pitre cedex 97159,
dany-jack.mercier@univ-ag.fr

NB : Le sujet de l'épreuve n'est pas joint à ce document. Il pourra être téléchargé au format pdf sur le site http://perso.wanadoo.fr/megamaths.

[0][ag44] v1.00

Solution de la deuxième composition du CAPES externe 1998

"Isogonie & Orthologie"

0.1. La condition est clairement nécessaire. Montrons sa suffisance : si $(\overline{u}\ \ \overline{v})$ est une base pour laquelle $\overline{u}\ \psi(\overline{v}) = \psi(\overline{u})\ \overline{v}$, et si $\overline{x}$ et $\overline{y}$ désignent des vecteurs quelconques de $\mathcal{A}$, on peut écrire $\overline{x} = \alpha\overline{u} + \beta\overline{v}$ et $\overline{y} = \alpha\ \overline{u} + \beta\ \overline{v}$ et par linéarité de ψ et du produit scalaire,

$$\begin{aligned} \overline{x}\ \psi(\overline{y}) &= \alpha\alpha\ \overline{u}\ \psi(\overline{u}) + \beta\alpha\ \overline{v}\ \psi(\overline{u}) + \alpha\beta\ \overline{u}\ \psi(\overline{v}) + \beta\beta\ \overline{v}\ \psi(\overline{v}) \\ &= \alpha\alpha\, \psi(\overline{u})\ \overline{u} + \beta\alpha\ \overline{u}\, \psi(\overline{v})\ \overline{u} + \alpha\beta\, \psi(\overline{u})\ \overline{v} + \beta\beta\, \psi(\overline{v})\ \overline{v} \\ &= \psi(\overline{x})\ \overline{y} \end{aligned}$$

Cela prouve que ψ est symétrique.

0.2. Si ψ est un automorphisme symétrique, pour tout $\overline{x}, \overline{y}\ \ \mathcal{E}$,

$$\begin{aligned} \overline{x}\ \psi^{-1}(\overline{y}) &= \psi \circ \psi^{-1}(\overline{x})\ \psi^{-1}(\overline{y}) = \psi^{-1}(\overline{x})\ \psi \circ \psi^{-1}(\overline{y}) \\ &= \psi^{-1}(\overline{x})\ \overline{y} \end{aligned}$$

prouve que $\left(\psi^{-1}\right)^* = \psi^{-1}$, i.e. que ψ^{-1} est symétrique.

0.3. Supposons par l'absurde que $\lambda + \mu + \nu = 0$. Alors pour tout $O\ \ \mathcal{A}$,

$$\lambda\overline{M}A + \mu\overline{M}B + \nu\overline{M}C = (\lambda + \mu + \nu)\,\overline{M}O + \lambda\overline{O}A + \mu\overline{O}B + \nu\overline{O}C = \overline{0}$$

soit $\lambda\overline{O}A + \mu\overline{O}B + \nu\overline{O}C = \overline{0}$. Pour $O = A$, on obtient $\mu\overline{A}B + \nu\overline{A}C = \overline{0}$ et puisque $\left(\overline{A}B\ \overline{A}C\right)$ est une base, $\mu = \nu = 0$. Pour $O = B$, on trouve $\lambda\overline{B}A + \nu\overline{B}C = \overline{0}$ et puisque $\left(\overline{B}A\ \overline{B}C\right)$ est une base, $\lambda = \nu = 0$. Finalement $\lambda = \mu = \nu = 0$ et cela contredit l'hypothèse.

I.1. On a

$$\left(\overline{A}B\ \overline{A}M\right) = \left(\overline{A}N\ \overline{A}C\right)\ (\pi) \qquad \begin{array}{l} \arg\frac{m-a}{b-a} = \arg\frac{c-a}{n-a}\ (\pi) \\ \arg\left(\frac{m-a}{b-a} : \frac{c-a}{n-a}\right) = 0\ (\pi) \\ \alpha\ \ \mathbb{R}^*\ \ \frac{m-a}{b-a} : \frac{c-a}{n-a} = \alpha \\ \alpha\ \ \mathbb{R}^*\ \ (a-m)(a-n) = \alpha(a-b)(a-c) \\ \alpha\ \ \mathbb{R}^*\ \ Q(a) = \alpha P\ (a) \end{array}$$

puisque $Q(z) = (z-m)(z-n)$ et puisque $P(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$ entraîne

$$P\ (z) = (z-b)(z-c) + (z-a)(z-c) + (z-a)(z-b)$$

[0] [ag44] v1.00 Dany-Jack Mercier

Les équivalences ci-dessus sont encore vraies si l'on considère des égalités modulo 2π à condition de remplacer $\alpha \quad \mathbb{R}^*$ par $\alpha \quad \mathbb{R}_+^*$.

NB : Le retour dans les équivalences ci-dessus est assuré puisque la condition $Q(a) = \alpha P\ (a)$ entraîne $M = A$ et $N = A$, ce qui permet d'introduire les angles $\left(\overline{A}B \ \ \overline{A}M\right)$ et $\left(\overline{A}N \ \ \overline{A}C\right)$. En effet, $Q(a) = \alpha P\ (a) = 0$ entraîne $a \qquad m \ n$.

I.2.1. On sait que la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{Q(z)}{P(z)}$ dont tous les pôles $a \ b \ c$ sont simples est

$$\frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{\frac{Q(a)}{P'(a)}}{z-a} + \frac{\frac{Q(b)}{P'(b)}}{z-b} + \frac{\frac{Q(c)}{P'(c)}}{z-c} = \frac{\alpha}{z-a} + \frac{\beta}{z-b} + \frac{\beta}{z-c} \qquad (*)$$

En multipliant les deux membres de $(*)$ par $(z-a)$, on trouve

$$\frac{(z-m)(z-n)}{(z-b)(z-c)} = \alpha + \frac{\beta(z-a)}{z-b} + \frac{\gamma(z-a)}{z-c}$$

Il suffit de faire tendre le réel z vers $+$ pour obtenir $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

NB : On peut retrouver la décomposition $(*)$ en écrivant

$$\frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{(z-m)(z-n)}{(z-a)(z-b)(z-c)} = \frac{u}{z-a} + \frac{v}{z-b} + \frac{w}{z-c}$$

qui entraîne

$$Q(z) = (z-m)(z-n) = u(z-b)(z-c) + v(z-a)(z-c) + w(z-a)(z-b)$$

En faisant $z = a$ dans cette égalité, on trouve $(a-m)(a-n) = u(a-b)(a-c)$ soit $u = \alpha$. Puis on recommence en remplaçant cette fois-ci z par b puis c.

I.2.2. Il suffit de faire $z = m$ puis $z = n$ dans $(*)$ pour obtenir

$$\frac{\alpha}{m-a} + \frac{\beta}{m-b} + \frac{\gamma}{m-c} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\alpha}{n-a} + \frac{\beta}{n-b} + \frac{\gamma}{n-c} = 0$$

I.2.3. La première égalité du I.2.2. s'écrit

$$\frac{\alpha}{m-a^{\ 2}}(\overline{m} - \overline{a}) + \frac{\beta}{m-b^{\ 2}}(\overline{m} - \overline{b}) + \frac{\gamma}{m-c^{\ 2}}(\overline{m} - \overline{c}) = 0$$

soit en prenant le conjugué puisque $\alpha \ \beta \ \gamma$ sont réels,

$$\frac{\alpha}{m-a^{\ 2}}(m-a) + \frac{\beta}{m-b^{\ 2}}(m-b) + \frac{\gamma}{m-c^{\ 2}}(m-c) = 0$$

Cette égalité entre affixes correspond à l'égalité vectorielle

$$\frac{\alpha}{m-a^{\ 2}}\overline{A}M + \frac{\beta}{m-b^{\ 2}}\overline{B}M + \frac{\gamma}{m-c^{\ 2}}\overline{C}M = \overline{0}$$

et signifie que $\left(\frac{\alpha}{m-a^{\ 2}} \ \ \frac{\beta}{m-b^{\ 2}} \ \ \frac{\gamma}{m-c^{\ 2}}\right)$ est un système de coordonnées barycentriques de M dans le repère $(A \ B \ C)$ (la somme des coefficients est $= 0$ d'après 0.3). Comme aucune de ces coordonnée

ne peut être nulle (car $\alpha\ \beta\ \gamma\quad \mathbb{R}^*$ depuis le I.1), on déduit que M n'appartient à aucune des droites (AB), (BC) ou (CA). On vérifie de la même façon que $\left(\frac{\alpha}{n-a^{\,2}}\ \frac{\beta}{n-b^{\,2}}\ \frac{\gamma}{n-c^{\,2}}\right)$ est un système de coordonnées barycentriques de N dans le repère $(A\ \ B\ \ C)$, et que $N\quad (AB)\quad (BC)\quad (CA)$.
Les points M et N sont strictements isogonaux si, et seulement si, $\alpha\ \beta\ \gamma\quad \mathbb{R}_+^*$ (cf. I.1), et cela équivaut à dire que les coordonnées barycentriques des points M et N explicitées ci-dessus sont strictement positives, i.e. que les points M et N sont intérieurs au triangle ABC.

I.3. S'il existe $\alpha\ \beta\ \gamma\quad \mathbb{R}^*$ tels que

$$Q(z) = (z-m)(z-n) = \alpha(z-b)(z-c) + \beta(z-a)(z-c) + \gamma(z-a)(z-b)$$

alors $Q(a) = \alpha P\ (a)$, $Q(b) = \beta P\ (b)$ et $Q(c) = \gamma P\ (c)$ et I.1 montre que M et N sont isogonaux.
NB : La réciproque est vraie. En effet si M et N sont isogonaux et avec les notations de I.1, il existe $\alpha\ \beta\ \gamma\quad \mathbb{R}^*$ tels que $Q(a) = \alpha P\ (a)$, $Q(b) = \beta P\ (b)$ et $Q(c) = \gamma P\ (c)$. Les polynômes $Q(z)$ et $\alpha(z-b)(z-c) + \beta(z-a)(z-c) + \gamma(z-a)(z-b)$ coïncident ainsi en chacun des réels $a\ \ b\ \ c$. Comme ils sont de degré ≤ 2, ils seront égaux.

I.4.1. S'il existe un point N tel que M et N soient isogonaux, on peut affirmer (cf. I.2.3) qu'il existe $\alpha\ \beta\ \gamma\quad \mathbb{R}_+^*$ tels que $\left(\frac{\alpha}{m-a^{\,2}}\ \frac{\beta}{m-b^{\,2}}\ \frac{\gamma}{m-c^{\,2}}\right)$ soit un système de coordonnées barycentriques de M dans le repère $(A\ \ B\ \ C)$. Par conséquent $(\lambda\ \ \mu\ \ \nu)$ sera proportionnel à $\left(\frac{\alpha}{m-a^{\,2}}\ \frac{\beta}{m-b^{\,2}}\ \frac{\gamma}{m-c^{\,2}}\right)$ et il existera un réel k non nul tel que

$$(\lambda\ \ \mu\ \ \nu) = k\left(\frac{\alpha}{m-a^{\,2}}\ \ \frac{\beta}{m-b^{\,2}}\ \ \frac{\gamma}{m-c^{\,2}}\right)$$

Cela prouve $(C1)$. Par ailleurs

$$\lambda\ \ m-a^{\,2} + \mu\ \ m-b^{\,2} + \nu\ \ m-c^{\,2} = k(\alpha+\beta+\gamma) = k = 0$$

montre $(C2)$.

I.4.2. Supposons que M vérifie $(C1)$ et $(C2)$.
Analyse : Si N est un point isogonal à M relativement au triangle ABC, et si $\alpha\ \beta\ \gamma$ sont définis par I.1, on a vu que

$$(\lambda\ \ \mu\ \ \nu) = k\left(\frac{\alpha}{m-a^{\,2}}\ \ \frac{\beta}{m-b^{\,2}}\ \ \frac{\gamma}{m-c^{\,2}}\right) \quad \text{avec } k\quad \mathbb{R}^* \text{ convenable,}$$

d'où

$$(\alpha\ \ \beta\ \ \gamma) = \left(\frac{\lambda\ \ m-a^{\,2}}{k}\ \ \frac{\mu\ \ m-b^{\,2}}{k}\ \ \frac{\nu\ \ m-c^{\,2}}{k}\right. \tag{1}$$

Comme $\alpha+\beta+\gamma = 1$, le réel k s'exprime en fonction de m, a, b, c, λ, μ, ν seulement et le triplet $(\alpha\ \ \beta\ \ \gamma)$ défini par (1) sera unique une fois M fixé. Le polynôme Q défini par

$$Q(a) = \alpha P\ (a)\quad Q(b) = \beta P\ (b)\ \text{ et } Q(c) = \gamma P\ (c)$$

sera unique, et c'est

$$Q(z) = \alpha(z-b)(z-c) + \beta(z-a)(z-c) + \gamma(z-a)(z-b)$$

On sait (I.1) que m et n sont racines de $Q(z)$, donc N est unique.

Synthèse : Soient $(\alpha\ \beta\ \gamma)\quad \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$ définis par (1) où $k\quad \mathbb{R}^*$ est déterminé par $\alpha+\beta+\gamma=1$, i.e.

$$k = \lambda\ \ m-a\ ^2 + \mu\ \ m-b\ ^2 + \nu\ \ m-c\ ^2 = 0$$

Il suffit maintenant de vérifier que le polynôme

$$Q(z) = \alpha(z-b)(z-c) + \beta(z-a)(z-c) + \gamma(z-a)(z-b)$$

admet m comme racine pour pouvoir appliquer I.3 et conclure à l'existence d'un point N (d'affixe n la seconde racine de Q) tel que les points M et N soient isogonaux. On a

$$\begin{aligned} Q(z) = \tfrac{\lambda\ m-a\ ^2}{k}(z-b)(z-c) + \tfrac{\mu\ m-b\ ^2}{k}(z-a)(z-c) \\ + \tfrac{\nu\ m-c\ ^2}{k}(z-a)(z-b) \end{aligned}$$

donc

$$Q(m) = \frac{(m-a)(m-b)(m-c)}{k}\left(\lambda(\overline{m}-\overline{a}) + \mu\left(\overline{m}-\overline{b}\right) + \nu(\overline{m}-\overline{c})\right) = 0$$

puisque par hypothèse $\lambda(m-a) + \mu(m-b) + \nu(m-c) = 0$.

I.4.3. • Tout point M appartenant à l'intérieur Δ du triangle possède des coordonnées barycentriques normalisées $(\lambda\ \mu\ \nu)$ strictement positives, ce qui entraîne $(C1)$ et $(C2)$.

Le point N associé à M existe donc, et avec les notations du I.2.3, admet $\left(\frac{\alpha}{n-a\ ^2}\ \frac{\beta}{n-b\ ^2}\ \frac{\gamma}{n-c\ ^2}\right)$ comme système de coordonnées barycentriques dans le repère $(A\ B\ C)$. Cela montre que $N\quad \Delta$ car ces coordonnées sont strictement positives.

En effet, toujours d'après I.2.3, le triplet $\left(\frac{\alpha}{m-a\ ^2}\ \frac{\beta}{m-b\ ^2}\ \frac{\gamma}{m-c\ ^2}\right)$ représente un système de coordonnées barycentriques de M et il y aura donc proportionnalité entre $\left(\frac{\alpha}{m-a\ ^2}\ \frac{\beta}{m-b\ ^2}\ \frac{\gamma}{m-c\ ^2}\right)$ et $(\lambda\ \mu\ \nu)$. Comme $\alpha+\beta+\gamma=1$, cela impose à $\alpha\ \beta\ \gamma$ d'être strictement positifs.

• Ainsi

$$g: \begin{array}{cc} \Delta & \Delta \\ M & N \end{array}$$

est bien définie. Comme M et $g(M) = N$ sont strictement isogonaux on peut écrire, modulo 2π

$$\left(\overline{A}B\ \overline{A}M\right) = \left(\overline{A}N\ \overline{A}C\right)\ ;\ \left(\overline{B}C\ \overline{B}M\right) = \left(\overline{B}N\ \overline{B}A\right)\ ;\ \left(\overline{C}A\ \overline{C}M\right) = \left(\overline{C}N\ \overline{C}B\right)$$

et en permutant les moyens

$$\left(\overline{A}B\ \overline{A}N\right) = \left(\overline{A}M\ \overline{A}C\right)\ ;\ \left(\overline{B}C\ \overline{B}N\right) = \left(\overline{B}M\ \overline{B}A\right)\ ;\ \left(\overline{C}A\ \overline{C}N\right) = \left(\overline{C}M\ \overline{C}B\right)$$

Cela prouve que M et N sont aussi strictement isogonaux. La relation "est isogonal à" est donc symétrique et l'on peut écrire $g(g(M)) = M$, soit $g^2 = Id$. L'application g sera involutive, donc bijective et d'inverse elle-même.

• Prouvons maintenant que g est un difféomorphisme de classe C . Comme g est involutive, cela revient à montrer que g est de classe C . D'après I.3, m et n sont solutions de

$$Q(z) = \alpha(z-b)(z-c) + \beta(z-a)(z-c) + \gamma(z-a)(z-b) = 0$$

soit de

$$Q(z) = z^2 - [\alpha(b+c) + \beta(c+a) + \gamma(a+b)]\, z + \alpha bc + a\beta c + ab\gamma = 0$$

Ainsi

$$n = \alpha(b+c) + \beta(c+a) + \gamma(a+b) - m \qquad (2)$$

L'application $g : (x\ y) \quad (x\ \ y\ )$ s'obtient en écrivant que $m = x+iy$ et $n = x\ +iy$ sont liés par (2), donc montrer que g est C revient à prouver que les applications $(x\ y) \quad \alpha$, $(x\ y) \quad \beta$, $(x\ y) \quad \gamma$ sont C . D'après (1) :

$$(\alpha\ \beta\ \gamma) = \left(\frac{\lambda\ m-a^{\ 2}}{k}\ \ \frac{\mu\ m-b^{\ 2}}{k}\ \ \frac{\nu\ m-c^{\ 2}}{k} \right.$$

où k vérifie $\alpha+\beta+\gamma = 1$, i.e.

$$k = \lambda\ m-a^{\ 2} + \mu\ m-b^{\ 2} + \nu\ m-c^{\ 2}$$

Si l'on exprime l'égalité $\lambda\overline{O}A + \mu\overline{O}B + \nu\overline{O}C = x\,\overline{i}\ + y\,\overline{j}\ = \overline{O}M$ dans la base $\left(\overline{i}\quad \overline{j}\right)$ on constate que λ, μ, $\nu = 1-\lambda-\mu$ sont des fonctions affines de $x\ y$. La fonction k est donc de classe C de $(x\ y)$ et ne s'annule jamais quand M décrit Δ. (1) montre alors que $\alpha\ \beta\ \gamma$ sernt des fonctions rationnelles de classe C de $(x\ y)$ définies sur Δ.

I.4.4. En développant le déterminant D proposé suivant la dernière ligne, on trouve

$$D = \ m-a^{\ 2} \begin{vmatrix} m-b & m-c \\ \overline{m}-\overline{b} & \overline{m}-\overline{c} \end{vmatrix} - \ m-b^{\ 2} \begin{vmatrix} m-a & m-c \\ \overline{m}-\overline{a} & \overline{m}-\overline{c} \end{vmatrix} + \ m-c^{\ 2} \begin{vmatrix} m-a & m-b \\ \overline{m}-\overline{a} & \overline{m}-\overline{b} \end{vmatrix} = 0$$

Cette condition sera équivalente à $(C2)$ si l'on prouve que les triplets $(\lambda\ \mu\ \nu)$ et

$$\left(\begin{vmatrix} m-b & m-c \\ \overline{m}-\overline{b} & \overline{m}-\overline{c} \end{vmatrix}\ \begin{vmatrix} m-c & m-a \\ \overline{m}-\overline{c} & \overline{m}-\overline{a} \end{vmatrix}\ \begin{vmatrix} m-a & m-b \\ \overline{m}-\overline{a} & \overline{m}-\overline{b} \end{vmatrix} \right) \qquad (*)$$

sont proportionnels et que le coefficient de proportionalité n'est pas nul. Pour cela on montre que $(*)$ est un système de coordonnées barycentriques de M (tout comme $(\lambda\ \mu\ \nu)$). Un calcul simple permet de vérifier que :

$$\begin{vmatrix} m-b & m-c \\ \overline{m}-\overline{b} & \overline{m}-\overline{c} \end{vmatrix}(m-a) + \begin{vmatrix} m-c & m-a \\ \overline{m}-\overline{c} & \overline{m}-\overline{a} \end{vmatrix}(m-b) + \begin{vmatrix} m-a & m-b \\ \overline{m}-\overline{a} & \overline{m}-\overline{b} \end{vmatrix}(m-c) = 0$$

Par ailleurs il faut montrer que

$$s = \begin{vmatrix} m-b & m-c \\ \overline{m}-\overline{b} & \overline{m}-\overline{c} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m-c & m-a \\ \overline{m}-\overline{c} & \overline{m}-\overline{a} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m-a & m-b \\ \overline{m}-\overline{a} & \overline{m}-\overline{b} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul. On a

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} m-b & m-c \\ \overline{m}-\overline{b} & \overline{m}-\overline{c} \end{vmatrix} &= (m-b)(\overline{m}-\overline{c}) - (\overline{m}-\overline{b})(m-c) \\ &= m\left(\overline{b}-\overline{c}\right) - \overline{m}(b-c) + b\overline{c} - \overline{b}c \\ &= 2i\,\mathrm{Im}\left(m\left(\overline{b}-\overline{c}\right) + b\overline{c}\right) \end{aligned}$$

Par permutation circulaire on déduit

$$\begin{aligned} s &= 2i\,\mathrm{Im}\left[m\left(\overline{b}-\overline{c}\right) + b\overline{c} + m(\overline{c}-\overline{a}) + c\overline{a} + m\left(\overline{a}-\overline{b}\right) + a\overline{b}\right] \\ &= 2i\,\mathrm{Im}\left(a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{a}\right) \end{aligned}$$

et $s = 0$ d'après le Lemme 1 ci-dessous.
Lemme 1 : Les points A, B, C sont alignés si, et seulement si, $a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{a} \quad \mathbb{R}$.
preuve du Lemme :
Première méthode : On peut supposer $a = 0$ quitte à faire une translation. Alors

$$A \; B \; C \text{ alignés} \qquad \left(\overline{A}B \; \overline{A}C\right) \text{ colinéaires} \qquad b\overline{c} \quad \mathbb{R}$$

est une conséquence du Lemme 2.
Deuxième méthode :

$$\begin{aligned} a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{a} \quad \mathbb{R} \qquad & a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{a} = \overline{a}b + \overline{b}c + \overline{c}a \\ & a\left(\overline{b}-\overline{c}\right) + b(\overline{c}-\overline{a}) + c\left(\overline{a}-\overline{b}\right) = 0 \\ & a\left(\overline{b}-\overline{c}\right) + b\left(\overline{c}-\overline{b}\right) + b\left(\overline{b}-\overline{a}\right) + c\left(\overline{a}-\overline{b}\right) = 0 \\ & (a-b)\left(\overline{b}-\overline{c}\right) + (b-c)\left(\overline{b}-\overline{a}\right) = 0 \\ & (a-b)\left(\overline{b}-\overline{c}\right) = \left(\overline{a}-\overline{b}\right)(b-c) \\ & (a-b)\left(\overline{b}-\overline{c}\right) \quad \mathbb{R} \end{aligned}$$

et cette dernière affirmation équivaut à la colinéarité de $\overline{B}A$ et $\overline{C}B$ d'après le Lemme 2. ■
Troisième méthode : On peut supposer que 2 des points $A \; B \; C$ sont distincts, par exemple $A = C$. Alors

$$\begin{aligned} A \; B \; C \text{ alignés} \qquad & k \quad \mathbb{R} \quad \overline{A}B = k\overline{A}C \qquad k \quad \mathbb{R} \quad b-a = k(c-a) \\ & \frac{b-a}{c-a} = \frac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{c}-\overline{a}} \qquad (b-a)(\overline{c}-\overline{a}) = (c-a)\left(\overline{b}-\overline{a}\right) \\ & \left(b\overline{c}-\overline{b}c\right) + \left(\overline{b}a - b\overline{a}\right) + (\overline{a}c - a\overline{c}) = 0 \\ & 2i\,\mathrm{Im}\left(a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{a}\right) = 0 \qquad a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{a} \quad \mathbb{R} \end{aligned}$$

Lemme 2 : Soient $\overline{u}$ et $\overline{u}$ deux vecteurs d'affixes respectives z et z . Alors

$$\begin{aligned} \overline{u} \text{ et } \overline{u} \text{ colinéaires} \qquad & z\overline{z} \quad \mathbb{R} \\ \overline{u} \text{ et } \overline{u} \text{ orthogonaux} \qquad & z\overline{z} \quad i\mathbb{R} \end{aligned}$$

preuve du Lemme 2 :

$$\overline{u} \text{ et } \overline{u} \text{ colinéaires} \quad \left(\overline{u} \quad \overline{u}\right) = 0 \ (\pi) \quad \left(\overline{i} \quad \overline{u}\right) - \left(\overline{i} \quad \overline{u}\right) = 0 \ (\pi)$$
$$\arg z - \arg z \ = 0 \ (\pi) \quad \arg z\overline{z} \ = 0 \ (\pi)$$
$$z\overline{z} \quad \mathbb{R}$$

et de la même façon

$$\overline{u} \text{ et } \overline{u} \text{ colinéaires} \quad \left(\overline{u} \quad \overline{u}\right) = \frac{\pi}{2} \ (\pi) \quad \arg z - \arg z \ = \frac{\pi}{2} \ (\pi)$$
$$\arg z\overline{z} \ = \frac{\pi}{2} \ (\pi) \quad z\overline{z} \quad i\mathbb{R} \ \blacksquare$$

Développons maintenant D en supposant $a = 0$:

$$D = \begin{vmatrix} m & m-b & m-c \\ \overline{m} & \overline{m}-\overline{b} & \overline{m}-\overline{c} \\ m^{\ 2} & m-b^{\ 2} & m-c^{\ 2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & b & c \\ \overline{m} & \overline{b} & \overline{c} \\ m^{\ 2} & m^{\ 2} - \ m-b^{\ 2} & m^{\ 2} - \ m-c^{\ 2} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} m & b & c \\ \overline{m} & \overline{b} & \overline{c} \\ m\overline{m} & m\overline{b}+b\overline{m}-b\overline{b} & m\overline{c}+c\overline{m}-c\overline{c} \end{vmatrix}$$

En développant suivant la première colonne, on trouve après simplifications

$$\begin{aligned} D &= \overline{b}cm\overline{m} + b\overline{b}\overline{c}m + bc\overline{c}\overline{m} - b\overline{c}m\overline{m} - b\overline{b}\overline{m}c - \overline{b}c\overline{c}m \\ &= (b-m)\,(\overline{c}-\overline{m})\,\overline{b}c - (c-m)\,\left(\overline{b}-\overline{m}\right)b\overline{c} \end{aligned}$$

I.4.5. La condition $(C1)$ équivaut à dire que $M \quad (AB) \quad (BC) \quad (CA)$. La condition $(C2)$ équivaut à $D = 0$, soit d'après I.4.4 à

$$\frac{(b-m)\,c}{(c-m)\,b} = \frac{\left(\overline{b}-\overline{m}\right)\overline{c}}{(\overline{c}-\overline{m})\,\overline{b}}$$

Cela s'écrit (puisque ici $a = 0$)

$$\frac{(b-m)\,(c-a)}{(c-m)\,(b-a)} = \frac{\left(\overline{b}-\overline{m}\right)(\overline{c}-\overline{a})}{(\overline{c}-\overline{m})\left(\overline{b}-\overline{a}\right)} \text{ ou encore } \frac{(b-m)\,(c-a)}{(c-m)\,(b-a)} \quad \mathbb{R}$$

On reconnaît la condition, en termes d'affixes, pour que les points $A \ B \ C \ M$ soient cocycliques. En conclusion les conditions du I.4.1 sont vérifiées si, et seulement si, M n'appartient ni au droites (AB), (BC) ou (CA), ni au cercle circonscrit au triangle ABC.

II.1.1. En utilisant la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} \Phi(M) &= \overline{A}M\ \overline{B}C\ + \overline{B}M\ \overline{C}A\ + \overline{C}M\ \overline{A}B \\ &= \overline{A}M\ \left(\overline{B}C\ + \overline{C}A\ + \overline{A}B\right) + \overline{B}A\ \overline{C}A\ + \overline{C}A\ \overline{A}B \\ &= \overline{B}A\ \overline{C}A\ + \overline{C}A\ \overline{A}B \end{aligned}$$

et Φ est bien une application constante.

II.1.2. Comme est la partie linéaire de f, on a $\left(\overline{A}B\right) = \overline{f(A)\, f(B)} = \overline{A\ B}$, et donc

$$\begin{aligned}
\overline{C}A\ (\ -\ ^{*})\left(\overline{A}B\right) &= \overline{C}A\ \ \left(\overline{A}B\right) - \overline{C}A\ \ ^{*}\left(\overline{A}B\right) \\
&= \overline{C}A\ \overline{A\ B} -\ \ \left(\overline{C}A\right)\ \overline{A}B \\
&= \overline{C}A\ \overline{A\ B} - \overline{C\ A}\ \ \overline{A}B = \Phi(M)
\end{aligned}$$

II.1.3.

$$\Phi(O) = \overline{A}O\ \overline{B\ C}\ + \overline{B}O\ \overline{C\ A}\ + \overline{C}O\ \overline{A\ B}$$

Par hypothèse $(AO) = \delta_A$ (ou bien $A = O$) entraîne $\overline{A}O\ \overline{B\ C}\ = 0$. De même $\overline{B}O\ \overline{C\ A}\ = 0$ et $\overline{C}O\ \overline{A\ B}\ = 0$ si bien que $\Phi(O) = 0$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
\Phi(O) = 0 \qquad & \overline{C}A\ (\ -\ ^{*})\left(\overline{A}B\right) = 0 \\
& \overline{C}A\ \ \left(\overline{A}B\right) = \overline{C}A\ \ ^{*}\left(\overline{A}B\right) \\
& \overline{C}A\ \ \left(\overline{A}B\right) = \ \ \left(\overline{C}A\right)\ \overline{A}B
\end{aligned}$$

Comme $\left(\overline{C}A\ \ \overline{A}B\right)$ est une base de $\mathcal{E}$, la question 0.1 montre que est symétrique.

II.1.4. Si est symétrique alors $\Phi(M) = \overline{C}A\ (\ -\ ^{*})\left(\overline{A}B\right) = 0$ pour tout $M\ \ \mathcal{A}$. Les droites δ_A et δ_B sont sécantes puisque de directions orthogonales à $(B\ C\ )$ et $(C\ A\ )$. Soit O le point d'intersection de δ_A et δ_B. Il faut montrer que $O\ \ \delta_C$, i.e. $C = O$ ou $(CO)\ \ \ (A\ B\ )$. On a

$$\Phi(O) = \overline{A}O\ \overline{B\ C}\ + \overline{B}O\ \overline{C\ A}\ + \overline{C}O\ \overline{A\ B}\ = 0$$

avec $\overline{A}O\ \overline{B\ C}\ = 0$ et $\overline{B}O\ \overline{C\ A}\ = 0$ par hypothèse, donc $\overline{C}O\ \overline{A\ B}\ = 0$ et cela signifie bien que $O\ \ \ \delta_C$.

II.2. L'application affine est bijective puisque transforme une base affine $(A\ \ B\ \ C)$ en une base affine $(A\ \ \ B\ \ \ C\ )$. On aura donc d'après 0.2 et la caractérisation obtenue en II.1,

$$\begin{aligned}
A\ B\ C\ \text{ orthologique à } ABC \qquad & \text{symétrique} \\
& ^{-1}\ \text{symétrique} \\
& ABC \text{ orthologique à } A\ B\ C
\end{aligned}$$

Lorsque $A\ B\ C$ et ABC sont orthologiques, les points O et O sont caractérisés par les relations

$$(1)\quad \begin{cases} \overline{A}O\ \overline{B\ C}\ = 0 \\ \overline{B}O\ \overline{C\ A}\ = 0 \\ \overline{C}O\ \overline{A\ B}\ = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (2)\quad \begin{cases} \overline{A\ O}\ \ \overline{B}C = 0 \\ \overline{B\ O}\ \ \overline{C}A = 0 \\ \overline{C\ O}\ \ \overline{A}B = 0 \end{cases}$$

Comme la partie linéaire de f est symétrique,

$$\overline{A}O\ \overline{B\ C}\ = 0 \qquad \left(\overline{A}O\right)\ \overline{B}C = 0 \qquad \overline{A\ f(O)}\ \overline{B}C = 0$$

En recommençant avec les deux autres égalités de (1), on peut donc écrire

$$(1) \qquad (3) \qquad \begin{array}{l} \overline{A\,f(O)}\ \overline{B}C = 0 \\ \overline{B\,f(O)}\ \overline{C}A = 0 \\ \overline{C\,f(O)}\ \overline{A}B = 0 \end{array}$$

(2) et (3) entraînent par soustraction

$$\begin{array}{l} \overline{O\,f(O)}\ \overline{B}C = 0 \\ \overline{O\,f(O)}\ \overline{C}A = 0 \end{array}$$

Le vecteur $\overline{O\,f(O)}$ est ainsi orthogonal à deux direction différentes (BC) et (CA), d'où $O = f(O)$.

II.3. La réciproque du Théorème de Thalès montre que $(B\ C\ )$ est parallèle à (BC). Par suite la perpendiculaire à $(B\ C\ )$ passant par A coïncide avec la perpendiculaire à (BC) passant par A, i.e. avec la hauteur issue de A du triangle ABC. On a montré que δ_A est cette hauteur.
De la même façon, δ_B et δ_C seront les hauteurs issues de B et C du triangle ABC. Les trois hauteurs δ_A, δ_B et δ_C du triangle ABC sont concourantes, donc ABC et $A\ B\ C$ seront orthologiques.
Les droites δ_A, δ_B et δ_C concourent en l'orthocentre du triangle ABC, tandis que les droites $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$ et $\delta_{C'}$, qui sont les médiatrices des côtés du triangle ABC, passent par le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
Les points de concours des droites δ_A, δ_B et δ_C d'une part, et $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$ et $\delta_{C'}$ d'autre part, seront les orthocentres des triangles ABC et $A\ B\ C$.
L'homothétie h de centre l'isobarycentre G du triangle ABC et de rapport $-\frac{1}{2}$ est affine et transforme A, B, C respectivement en A , B , C . C'est l'application cherchée.

III.1. Le Théorème de Simson montre que les projetés orthogonaux de M sur (AB), (BC), (CA), et donc aussi les symétriques A , B , C de M par rapport à ces droites, sont alignés si, et seulement si, M appartient au cercle circonscrit $\mathcal{C}_{ABC}$ au triangle ABC. Par conséquent les points A , B et C forment un triangle si, et seulement si, $M \quad \mathcal{C}_{ABC}$.

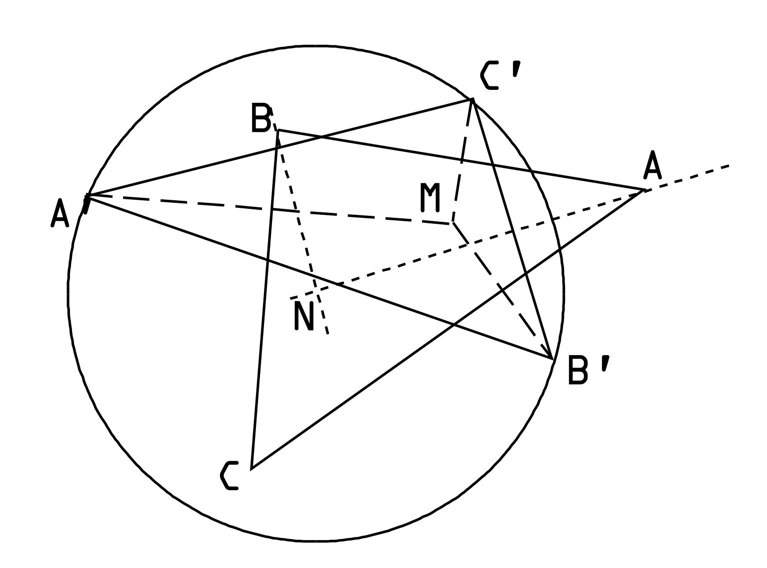


Fig. 1

$\delta_{C'}$ est la perpendiculaire à (AB) passant par C , donc $\delta_{C'} = (C\ M)$. De même $\delta_{A'} = (A\ M)$ et $\delta_{B'} = (B\ M)$. Les droites $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$, $\delta_{C'}$, seront donc concourantes en M, et les triangles ABC et $A\ B\ C$ seront orthologiques.

III.2. L'application $\sigma_{CA} \circ \sigma_{AB}$ est la rotation de centre A et d'angle $2\left(\overline{A}B,\overline{A}C\right)$ modulo 2π. De $\sigma_{CA} \circ \sigma_{AB}(C\ ) = \sigma_{CA}(M) = B$ on déduit $AB\ = AC$. Par conséquent A appartient à la médiatrice de $[B\ C\ ]$ et δ_A coïncide avec cette médiatrice. De même δ_B (resp. δ_C) sera la médiatrice de $[C\ A\ ]$ (resp. $[A\ B\ ]$). Les trois médiatrices δ_A, δ_B et δ_C des côtés du triangle $A\ B\ C$ vont donc concourir en N centre du cercle circonscrit à ce triange.

III.3. L'application $s = \sigma_{AB} \circ \sigma_{AN} \circ \sigma_{AC}$ est une réflexion par rapport à une droite D comme composée de trois réflexions. Clairement $s(A) = A$ et

$$s(M) = \sigma_{AB} \circ \sigma_{AN} \circ \sigma_{AC}(M) = \sigma_{AB} \circ \sigma_{AN}\left(B\ \right) = \sigma_{AB}\left(C\ \right) = M$$

donc $D = (AM)$ et $s = \sigma_{AM}$.
On aura $\sigma_{AB} \circ \sigma_{AN} = \sigma_{AM} \circ \sigma_{AC}$ et en égalant les angles de ces deux rotations,

$$2\left(\overline{A}N,\overline{A}B\right) = 2\left(\overline{A}C,\overline{A}M\right) \quad (2\pi)$$

soit $\left(\overline{A}N,\overline{A}B\right) = \left(\overline{A}C,\overline{A}M\right)$ (π). Cela signifie que M et N sont isogonaux.
Supposons maintenant que M soit l'orthocentre du triangle ABC. Les symétriques de M par rapport aux côtés du triangle ABC appartiennent au cercle circonscrit à ce triangle, autrement dit les cercles circonscrits $\mathcal{C}_{ABC}$ et $\mathcal{C}_{A'B'C'}$ coïncident. Mais alors N est le centre du cercle $\mathcal{C}_{ABC}$. En conclusion, l'orthocentre M de ABC et le centre N du cercle circonscrit au triangle ABC sont isogonaux.

III.4.1 Par symétrie $MI = A\ I$. Par ailleurs $I \quad [A\ N]$ puisque M est dans l'intérieur Δ du triangle ABC, que par conséquent A est à l'extérieur de ce triangle, et que $N \quad \Delta$ dès que $M \quad \Delta$ (puisque M et N sont isogonaux et en vertu de I.2.3). On aura donc

$$MI + IN = A\ I + IN = A\ N = r$$

L'ellipse $\Gamma = \ T \quad \mathcal{A}\ MT + TN = r$ de foyers $M\ N$ et de grand axe r contiendra alors les points $I\ J\ K$.

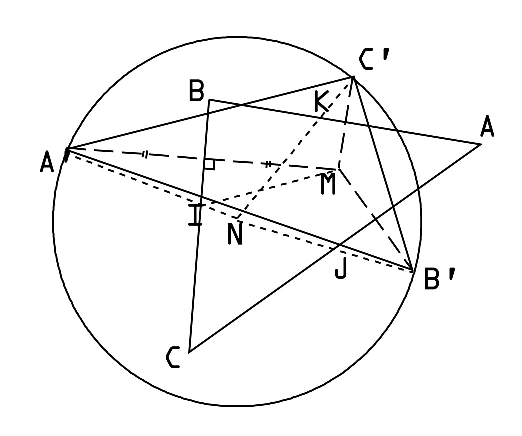


Fig. 2

III.4.2 Montrons que (BC) est tangente à Γ en I, la démonstration étant la même pour les autres côtés du triangle. Il s'agit de montrer que la droite (BC) coupe Γ seulement en I. On sait déjà que $I \quad (BC) \quad \Gamma$. Réciproquement, si $W \quad (BC) \quad \Gamma$,

$$A\,W + WN = MW + WN = r = A\,N$$

prouve que $W \quad [A\,N]$, et donc que $W = I$.

III.5 Soit Γ une ellipse de foyers $M\ N$ et tangente aux côtés du triangle ABC (cf. fig. 3). Notons a la longueur de son demi-grand axe. Construisons les symétriques A , B , C de M par rapport aux côtés (BC), (CA), (AB). On sait (voir Lemme ci-dessous) que tous les symétriques du foyer M par rapport à des tangentes à l'ellipse appartiennent au cercle directeur $\mathcal{C}\,(N\ 2a)$ relatif au second foyer N (i.e. au cercle de centre N et de rayon $2a$). Ici les points A , B , C seront sur $\mathcal{C}\,(N\ 2a)$, et donc N sera centre de $\mathcal{C}_{A'B'C'}$. Cela implique d'après III.3 que M et N sont isogonaux relativement à ABC.

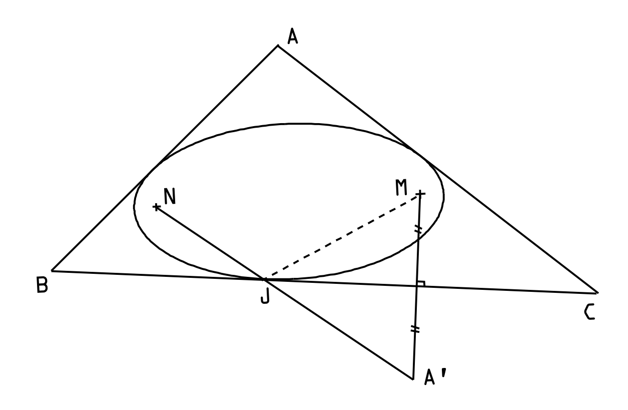


Fig. 3

Lemme : Le symétrique A du foyer M par rapport à une tangente $T = (BC)$ à l'ellipse Γ appartient au cercle directeur $\mathcal{C}\,(N\ 2a)$ relatif au seconf foyer N.

preuve : Soit J le point de contact entre Γ et T. La tangente T à Γ en J coïncide avec la bissectrice extérieure de MNJ en J. Cela prouve que A , J et N sont alignés et que $J \quad [NA\,]$. Comme $JM = JA$ par symétrie, on aura

$$NA\ = NJ + JA\ = NJ + JM = 2a \ \blacksquare$$